한국전산구조공학회
1998년도 봄학술발표회 논문집

요소 세분화 및 재결합을 이용한 바람의 적응적 유한요소 해석

Adaptive finite element wind analysis with mesh refinement and recovery

최 창 근* 유 원 진** 이 은 진**
Choi, Chang-Koon Yu, Won-Jin Lee, Eun-Jin

ABSTRACT

This paper deals with the development of a variable-node element and its application to the adaptive *h*-version mesh refinement-recovery for the incompressible viscous flow analysis. The element which has variable mid-side nodes can be used in generating the transition zone between the refined and unrefined elements and efficiently used for construction of a refined mesh without generating distorted elements. A modified Gaussian quadrature is needed to evaluate the element matrices due to the discontinuity of derivatives of the shape functions used for the element. The penalty function method which can reduce the number of independent variables is adopted for the purpose of computational efficiency and the selective reduced integration is carried out for the convection and pressure terms to preserve the stability of solution. For the economical analysis of transient problems, not only the mesh refinement but also the mesh recovery is needed. The numerical examples show that the optimal mesh for the finite element analysis of a wind around the structures can be obtained automatically by the proposed scheme.

1. 개요

구조물에 작용하는 바람의 영향을 실용적으로 해석하기 위해서는 해의 정확도, 해석의 효율성, 모델링의 적합성이 모두 만족되어야 한다. 따라서 최적의 요소망을 구축하여야 할 필요성이 대두되게 된다. 4절점 요소는 간결하고 쉽게 사용할 수 있다는 이점으로 인해 2차원 유체해석의 주류를 이루고 있다. 그러나 복잡한 기하형상을 가지는 문제에서는 전체 요소망이 속도경사의 변화가 심한곳, 즉 물리량이 급격히 변하는 곳에서 요소를 국부적으로 세분화할 필요가 있다. 4절점만 사용하는 경우에는 이런 경우 찌그러진 요소를 발생할 가능성이 있다. 비정규 절점을 사용하는 방법을 예상해 볼 수도 있으나 너무 많은 비정규 절점을 사용하게 되면 절점만 존재하고 자유도는 존재하지 않는 문제점으로 인하여 구속현상이 발생함이 보고되었다. (이 남호 1993) 변절점 요소는 매달린 절점(hanging node)을 발생하지 않고 세분화와 재결합을 효율적으로 수행할 수 있는 대안이 될 수 있다. 변절점 요소를 이용하여 세분화를 수행하는 연구는 정적 문제에 대하여 상당히 진척되어 왔으나 최적의 동적문제에서 시간의존적인 물리량들을 취급하기 위해서는 요소의 회복과정이 필요하게 되었다.

* 한국과학기술원 토목공학과 교수
** 한국과학기술원 토목공학과 박사과정

본 논문에서는 가변 절점을 가지는 변이요소를 유체에 적합하도록 개발하고 이를 이용하여 최소의 노력으로 적응적 유한요소 해석을 수행하는 기법을 제시하였다. 요소세분화는 기존의 거친 요소에 국부적으로 세분화된 요소를 연결시키는 방법으로 구현하였다. 또한 전술한 문제점, 즉 찌그러진 요소나 매달린 절점을 발생하지 않고 요소 세분화가 가능하다. 제시된 기법을 검증하기 위하여 예제해석을 수행하였으며 유체해석을 위해 개발된 적응적 요소세분화 및 재결합 기법의 유용성을 검토하였다.

