

이방성 함유체가 포함된 무한고체의 효과적인 탄성해석을 위한 수치해석 방법  
개발

Development of a Numerical Method for Effective Elastic Analysis  
of Unbounded Solids with Anisotropic Inclusions

최 성준\*                      이 정기\*\*  
Sung-Joon Choi              Jung-Ki Lee

ABSTRACT

A volume integral equation method and a mixed volume and boundary integral equation method are presented for the solution of plane elastostatic problems in solids containing orthotropic inclusions and voids. The detailed analysis of the displacement and stress fields are developed for orthotropic cylindrical and elliptic-cylindrical inclusions and voids. The accuracy and effectiveness of the new methods are examined through comparison with results obtained from analytical and boundary integral equation methods. Through the analysis of plane elastostatic problems in unbounded isotropic matrix containing orthotropic inclusions and voids, it is established that these new methods are very accurate and effective for solving plane elastostatic and elastodynamic problems in unbounded solids containing general anisotropic inclusions and voids or cracks.

1. 서론

다수의 함유체(inclusions), 공동(voids) 및 크랙(crack)을 포함하는 이질성분(heterogeneous)으로 된 고체에 외부 하중이 가해질 때 고체 내부에 발생하게 되는 변형 및 응력 계산에 관한 문제는 공학분야에서 매우 중요한 위치를 차지하고 있기 때문에 많은 연구가 이루어지고 있다.

기지(matrix)내에 수많은 개수로 조밀하게 채워진 섬유(fiber), 다수의 공동(voids) 및 크랙(crack)들을 포함하는 섬유 보강 복합재료는 위에서 제기한 문제의 좋은 예가 된다. 이러한 복합재료의 기지와 섬유는 일반적으로 등방성(isotropic) 재료로 이루어 진다. 그러나, SiC/Ti 금속 기지 복합재료에서처럼 Ti 기지는 등방성을 나타내지만 SiC 섬유(fiber)는 강한 이방성(anisotropic)을 나타내는 경우도 있다. 따라서, 복합재료에서의 파괴 메커니즘을 정확히 규명하기 위해서는, 무한 공간을 차지하는 등방성 재료로된 기지에 서로 상호작용을 하는 다수의 등방성 또는 이방성 재료로된 섬유, 공동 및 크랙이 포함되어있는 2차원 무한고체가 무한대에서 하중을 받을 때 고체 내부에 발생하는 변형 및 응력을 정확히 해석하는 연구가 필수적으로 요구된다.

\* 홍익대학교 기계설계학과 석사과정

\*\* 홍익대학교 기계설계학과 조교수

본 논문에서는 이러한 연구를 효과적으로 수행하기 위하여 체적 적분방정식법과 혼합 체적-경계 적분방정식법이라는 새로운 수치해석 방법을 개발하여 2차원 탄성해석을 수행하고, 이 새로운 수치해석 방법들의 정확성 및 효율성을 검증하기 위하여 경계요소법과 비교한다. 아울러, 비교적 단순한 형태의 이방성을 나타내는 직교 이방성 함유체가 포함된 무한고체의 탄성해석 과정을 통하여, 체적 적분방정식법과 혼합 체적-경계 적분방정식법이라는 새로운 수치해석 방법이 복잡한 형태의 이방성을 나타내는 일반적인 이방성 함유체가 포함된 2차원 무한고체의 탄성해석에 매우 효과적인 수치해석 방법임을 입증한다.

## 2. 체적 적분방정식법과 경계요소법

### 2.1. 체적 적분방정식법(Volume Integral Equation Method, VIEM)

Fig. 1은 무한 공간을 차지하는 고체가 무한대에서 외부 하중을 받는 경우의 일반적인 탄성정역학 문제를 보여주고 있다. 기지(matrix)는 무한 공간을 차지하고 균일하며, 함유체들은 일반적으로 균일하지 않다고 가정한다. 함유체들과 기지 사이의 경계면은 변위와 표면력 벡터(traction vector)의 연속성을 보장하는 완전 결합이라고 가정한다.  $c_{ijkl}^{(1)}$ 은 함유체의 탄성상수(elastic tensor)를 나타내고,  $c_{ijkl}^{(2)}$ 은 기지에서의 탄성상수를 나타낸다. 이때 탄성정역학 문제는 파형(elastic wave)의 주파수가 0인 극한 경우의 탄성동역학(elastodynamics) 문제로 수식화 할 수 있으며, Mal과 Knopoff[10]는 고체 내부의 임의의 위치에서의 변위[  $u_m(\mathbf{x})$  ]가 다음의 방정식을

$$u_m(\mathbf{x}) = u_m^o(\mathbf{x}) - \int_R \delta c_{ijkl} g_{i,j}^m(\xi, \mathbf{x}) u_{k,l}(\xi) d\xi \quad (1)$$

만족시킨다는 것을 보였다. 식 (1)에서 적분은 고체의 전체 공간에 대해서 이루어지며,  $\delta c_{ijkl} = c_{ijkl}^{(1)} - c_{ijkl}^{(2)}$ 이고  $g_i^m(\xi, \mathbf{x})$ 은 무한공간을 차지하는 기지에서의 탄성정역학 Green 함수(또는 Kelvin의 해)이다. 즉,  $g_i^m(\xi, \mathbf{x})$ 은  $\mathbf{x}$ 에서  $m$ 방향으로 작용하는 단위 집중하중(unit concentrated force)때문에  $\xi$ 에서 발생하는 변위의  $i$ 방향의 성분을 나타낸다. 식 (1)에서 합의 관계(summation convention)와 쉼표 표기(comma notation)가 사용되었으며, 미분은 적분 변수,  $\xi_i$ 에 관해서 행해진다. 여기서, 피 적분함수(integrand)가 함유체 내부에서만 0이 아니라는 사실을 주목해야 한다.