2. 정식화

공기는 Navier-Stokes 방정식에서 비압축성 점성유체인 경우로 볼 수 있다. Penalty 함수를 이용하여 압력항을 소거하고 Galerkin 정식화 과정을 거쳐 요소 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} 2K_{11}+K_{22} & K_{12} \\ K_{21} & K_{11}+2K_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}+\lambda\begin{bmatrix} [L_{11}] & [L_{12}] \\ [L_{12}]^T & [L_{22}] \end{bmatrix}=\begin{Bmatrix} f_u \\ f_v \end{Bmatrix} \quad (1)$$

여기서

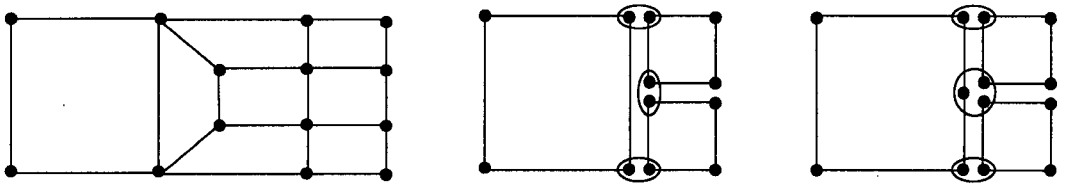
$$M=\int_\Omega \rho\{N\}\langle N\rangle d\Omega \qquad C=\int_\Omega\left(u\{N\}\left\langle\frac{\partial N}{\partial x}\right\rangle+v\{N\}\left\langle\frac{\partial N}{\partial y}\right\rangle\right)d\Omega$$

$$K_{ab}=\int_\Omega \mu\left\{\frac{\partial N}{\partial x_b}\right\}\left\langle\frac{\partial N}{\partial x_a}\right\rangle d\Omega \qquad L_{ab}=\int_\Omega\left\{\frac{\partial N}{\partial x_b}\right\}\left\langle\frac{\partial N}{\partial x_a}\right\rangle d\Omega$$

$[M]$, $[C(u_n,v_n)]$, $[K]$, $[L]$는 각각 질량행렬, 대류행렬, 점성행렬, 및 penalty 함수에 관련된 압력행렬으로 볼 수 있다. u 와 v 는 각각 x, y방향의 속도이고 ρ 는 밀도, μ 는 점성계수이다. 대류 행렬이 대류속도가 커서 요소내의 Re 수가 높을 경우 수치적으로 불안정해지게 되므로 상류화 기법을 이용하여 안정화를 도모하였다. (Hughes 1979, Zienkiewicz 1989)

3. 변절점 요소

기존에 사용되는 4절점요소를 이용한 요소 세분화는 그림 1(a)와 같이 찌그러진 요소를 발생시키며 비정규 절점을 이용하는 경우에는 그림 1(b)와 같이 매달린 절점을 발생시킨다. 이러한 문제점은 그림 1(c) 와 같이 변절점 요소를 사용하여 개선할 수 있다. 기본 개념은 4절점 요소에 면의 중간에 자유도를 가지는 절점을 배치하여 거친 요소와 세분화된 요소간에 요소의 연결을 이룩한다는 것이다. 세분화된 요소는 기존요소에 비해 1/4의 면적과 동일한 형상을 가지게 되며 기존의 거친 요소와 변절점 요소를 이용하여 연결된다. (그림 2)



(a) 4절점 요소 (b) 비정규 절점 (c) 변절점 요소

그림 1. 거친 요소와 세분화된 요소의 연결

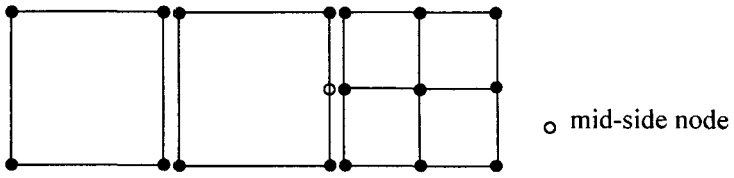


그림 2. 변이 영역에서 변절점 요소의 사용

4. 적응적 요소 세분화 및 재결합

요소 세분화의 첫번째 단계로 유한요소 해석을 통하여 얻어진 해의 오차분포를 평가하는 기법이 필요하다. 본 논문에서는 오차계산을 위하여 후처리법(posteriori error estimate) 을 이용하였다. 속도 경사의 L_2 놈(norm)은 아래 식과 같다.

$$\|\nabla a\| = \left(\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u d\Omega \right)^{1/2} \tag{2}$$

이 때 오차의 L_2 놈은 아래 식과 같다.

$$\|e\| = \left(\int_\Omega (\nabla u - \nabla \hat{u}) \cdot (\nabla u - \nabla \hat{u}) d\Omega \right)^{1/2} \tag{3}$$

∇u : 정확한 속도 경사
$\nabla \hat{u}$: 유한요소 해석으로 구한 속도 경사

정확한 속도 경사를 모르기 때문에 오차 놈은 위 식으로부터 구할 수 없으며 대신에 평활화(smoothed)된 속도경사 ∇u^* 를 도입하여 오차해석을 수행하게 된다. 평활화된 속도 경사를 이용하여 전체해의 오차(overall error)는 다음 식과 같이 표현된다.

$$\eta = \frac{\|e^*\|}{\|\nabla a^*\|} \tag{4}$$

이때 요소를 세분화할 것인가 회복할 것인가에 대한 요소한개당 오차(error indicator)는 아래 식과 같다.

$$\eta_i = \left(\frac{\|e^*\|_i^2}{\left\|\nabla a^*\right|^2 / nel} \right)^{1/2} \tag{5}$$

요소당 오차가 사용자가 정의한 세분화 오차보다 클 때 4개의 부요소로 세분화되게 된다. 반면 요소의 재결합은 기존에 세분화된 4개의 요소당 오차가 미리 정의한 재결합 오차보다 작을 때 수행한다. 이 과정을 통해 해석 대상 전체에 비교적 균일한 오차를 분포시키게 되며 최적의 요소망을 얻게 된다.

초기 요소망을 세분화화는 과정에 많은 종류의 변절점 요소가 사용될 수 있다. 그러나 인접한 요소간에 급격한 크기의 변화를 방지하기 위하여 'single-level-rule' (SLR)을 정의한다. SLR은 인접요소가 가지고 있는 level의 차가 1을 넘을 수 없다는 조건이다. 이때 level이란 요소가 해석을 통하여 몇번이나 세분화되었는가를 나타내는 지표이다. 따라서 이미 세분화된 요소는 SLR에 따라 주변요소가 자신과 같은 정도까지 세분화되기 전에는 다시 세분화될 수 없다. SLR은 역시 재결합과정에도 이용되는 데 그림 3에 설명되어 있다.