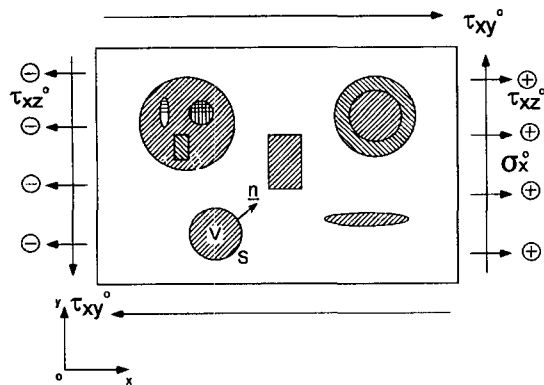


Fig. 1. Geometry of the general elastostatic problem.

만약에,  $\mathbf{x}$ 가 함유체 내부에 속하면, 식 (1)은 함유체 내부에서의 미정(unknown) 변위벡터(displacement vector)  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 에 관한 적분-미분 방정식(integro-differential equation)이 된다. 따라서, 함유체 내부를 표준의 유한요소들을 사용해서 분할하여 함유체 내부에서의  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 를 결정하는 수치해석 방법으로 체적 적분방정식법이 개발되었다.[6, 7] 일단 함유체 내부에서의  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 가 결정되면, 변형률 및 응력을 구할 수 있게되고, 함유체 외부에서의 변형, 변형률, 응력은 식 (1)의 적분 값을 구함으로써 얻을 수 있다. 체적 적분방정식법에 대한 자세한 기술은 이정기와 Mal [6, 7]에 잘 나타나 있다.

### 2.1.1 직교 이방성 함유체를 포함하는 무한 등방성 기지 해석

$x_1, x_2, x_3$ 축은 직교 이방성 대칭축에 평행하다고 가정한다. 2차원(plane-strain) 직교 이방성 재료에 대한 단축된(reduced) 형태의 응력(stress)과 변형률(strain)의 관계는 다음과 같다.[1, 5, 14]

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{26} \\ c_{16} & c_{26} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (2)$$

여기서,

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{26} \\ c_{16} & c_{26} & c_{66} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta c} \begin{bmatrix} E_1(1-\nu_{13}\nu_{31}) & E_2(\nu_{12}+\nu_{32}\nu_{13}) & 0 \\ E_1(\nu_{21}+\nu_{23}\nu_{31}) & E_2(1-\nu_{31}\nu_{13}) & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{66} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$\Delta c = 1 - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{13}\nu_{31} - \nu_{12}\nu_{21} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}$$

$E_1, E_2, E_3$ 는 좌표축  $x(x_1), y(x_2), z(x_3)$ 이 각각 직교 이방성 대칭축에 평행하게 놓여 있다고 가정할 때, 서로 대응되는 좌표축에서의 탄성계수(Young's modulus)를 나타내며,  $\mu_{66}$ 는  $x(x_1), y(x_2)$  평면에서의 전단계수를 나타낸다.  $\nu_{ij}$ 는  $i$ 방향에서 응력을 받을 때  $j$ 방향에서의 횡변형률에 대한 포와송비를 나타내며,

$$\nu_{ij} = -\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i} \quad (\sigma_i = \sigma, \text{ 그 외의 응력 성분이 0일 때}) \quad (4)$$

이다. 또한,

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j}, \quad (i, j=1,2,3.) \quad (5)$$

의 관계가 성립한다.

Fig. 1에 나타나 있는 일반적인 2차원(plane-strain) 탄성정역학 문제에 대하여, 체적 적분방정식 (1)은

$$u_1(\mathbf{x}) = u_1^0(\mathbf{x}) - \int_R \left\{ [\delta c_{11}g_{1,1}^1 u_{1,1} + \delta c_{12}g_{1,1}^1 u_{2,2} + \delta c_{66}g_{1,2}^1 (u_{1,2} + u_{2,1})] \right. \\ \left. + [\delta c_{22}g_{2,2}^1 u_{2,2} + \delta c_{21}g_{2,2}^1 u_{1,1} + \delta c_{66}g_{2,1}^1 (u_{1,2} + u_{2,1})] \right\} d\xi_1 \xi_2 \quad (6)$$

와

$$u_2(\mathbf{x}) = u_2^0(\mathbf{x}) - \int_R \left\{ [\delta c_{11}g_{1,1}^2 u_{1,1} + \delta c_{12}g_{1,1}^2 u_{2,2} + \delta c_{66}g_{1,2}^2 (u_{1,2} + u_{2,1})] \right. \\ \left. + [\delta c_{22}g_{2,2}^2 u_{2,2} + \delta c_{21}g_{2,2}^2 u_{1,1} + \delta c_{66}g_{2,1}^2 (u_{1,2} + u_{2,1})] \right\} d\xi_1 \xi_2 \quad (7)$$

로 표시되며,  $u_1(\mathbf{x})$ 와  $u_2(\mathbf{x})$ 는 고체의 임의의 위치에서의 변위 성분을 나타낸다. 체적 적분방정식법에서는 직교 이방성 함유체( $c_{11}, c_{12}, c_{22}, c_{66}$ )와 등방성 기지( $\lambda_1, \mu_1$ )의 물질 특성치(material properties)의 차이, 즉,  $\delta c_{11} = c_{11} - (\lambda_1 + 2\mu_1)$ ,  $\delta c_{22} = c_{22} - (\lambda_1 + 2\mu_1)$ ,  $\delta c_{12} = c_{12} - \lambda_1$ , 그리고  $\delta c_{66} = c_{66} - \mu_1$ 이 필요하게 된다.