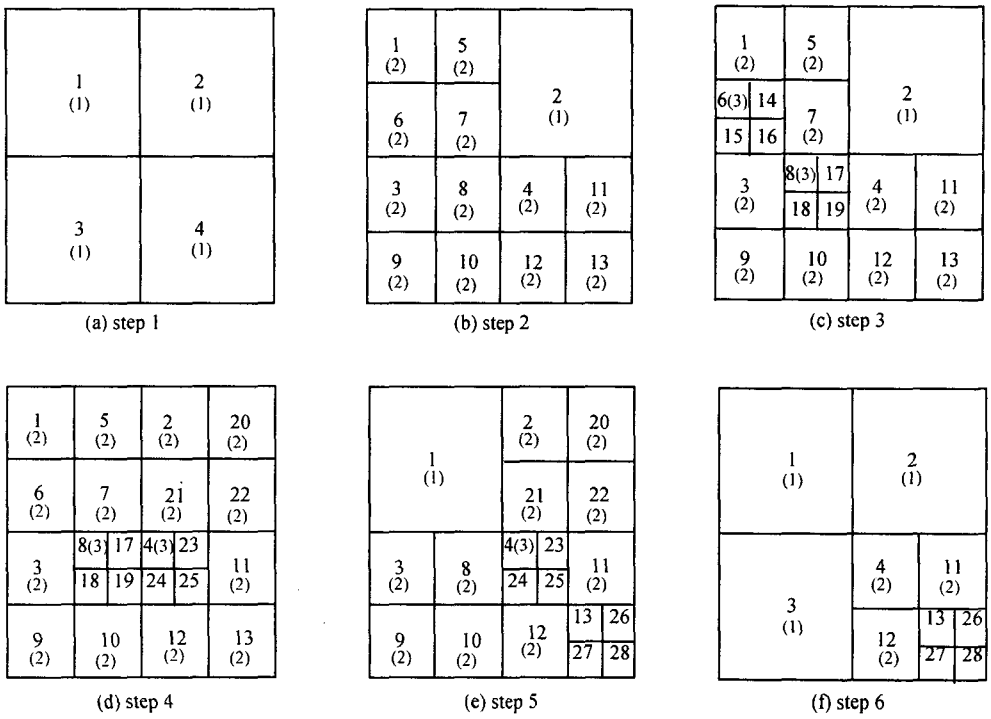


그림 3. 요소 세분화 및 재결합 과정

그림 3(a)에서 초기 요소망은 step 1과 같이 4개로 구성되어 있다. 두번째 step에서 오차평가의 결과로 1, 3, 4번 요소의 오차가 미리 정의한 세분화 오차보다 클 경우 그림 3(b)처럼 세분화된다. 마찬가지로 step 3에서도 5번 8번 요소가 세분화된다. 그림에서 요소내부의 번호는 요소의 번호이고 괄호로 묶인 번호는 요소의 level을 나타낸다. 세분화 과정을 통해 새로운 요소가 발생하고 그들 요소들은 각각 level이 증가하게 된다.

Step 4에서 만약 4번 요소의 오차가 커서 세분화되어야 할 필요가 있다고 가정하자. 그러나 이전단계의 결과인 그림 3(c)에서 보는 바와 같이 인접요소 2번의 level은 1이고 4번의 level은 2이기 때문에 4번이 만약 세분화되면 level의 차는 2가 되어 SLR을 위반하게 되다. 따라서 2번 요소는 먼저 세분화되어야 하며 그 이후에 4번 요소가 세분화될 수 있다. Step 4에서 3, 14, 15, 16번 요소가 재결합되었다.

다음 단계인 step 5에서 1번 요소가 재결합되는 과정에서도 SLR이 작용한다. 즉 step 4에서 보는 바와 같이 1, 5, 6, 7 주변 요소중 8, 17, 18, 19의 level이 1번 요소보다 크기 때문에 1번 요소의 재결합 이전에 8, 17, 18, 19번 요소가 우선 재결합되어야 한다. 그러나 8, 17, 18, 19번 요소의 오차가 재결합을 위한 오차한계보다 클 경우 이들 요소는 재결합되지 못하면 마찬가지로 1, 5, 6, 17 요소도 재결합될 수 없다. Step 6 는 재결합이 계속 진행되는 모습을 보여주고 있다.

5. 수치해석 예제

5.1 Cavity Flow

cavity-flow 문제는 제안된 기법의 적합성과 실제문제에의 효율성을 검증하기 위한 예제로서 선택하였다. 초기의 요소는 4개, 절점은 9개이고 경계조건은 그림 4에 있다. Re수는 100, 시간간격은 0.02로 하였으며 세분화 오차한계는 20%로 하였다. 너무 많은 요소를 발생시키는 것을 막기 위하여 최대 요소 level을 6으로 제한하였다. 세분화 및 재결합과정은 0.5초 간격으로 수행되었다. 2초 간격으로 표시한 요소망과 속도벡터가 그림 5에 주어져 있다. 8초가 되었을 때 요소는 718개로, 절점은 845로 증가하였다. 동굴의 벽면에서 발생하는 절점들의 경계조건은 모두 0이고, 동굴 윗면에서는 x 방향 속도를 1, y 방향 속도를 0으로 설정하였다.

변절점 요소와 적응적 요소세분화 및 재결합기법을 이용한 이 결과는 삼각형 요소를 이용한 기존의 해석과 유사하다. (Sampio 1993) 요소의 세분화는 좌상, 우상 구석에 집중되었는데 이 곳에서 속도, 압력, 와도등이 급격히 변하는 점(Gresho 1984)을 볼 때 합리적이다. 특히 우상귀에서 반발되는 흐름은 각종성질의 변화가 극심하며 그 결과가 그림5에서 잘 보여지고 있다.

세분화 오차의 설정이 해에 미치는 오차를 평가하기 위해서 20% 세분화 오차를 25%, 15%, 및 10%로 바꾸어 가면서 해석을 하였다. 이 때 재결합을 위한 오차한계는 각각 세분화 오차한계의 25%로 정하였다. 각각에 대해 다른 조건은 모두 동일하게 설정하였다. 8초에서 요소망을 그림 6에 보였다. 해의 전체오차는 25%, 15%, 10% 오차한계에 대해 각각 17.3%, 13.6%, 13.5%로 나타났다. 일반적으로 더 큰 오차한계를 설정할수록 해의 전체오차도 증가하는 경향을 보였다.

해석결과로부터 변절점요소가 적응적 요소 세분화와 재결합과정에 유용하게 사용될 수 있음을 보였다. 최적의 요소를 구성하기 위해서는 알맞은 오차한계를 설정하여야 함을 인식하였으나 그 값의 설정은 아직 사용자의 경험과 직관에 의존하고 있다. 따라서 추가적인 연구가 본 연구의 확장을 위해 필요하다.

5.2 Bluff body

흐름중앙에 놓인 사각구조물(bluff body) 문제의 경계조건과 초기 요소망을 그림 7에 도시하였다. 네 귀에서 유체의 박리 현상이 발생하며 수치적으로 특이점을 형성하게 된다. 따라서 이점에서는 유체의 불안정성이 증가하며 균일 요소망을 이용할 경우 그 지점들에서 오차가 증가할 것을 예상할 수 있다. 많은 연구자들이 이 문제를 해결하기 위하여 인위적으로 많은 요소를 배치하여 해석을 하였다. 이 문제 해석의 주요 목적은 적응적으로 발생한 요소가 물체 주변에서 집중적으로 배치되는가의 여부와 물체 후면에서 발생하는 와를 성공적으로 묘사할 수 있는가를 살펴보는 것이다.

Re수는 100으로 하고 초기 요소망은 778개의 절점과 716개의 요소로 구성되었다. 적응적 기법을 사용하지 않는 해석과는 달리 요소 세분화가 진행되면서 요소의 크기는 점점 줄어들며 따라서 시간간격의 선택에 주의를 하였다. 시간간격이 너무 큰 때에는 유체 입자들이 한 시간간격 내에서 요소를 건너뛰는 현상이 발생하여 세분화와 재결합에 따른 요소의 변화가 실제 유체의 흐름속도를 표현하지 못할 수 있다. 이러한 점과 계산시간 및 Courant안정조건등을 고려하여 시간간격을 0.05 초로 설정하였다. 와를 발생시키기 위하여 1초에서 인위적으로 흐름을 교란시켰다.

그림 8은 22.5초에서의 속도 벡터와 요소망 및 유선을 나타내고 있다. 요소들이 물체주변뿐만 아니라 와의 발생을 성공적으로 묘사하고 있다. 또한 이 결과는 삼각형 요소를 이용한 결과와도 일치하고 있다. (Sampio 1993). 이 때 절점과 요소는 각각 2155, 1892개로 증가하였다. 와류 방출이 반주기만큼 진행한 24.6초에서의 속도와 요소망 및 유선을 그림 9에 도시하였다. 그림 8과 그림 9의 비교로부터 와의 대칭성을 확인할 수 있다.