식(6), (7)에서  $g_i^m$ 은 무한 공간을 차지하는 등방성 기지에서의 Green 함수이다. 일반적으로 이방성 재료에서의 Green 함수는 등방성 재료의 경우와 비교해 볼 때 복잡한 형태로 나타난다. 특히, 탄성동역학 문제에서는 이방성 재료에 대한 Green 함수를 닫힌형(closed form) 형태로 구하는 것이 불가능하거나 불가능하지는 않더라도 매우 어려운 문제가 된다는 점을 주목해야 한다. 따라서, 체적 적분방정식법에서는 이러한 복잡한 형태를 갖는 일반적인 이방성 함유체의 Green 함수를 필요로 하지 않는다는 장점이 있다.

## 2.2. 경계요소법 (Boundary Integral Equation Method, BIEM)

직교 이방성 함유체의 바깥면( $S_+$ )에서의 적분 방정식은

$$u_m(\mathbf{x}) = u_m^o(\mathbf{x}) + c_{ijkl}^{(M)} \int_{S_+} [g_{k,l}^{m(M)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})u_l(\boldsymbol{\xi}) - g_i^{m(M)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})u_{k,l}(\boldsymbol{\xi})]n_j dS \quad (8)$$

로 표시되고, 반면에 안쪽면( $S_-$ )에서는

$$u_m(\mathbf{x}) = -c_{ijkl}^{(I)} \int_{S_-} [g_{k,l}^{m(I)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})u_l(\boldsymbol{\xi}) - g_i^{m(I)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})u_{k,l}(\boldsymbol{\xi})]n_j dS \quad (9)$$

로 표시된다. [1, 11] 식 (8), (9)에서  $\mathbf{n}$ 은  $S_+$ 에서의 바깥쪽 법선 방향의 단위 벡터이고, 윗첨자 (M)과 (I)는 각각 등방성 기지와 이방성 함유체에 대한 양(quantity)을 나타낸다. 식 (8), (9)는 경계면 S에서의 연속성 조건과 함께  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 에 대한 경계 적분방정식을 구성한다. 함유체가 공동이 되면, 적분 방정식은 다음의 표준 경계 적분방정식으로 축소된다.

$$u_m(\mathbf{x}) = u_m^o(\mathbf{x}) + c_{ijkl}^{(M)} \int_S g_{k,l}^{m(M)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})u_l(\boldsymbol{\xi})n_j dS \quad (10)$$

### 2.2.1 직교 이방성 함유체를 포함하는 무한 등방성 기지 해석

직교 이방성 함유체의 바깥면( $S_+$ )에서의 적분 방정식은

$$\begin{aligned} u_1(\mathbf{x}) &= u_1^o(\mathbf{x}) - \int_{S_+} [g_1^{1(M)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})t_1(\boldsymbol{\xi}) + g_2^{1(M)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})t_2(\boldsymbol{\xi}) - T_1^{1(M)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})u_1(\boldsymbol{\xi}) - T_2^{1(M)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})u_2(\boldsymbol{\xi})]dS(\boldsymbol{\xi}) \\ u_2(\mathbf{x}) &= u_2^o(\mathbf{x}) - \int_{S_+} [g_1^{2(M)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})t_1(\boldsymbol{\xi}) + g_2^{2(M)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})t_2(\boldsymbol{\xi}) - T_1^{2(M)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})u_1(\boldsymbol{\xi}) - T_2^{2(M)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})u_2(\boldsymbol{\xi})]dS(\boldsymbol{\xi}) \end{aligned} \quad (11)$$

로 표시된다.  $g_\alpha^{\beta(M)}$ 은 무한 등방성 기지에 대한 Green 함수[1]이고 다음과 같이 주어진다.

$$g_\alpha^{\beta(M)} = \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \left[ -\frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \ln r \delta_{\alpha\beta} + r_{,\alpha} r_{,\beta} \right] \quad (12)$$

여기서,  $r = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|$ ,  $\alpha, \beta = 1, 2$  그리고  $\lambda, \mu$ 는 무한 등방성 기지에서의 Lamé 상수를 나타낸다. 또한, 무한 등방성 기지에서의 Green 함수에 대한 표면력 벡터  $T_\alpha^{\beta(M)}$  ( $\alpha, \beta = 1, 2$ )은

$$\begin{aligned} T_1^{1(M)} &= (\lambda + 2\mu)g_{1,1}^{1(M)} n_1 + \lambda g_{2,2}^{1(M)} n_1 + \mu(g_{1,2}^{1(M)} + g_{2,1}^{1(M)}) n_2 \\ T_1^{2(M)} &= (\lambda + 2\mu)g_{1,1}^{2(M)} n_1 + \lambda g_{2,2}^{2(M)} n_1 + \mu(g_{1,2}^{2(M)} + g_{2,1}^{2(M)}) n_2 \\ T_2^{1(M)} &= (\lambda + 2\mu)g_{2,2}^{1(M)} n_2 + \lambda g_{1,1}^{1(M)} n_2 + \mu(g_{1,2}^{1(M)} + g_{2,1}^{1(M)}) n_1 \\ T_2^{2(M)} &= (\lambda + 2\mu)g_{2,2}^{2(M)} n_2 + \lambda g_{1,1}^{2(M)} n_2 + \mu(g_{1,2}^{2(M)} + g_{2,1}^{2(M)}) n_1 \end{aligned} \quad (13)$$

로 주어지고,

$$\begin{aligned} t_1 &= (\lambda + 2\mu)u_{1,1}n_1 + \lambda u_{2,2}n_1 + \mu(u_{1,2} + u_{2,1})n_2 \\ t_2 &= (\lambda + 2\mu)u_{2,2}n_2 + \lambda u_{1,1}n_2 + \mu(u_{1,2} + u_{2,1})n_1 \end{aligned} \quad (14)$$

이 된다.

한편, 직교 이방성 함유체의 안쪽면( $S_-$ )에서의 적분 방정식은

$$\begin{aligned} u_1(\mathbf{x}) &= \int_{S_-} [g_1^{1(D)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})t_1(\boldsymbol{\xi}) + g_2^{1(D)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})t_2(\boldsymbol{\xi}) - T_1^{1(D)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})u_1(\boldsymbol{\xi}) - T_2^{1(D)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})u_2(\boldsymbol{\xi})]dS(\boldsymbol{\xi}) \\ u_2(\mathbf{x}) &= \int_{S_-} [g_1^{2(D)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})t_1(\boldsymbol{\xi}) + g_2^{2(D)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})t_2(\boldsymbol{\xi}) - T_1^{2(D)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})u_1(\boldsymbol{\xi}) - T_2^{2(D)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})u_2(\boldsymbol{\xi})]dS(\boldsymbol{\xi}) \end{aligned} \quad (15)$$

로 표시된다.  $g_a^{\beta(D)}$ 와  $T_a^{\beta(D)}$  ( $\alpha, \beta = 1, 2$ )는 각각 직교 이방성 함유체에 대한 Green 함수와 표면력 벡터를 나타내며, 이에 대한 자세한 설명은 아래에 주어진다.

$x_1, x_2, x_3$ 축은 직교 이방성 대칭축에 평행하다고 가정한다. 2차원(plane-strain) 직교 이방성 재료에 대한 단축된(reduced) 형태의 변형률(strain)과 응력(stress)의 관계는 다음과 같다.[1, 5, 14]

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{16} \\ b_{12} & b_{22} & b_{26} \\ b_{16} & b_{26} & b_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (16)$$

여기서,

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{16} \\ b_{12} & b_{22} & b_{26} \\ b_{16} & b_{26} & b_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1 - \nu_{31}\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13}}{E_1} & \frac{1 - \nu_{32}\nu_{23}}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\mu_{66}} \end{bmatrix} \quad (17)$$

으로 나타낸다.

직교 이방성 함유체에 대한 Green 함수[1, 4, 12, 13]는

$$\begin{aligned} g_1^{1(D)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) &= -2 [A_{11}B_{11} \ln r_1 + A_{12}B_{12} \ln r_2] \\ g_1^{2(D)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) &= -2i \left[ A_{11}B_{21} \tan^{-1}\left(\frac{y_1}{x}\right) + A_{12}B_{22} \tan^{-1}\left(\frac{y_2}{x}\right) \right] \\ g_2^{1(D)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) &= -2i \left[ A_{21}B_{11} \tan^{-1}\left(\frac{y_1}{x}\right) + A_{22}B_{12} \tan^{-1}\left(\frac{y_2}{x}\right) \right] = g_1^{2(D)} \\ g_2^{2(D)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) &= -2 [A_{21}B_{21} \ln r_1 + A_{22}B_{22} \ln r_2] \end{aligned} \quad (18)$$

로 표시되며, 복소상수 [A]와 [B]는

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}\mu_1^2 + b_{12} & b_{11}\mu_2^2 + b_{12} \\ b_{12}\mu_1 + b_{22}/\mu_1 & b_{12}\mu_2 + b_{22}/\mu_2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-A_{22}}{\mu_1 A_{22} - \mu_2 A_{21}} \cdot \frac{i}{4\pi} & \frac{A_{21}}{\mu_1 A_{22} - \mu_2 A_{21}} \cdot \frac{i}{4\pi} \\ \frac{-A_{12}}{A_{11} - A_{12}} \cdot \frac{i}{4\pi} & \frac{A_{11}}{A_{11} - A_{12}} \cdot \frac{i}{4\pi} \end{bmatrix} \quad (20)$$

로 정의되고,  $i = \sqrt{-1}$ 이다.

또한,  $r = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|$  일 때,

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= \mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\xi}_1, \\
y_1 &= \tilde{\mu}_1 (x_2 - \xi_2), \quad y_2 = \tilde{\mu}_2 (x_2 - \xi_2), \\
r_1 &= \sqrt{x^2 + y_1^2}, \quad r_2 = \sqrt{x^2 + y_2^2}
\end{aligned} \tag{21}$$

이고

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= \frac{a_\mu + ib_\mu}{\sqrt{2b_{11}}} = \tilde{\mu}_1 i \\
\mu_2 &= \frac{-a_\mu + ib_\mu}{\sqrt{2b_{11}}} = \tilde{\mu}_2 i
\end{aligned} \tag{22}$$

로 나타난다. 여기서, 주목해야 할 것은  $\mu_1, \mu_2$ 는 복소수이고,  $\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2$ 는 실수이다. 또한,

$$\begin{aligned}
a_\mu &= (\sqrt{b_{11}b_{22}} - b_{12} - b_{66}/2)^{1/2} \\
b_\mu &= (\sqrt{b_{11}b_{22}} + b_{12} + b_{66}/2)^{1/2}
\end{aligned} \tag{23}$$

로 정의된다.