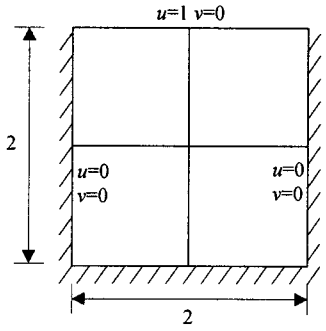
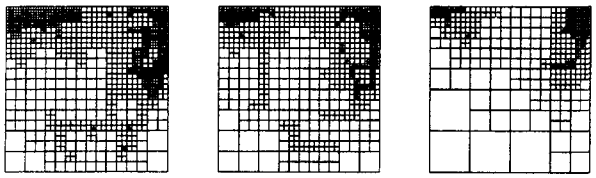
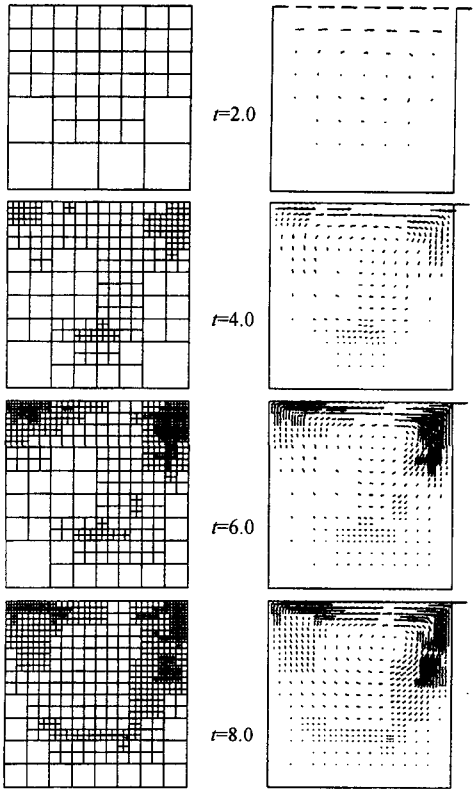