직교 이방성 함유체에서의 Green 함수에 대한 표면력 벡터  $T_\alpha^{(\beta)}$  ( $\alpha, \beta = 1, 2$ )는

$$\begin{aligned}
T_1^{1(\alpha)} &= -2c_{11}n_1 \left\{ \frac{A_{11}B_{11}x}{r_1^2} + \frac{A_{12}B_{12}x}{r_2^2} \right\} - 2ic_{12}n_1 \left\{ \frac{A_{21}B_{11}\tilde{\mu}_1x}{r_1^2} + \frac{A_{22}B_{12}\tilde{\mu}_2x}{r_2^2} \right\} \\
&\quad - 2c_{66}n_2 \left\{ \left[ \frac{A_{11}B_{11}\tilde{\mu}_1y_1}{r_1^2} + \frac{A_{12}B_{12}\tilde{\mu}_2y_2}{r_2^2} \right] - i \left[ \frac{A_{21}B_{11}y_1}{r_1^2} + \frac{A_{22}B_{12}y_2}{r_2^2} \right] \right\} \\
T_1^{2(\alpha)} &= -2ic_{11}n_1 \left\{ \frac{A_{11}B_{21}y_1}{r_1^2} + \frac{A_{12}B_{22}y_2}{r_2^2} \right\} - 2c_{12}n_1 \left\{ \frac{A_{21}B_{21}\tilde{\mu}_1y_1}{r_1^2} + \frac{A_{22}B_{22}\tilde{\mu}_2y_2}{r_2^2} \right\} \\
&\quad - 2c_{66}n_2 \left\{ \left[ \frac{A_{21}B_{21}x}{r_1^2} + \frac{A_{22}B_{22}x}{r_2^2} \right] + i \left[ \frac{A_{11}B_{21}\tilde{\mu}_1x}{r_1^2} + \frac{A_{12}B_{22}\tilde{\mu}_2x}{r_2^2} \right] \right\} \\
T_2^{1(\alpha)} &= -2ic_{22}n_2 \left\{ \frac{A_{21}B_{11}\tilde{\mu}_1x}{r_1^2} + \frac{A_{22}B_{12}\tilde{\mu}_2x}{r_2^2} \right\} - 2c_{21}n_2 \left\{ \frac{A_{11}B_{11}x}{r_1^2} + \frac{A_{12}B_{12}x}{r_2^2} \right\} \\
&\quad - 2c_{66}n_1 \left\{ \left[ \frac{A_{11}B_{11}\tilde{\mu}_1y_1}{r_1^2} + \frac{A_{12}B_{12}\tilde{\mu}_2y_2}{r_2^2} \right] - i \left[ \frac{A_{21}B_{11}y_1}{r_1^2} + \frac{A_{22}B_{12}y_2}{r_2^2} \right] \right\} \\
T_2^{2(\alpha)} &= -2c_{22}n_2 \left\{ \frac{A_{21}B_{21}\tilde{\mu}_1y_1}{r_1^2} + \frac{A_{22}B_{22}\tilde{\mu}_2y_2}{r_2^2} \right\} + 2ic_{21}n_2 \left\{ \frac{A_{11}B_{21}y_1}{r_1^2} + \frac{A_{12}B_{22}y_2}{r_2^2} \right\} \\
&\quad - 2c_{66}n_1 \left\{ \left[ \frac{A_{21}B_{21}x}{r_1^2} + \frac{A_{22}B_{22}x}{r_2^2} \right] + i \left[ \frac{A_{11}B_{21}\tilde{\mu}_1x}{r_1^2} + \frac{A_{12}B_{22}\tilde{\mu}_2x}{r_2^2} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{24}$$

로 주어지고,

$$\begin{aligned}
t_1 &= c_{11}u_{1,1}n_1 + c_{12}u_{2,2}n_1 + c_{66}(u_{1,2} + u_{2,1})n_2 \\
t_2 &= c_{22}u_{2,2}n_2 + c_{12}u_{1,1}n_2 + c_{66}(u_{1,2} + u_{2,1})n_1
\end{aligned} \tag{25}$$

이 된다. 여기서,  $n_1, n_2$ 는  $S_+$ 에서의 바깥쪽 법선 방향의 단위 벡터 성분을 나타내고,  $c_{11}, c_{12}, c_{22}$ 와  $c_{66}$ 은 직교 이방성 함유체에서의 단축된 형태의 탄성상수들을 나타낸다.

관측점(observation point)이 경계면에 도달하면, 식 (11), (15)의  $u_1(\mathbf{x})$ 과  $u_2(\mathbf{x})$ 는 매끄러운 경계면에서는  $\frac{1}{2}u_1(\mathbf{x})$ 과  $\frac{1}{2}u_2(\mathbf{x})$ 로 바뀌게 되고, 도함수(derivatives)는 Cauchy Principal Value(주치)의 의미로 해석해야 된다. 경계면에서 연속성 조건을 적용하고, 분할하게 되면, 경계면에서의 변위와 표면력 벡터에 대한 네개의 결합된(coupled) 연립 대수방정식을 얻게된다. 일단 경계면에서의 변위와 표면력 벡터(traction vector)를 알게되면, 경계면외의 모

든 곳에서의 변위, 변형률 및 응력은 식 (11), (15)의 적분 값을 구함으로써 계산할 수 있다.

### 2.3. 특이에 대한 수치 해석 처리

$\mathbf{x} = \xi$ 에서, 등방성 기지의 Green 함수는  $\ln(r)$  형태의 특이(singularity)를 갖게 되고, 직교 이방성 함유체의 Green 함수는  $\ln(r_i)$ , ( $i = 1, 2$ ) 형태의 특이를 갖는다. 또한, Green 함수에 대한 표면력 벡터인  $T^m$ 은 등방성 기지의 경우에는  $\frac{1}{r}$  형태의 특이를 갖고, 직교 이방성 함유체의 경우에는  $\frac{1}{r_i}$ , ( $i = 1, 2$ ) 형태의 특이를 갖는다. 이와같은 특이를 처리하기 위하여 직접 적분기법(direct integration scheme) [2, 8, 9]이 사용되었다.

### 3. 단일 함유체 문제

Fig. 2에 있는 무한공간을 차지하는 등방성 기지에 단일의 직교 이방성 실린더(cylinder) 형태나 타원 실린더(elliptic-cylinder) 형태의 함유체가 포함되어 있는 무한고체가 무한대에서 인장하중 ( $\sigma_0$ )을 받는 경우를 고찰해 본다. Fig. 2에서 a는 장축에서의 반지름을 나타내고 b는 단축에서의 반지름을 나타낸다. 세가지 다른 비율( $b/a = 1.0, 0.75$ 와  $0.50$ )을 갖는 직교 이방성 함유체에 대하여 고려해 본다. 이때, 장축의 반지름 a는  $70\mu\text{m}$ 로 가정한다. 이 문제 해석에 사용된 기지와 직교 이방성 함유체의 물질 특성치는 Table 1에 나타나 있다. 두가지 다른 탄성상수들을 갖는 직교 이방성 함유체에 대하여 고려해 본다; 직교 이방성 함유체 #1(Orthotropic #1)의  $c_{11}$ 은 등방성 기지의  $c_{11}$ 보다 크고, 직교 이방성 함유체 #2(Orthotropic #2)의  $c_{11}$ 은 등방성 기지의  $c_{11}$ 보다 작다.[3]

Fig. 3은 체적 적분방정식법에 사용되어진 대표적인 분할된 모델의 예이고, Fig. 4는 경계요소법에 사용되어진 대표적인 분할된 모델의 예이다. 체적 적분방정식법에서는 표준의 8-node 사각형 요소와 6-node 삼각형 요소가 사용되었으며, 경계요소법에는 표준의 2차 경계요소(quadratic element)가 사용되었다. 체적 적분방정식법에 사용된 요소의 수는 144개이며, 경계요소법에 사용된 요소의 수는 80개이다. 이 문제에 대한 해석해[5, 14]와 수치해석 방법들로부터 구해진 해를 비교함으로써 수치해석 해들의 정확도를 조사해 보았다.

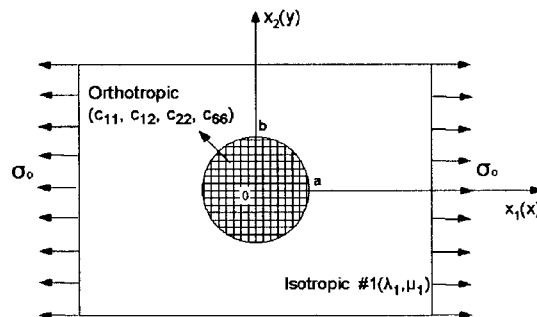


Fig. 2. An orthotropic inclusion in unbounded isotropic matrix under uniform remote tensile loading.

Table 1. Material properties of the isotropic matrix and the orthotropic inclusions.

(Unit: GPa)	Isotropic Matrix (#1)	Orthotropic Inclusion	
		#1	#2
$\lambda$	67.34		
$\mu$	37.88		
$c_{11}$	143.10	279.08	13.95
$c_{12}$	67.34	7.80	0.39
$c_{22}$	143.10	30.56	1.53
$c_{66}$	37.88	11.80	0.59

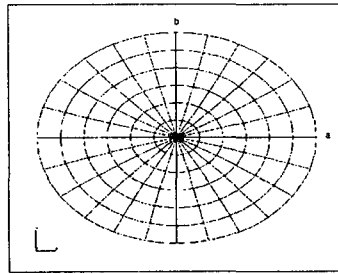


Fig. 3. A typical discretized model in the volume integral equation method.

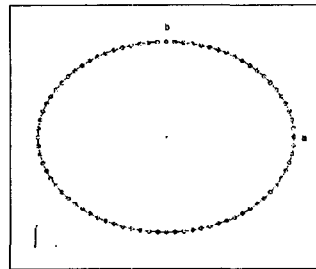


Fig. 4. A typical discretized model in the boundary integral equation method.

Table 2는 등방성 기지와 각기 다른 재료 및 형태(실린더 및 타원 실린더)를 갖는 직교 이방성 함유체로 이루어진 무한고체가 무한대에서 인장하중을 받을 때 함유체 내부에 발생하는 표준화된 인장응력 성분( $\frac{\sigma_x}{\sigma_0}$ )에 대한 수치해석 해와 해석해와의 비교를 나타낸다. 이때, 실린더 및 타원 실린더 형태의 직교 이방성 함유체 내부에서의 인장응력 성분은 일정한 값을 갖게 된다.[5, 14] 두 가지 수치해석 방법들의 해들과 해석해가 서로 잘 일치됨을 알 수 있다.