그림 4. Cavity-flow 문제의
경계조건 및 초기요소망



(a) 10% (b) 15% (c) 25%

그림 6. 8초에서 오차한계별 세분화된 요소망



(a) 요소 세분화 (b) 속도벡터

그림 5. Cavity-flow의 적응적 유한요소 해석

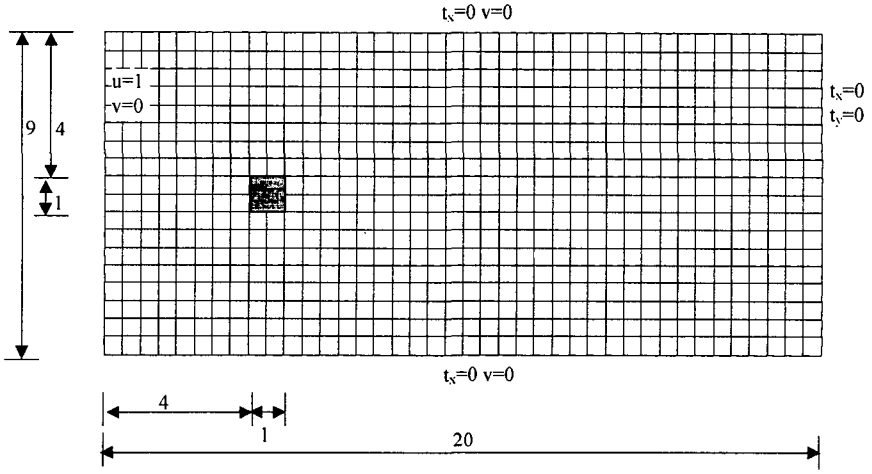


그림 7. 흐름 내부에 위치한 사각구조물의 경계조건과 초기 요소망

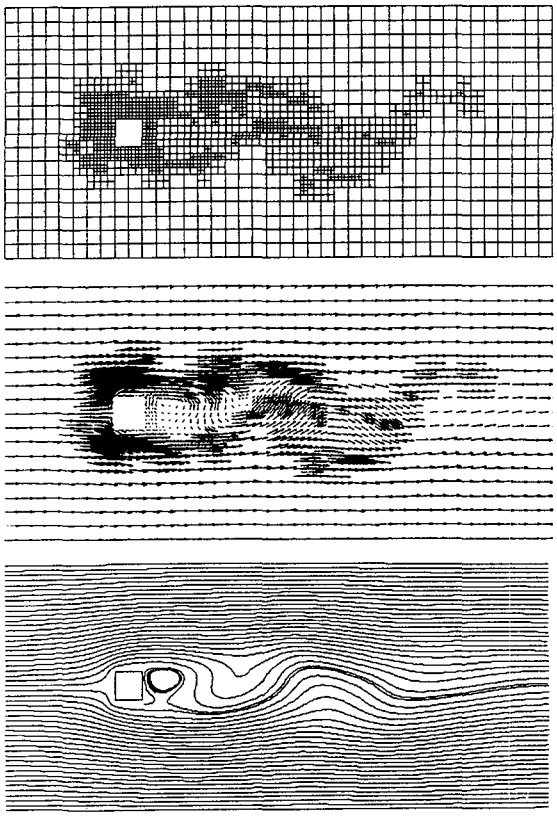


그림 8. 22.5초에서 요소망, 속도벡터, 유선

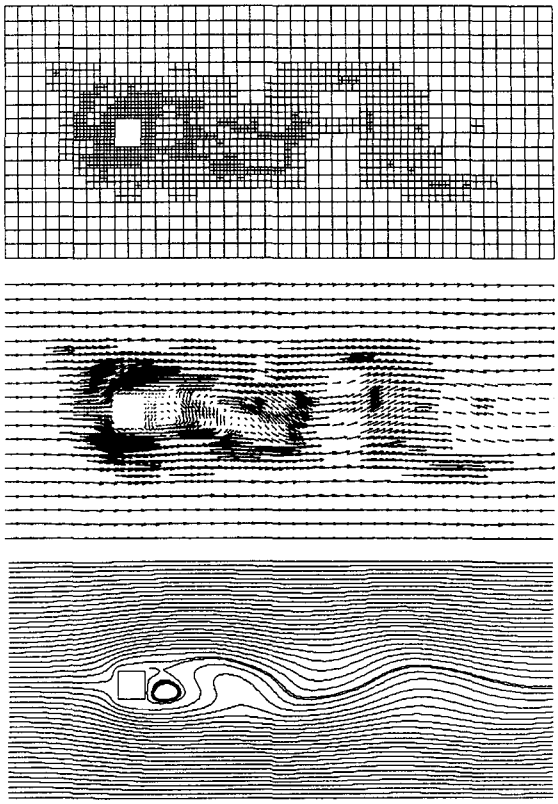


그림 9. 24.6초에서 요소망, 속도벡터, 유선

6. 결론

변절점 요소를 이용한 새로운 적응적 요소 세분화-재결합 기법을 제시하였으며 흐름의 동적 특성을 표현하는데 효율적임을 확인하였다. 초기 거친 요소로 시작한 해석이 점진적으로 최적의 요소망을 형성하였다. 요소의 형상이 변하지 않기 때문에 수치적분을 통하지 않고 간단한 곱셈만으로 요소행렬을 구할 수 있다. 이동 요소를 사용한 경우와는 달리 기존의 절점이 같은 좌표상에 존재하므로 시간에 따른 물리량의 변화를 관찰하기에 용이하다.

효율적인 요소망을 형성하는 과정을 수치예제를 통하여 보였다. Cavity-flow에서 흐름의 성질이 급격히 변하는 곳에 더 세분화된 요소를 자동적으로 배치하는 과정을 보였다. 구형구조물 주변의 와의 재현을 포함한 흐름의 동특성을 적응적 기법을 통하여 성공적으로 묘사하였다. 해석결과가 오차한계에 따라 민감하게 반응하므로 적절한 오차한계를 선정하는 기법이 추후 연구사항으로 남아 있다.

현재 연구단계에서 개발된 기법들은 실제 바람 문제에 적용하기에는 난류의 존재 또는 바람의 3차원적 특성으로 인한 막대한 계산시간으로 인해 난점이 존재한다. 그러나 제안된 기법은 기본 개념을 크게 변화하지 않고도 실제 바람 문제의 적응적 유한요소 해석 기법에 확장될 수 있다.