#### 4. 혼합 체적-경계 적분방정식법 (Mixed Volume and Boundary Integral Equation Method)

Fig. 5에 있는 직교 이방성 함유체(Orthotropic #1)와 공동(hole)이 등방성 기지(Isotropic #1)에 포함되어 있는 무한고체가 무한대에서 인장하중을 받는 경우를 고찰해 본다. 이 경우는 직교 이방성 함유체에 대하여는 체적 적분방정식법을 적용하고, 공동에 대하여는 경계



Table 2. Normalized tensile stress component ( $\sigma_x/\sigma_x^0$ ) within the orthotropic cylindrical and elliptic-cylindrical inclusion due to uniform remote tensile loading ( $\sigma_x^0$ ). a and b are the radius of major and minor axis of the inclusion, respectively.

	Isotropic Matrix (#1) with Orthotropic Inclusion (#1)			Isotropic Matrix (#1) with Orthotropic Inclusion (#2)
	b/a=1	b/a=0.75	b/a=0.50	b/a=1
Exact	1.2388	1.3051	1.4206	0.2980
VIEM	1.2389	1.3054	1.4213	0.2979
BIEM	1.2397	1.3049	1.4245	0.2986

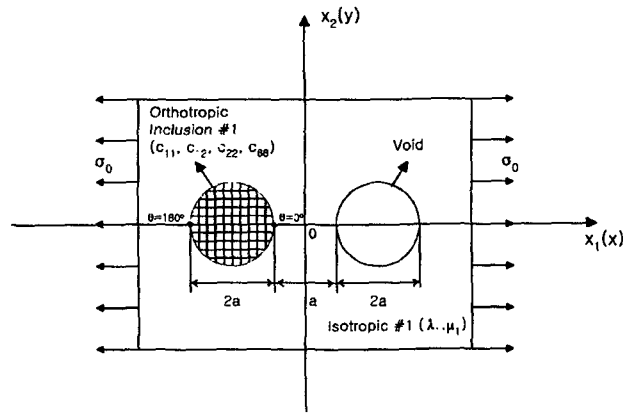


Fig. 5. An orthotropic cylindrical inclusion and a cylindrical void in unbounded isotropic matrix under uniform remote tensile loading.

요소법을 적용하는 혼합 체적-경계 적분방정식법이 최적의 수치해석 방법임을 알 수 있다. 왜냐하면, 직교 이방성 함유체에 체적 적분방정식법을 적용하면 직교 이방성 재료에 대한 Green 함수를 필요로 하지 않는다는 장점이 있고, 공동에 경계요소법을 적용하면 분할요소의 수를 줄일 수 있으며, 또한, 공동의 경계면에서 표면력 벡터가 0이 된다는 사실을 이용할 수 있기 때문이다.

#### 4.1 등방성 기지에 직교 이방성 함유체와 공동이 포함되어 있는 무한고체의 탄성해석

식(1)을 응용하면, 직교 이방성 함유체와 공동을 포함하는 무한고체에 대하여 혼합 체적-경계 적분방정식을

$$u_m(\mathbf{x}) = u_m^0(\mathbf{x}) - \int_V \delta c_{ijkl} g_{k,l}^{m(M)}(\xi, \mathbf{x}) u_{i,j}(\xi) d\xi + \int_S c_{ijkl}^{(M)} g_{k,l}^{m(M)} u_i n_j dS \quad (26)$$

로 표시할 수 있다. 여기서,  $u_m(\mathbf{x})$ 는 고체의 임의의 위치에서의 변위성분을 나타내고,  $V$ 는 직교 이방성 함유체의 체적을 나타내며  $S$ 는 공동의 경계면을 나타낸다.  $\mathbf{n}$ 은  $S$ 에서의 바깥쪽 법선방향의 단위 벡터이고, 윗첨자  $(M)$ 은 등방성 기지(Isotropic #1)에 대한 양(quantity)을 나타낸다.

Fig. 6은 혼합 체적-경계 적분방정식법에 사용되어진 대표적인 분할된 모델의 예이다. 직교 이방성 함유체는 144개의 표준의 8-node 사각형 및 6-node 삼각형 유한요소를 사용하여 분할하였고, 공동의 경계면은 80개의 2차 경계요소를 사용하여 분할하였다. 이때, 직교 이방성 함유체의 분할된 절점(node)과 공동의 경계면의 절점(node)에서의 변위에 대한 선형 연립방정식은 다

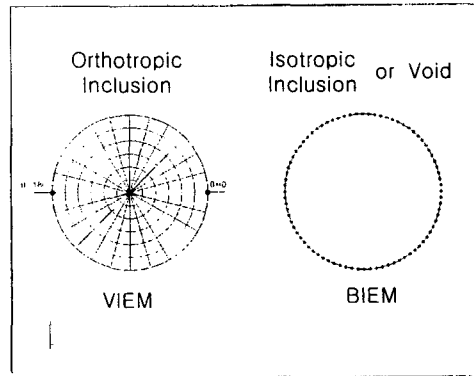


Fig. 6. A typical discretized model in the mixed volume and boundary integral equation method.