감사의 글

본 연구는 초대형 구조시스템 연구센터(STRESS)의 연구비 지원으로 이루어진 것으로, 이에 깊은 감사의 뜻을 전합니다.

참고문헌

Brooks, A.N. and Hughes, T.J.R. (1982), "Streamline Upwind/Petrov-Galerkin Formulations for Convection Dominated Flows with Particular Emphasis on the Incompressible Navier-Stokes Equations", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **32**, 199-259

Choi, C.K. and Park, Y.M. (1989), "Nonconforming transition plate bending elements with variable mid-side nodes", *Comp. and Str.*, **32**(2), 295-304

Choi , C.K. and Park, Y.M. (1992), " Transition Plate-Bending Elements for Compatible Mesh Gradation", *ASCE, Journal of Engineering Mechanics*, Vol. **118**, No. 3, 462-480

Choi, C.K. and Lee, N.H. (1993) "A 3-D Adaptive Mesh Refinement using Variable-node Solid Elements with Nonconforming Modes", Proceedings of Second Asian-Pacific Conference on Computational Mechanics, Sydney, Australia

Choi, C.K. and Lee, Wan-Hoon, (1995), "Transition membrane element with drilling freedom for local mesh refinement", *Structural Engineering and Mechanics*, **3**(1), 75-90

Choi, C.K. and Yu, W.J. (1997), "Variable Node Element for the Adaptive FE Analysis for Incompressible Viscous Flow", *Seventh International Conference on Computing in Civil and Building Engineering*", 19-21, Aug. 1997, Seoul, Korea

Gresho, P.M. et el., (1984), "A Modified Finite Element Method for Solving the Time-Dependent, Incompressible Navier-Stokes Equations. Part 1: Theory", *International Journal for Numerical Method in Fluids*, **4**, 557-598

Gresho, P.M. et el., (1984), "A Modified Finite Element Method for Solving the Time-Dependent, Incompressible Navier-Stokes Equations. Part 2: Applications", *International Journal for Numerical Method in Fluids*, **4**, 619-640

Hughes, T.J.R., Liu, W.K. and Brooks, A. (1979), "Finite Element Analysis of Incompressible Viscous Flows by the penalty Function Formulation", *Journal of Computational Physics*, **30**, 1-60

Hughes, T.J.R. (1987), "The Finite Element Method", Prentice-Hall

Lee, N.H. (1994), "Three-dimensional Adaptive Mesh Refinement Using Variable-node Solid Elements with Nonconforming Modes", Ph. D. Thesis, Department of Civil Engineering, KAIST, Korea

Reddy, J.N. (1982), "On Penalty Function Method in the Finite Element Analysis of Flow Problems", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **2**, 151-171

Reddy, J. N. (1993), "An Introduction to the Finite Element Method", McGraw-Hill

Oden, J.T. at el., (1993), "Progress on adaptive hp-finite element methods for the incompressible Navior-Stokes equations", *Computational Mechanics*, **11**, 421-432

Sampaio P.A.B. et. al, (1993), "Petrov-Galerkin Solutions of the Incompressible Navier-Stokes Equations in Primitive Variables with Adaptive Remeshing", *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, **106**, 143-178

Yoshida, Y. and Nomura, T. (1985), "A Transient solution method for the finite element incompressible Navier-Stokes equations", *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*, **5**, 873-890

Zhu, J.Z. (1987), "Error Estimation, Adaptivity and Multigrid Techniques in the Finite Element Method", *Ph. D. Dissertation*, Univ. of Wales, Swansea

Zienkiewicz, O.C. and Zhu, J.Z. (1987), "A simple error estimation and adaptive procedure for practical engineering analysis", *Int. J. Numerical Method for Engineering*, **28**, 879-891

Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L. (1989), "The Finite Element Method", McGraw-Hill