음과 같이 구해진다.

$$\begin{bmatrix} [E]_{[(m+n) \times (m+n)]} & [F]_{[(m+n) \times (m+n)]} \\ [G]_{[(m+n) \times (m+n)]} & [H]_{[(m+n) \times (m+n)]} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_1\}_{(m)} \\ \{u_1\}_{(n)} \\ \{u_2\}_{(m)} \\ \{u_2\}_{(n)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\{u_1^0\}_{(m)} \\ -\{u_1^0\}_{(n)} \\ -\{u_2^0\}_{(m)} \\ -\{u_2^0\}_{(n)} \end{Bmatrix} \quad (27)$$

여기서,

$$[E]_{[(m+n) \times (m+n)]} = \begin{bmatrix} [[VV]-[I]]_{(m \times m)} & [VB]_{(m \times n)} \\ [BV]_{(n \times m)} & [[BB]-\frac{1}{2}[I]]_{(n \times n)} \end{bmatrix} \quad (27-1)$$

$$[F]_{[(m+n) \times (m+n)]} = \begin{bmatrix} [VV]_{(m \times m)} & [VB]_{(m \times n)} \\ [BV]_{(n \times m)} & [BB]_{(n \times n)} \end{bmatrix} \quad (27-2)$$

$$[G]_{[(m+n) \times (m+n)]} = \begin{bmatrix} [VV]_{(m \times m)} & [VB]_{(m \times n)} \\ [BV]_{(n \times m)} & [BB]_{(n \times n)} \end{bmatrix} \quad (27-3)$$

$$[H]_{[(m+n) \times (m+n)]} = \begin{bmatrix} [[VV]-[I]]_{(m \times m)} & [VB]_{(m \times n)} \\ [BV]_{(n \times m)} & [[BB]-\frac{1}{2}[I]]_{(n \times n)} \end{bmatrix} \quad (27-4)$$

으로 나타난다.  $[m+n]$  = 직교 이방성 함유체의 절점(node) 수  $[m]$  + 공동의 경계면 (S)에서의 절점수  $[n]$ 을 나타낸다.  $[VV]$ 는 직교 이방성 함유체 내부에서의 상호작용(interaction)을,

$[VB]$ 는 직교 이방성 함유체와 공동의 경계면 (S)과의 상호 작용을,  $[BV]$ 는 공동의 경계면 (S)과 직교 이방성 함유체와의 상호작용을, 그리고  $[BB]$ 는 공동의 경계면 (S)에서의 상호 작용을 포함하는 행렬(matrix)들을 각각 나타낸다.

따라서, 식 (27)로부터 직교 이방성 함유체 내부에서의 변위 및 공동의 경계면에서의 변위를 구할 수 있고, 또한, 직교 이방성 함유체 내부에서의 변형률과 응력도 결정될 수 있다. 그 외의 모든 곳에서의 변형, 변형률 및 응력은 식 (26)의 적분 값을 구함으로써 얻을 수 있다. 이 수치 해석 방법의 정확도를 조사하기 위하여, 직교 이방성 함유체 및 공동 모두에 체적 적분방정식법을 사용한 해를 구하여, 혼합 체적-경계 적분방정식법에 의한 해와 비교 검토해 보았다.

Fig. 7은 체적 적분방정식법에 사용되어진 대표적인 분할된 모델의 예이다.

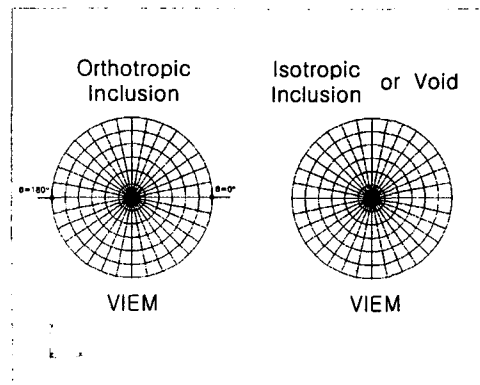


Fig. 7. A typical discretized model in the volume integral equation method.

Fig. 8은 혼합 체적-경계 적분방정식법과 체적 적분방정식법을 사용했을 때, 직교 이방성 함유체(Orthotropic #1)와 등방성 기지(Isotropic #1)의 경계면에서의 표준화된 인장응력 성분 ( $\frac{\sigma_x}{\sigma_0}$ )에 대한 비교를 나타낸다 ( $\theta = 0^\circ \sim 180^\circ$ ). 두 가지 수치해석 방법들의 해가 서로 잘 일치됨을 알 수 있다.

## 5. 결론

무한 공간을 차지하는 등방성 기지에 실린더 형태나 타원 실린더 형태의 단일의 직교 이방성 함유체가 포함되어 있는 무한 고체에 무한대에서 하중이 작용할 때 고체 내부에 발생하는 변위 및 응력을 해석하는 수치해석 방법으로 체적 적분방정식법과 경계요소법을 고찰해 보았다. 경계요소법에서는 이방성 함유체에서의 Green 함수가 정의되어야만 문제해석이 가능한 반면, 체적 적분방정식법에서는 복잡한 형태의 이방성 함유체에 대한 Green 함수를 구하지 않고서도 정확한 해를 구할 수 있었다.

또한 무한 공간을 차지하는 등방성 기지에 직교 이방성 함유체와 공동이 포함되어 있는 무한 고체가 무한대에서 하중을 받을 때 고체 내부에 발생하는 변위 및 응력을 해석하는 최적의 수치해석 방법으로 혼합 체적-경계 적분방정식법이 개발되었다. 이 방법을 사용하면 이방성 함유체에 대하여는 체적 적분방정식법을 적용함으로써 이방성 함유체의 Green 함수를 구할 필요가 없는 장점이 있고, 공동에 대하여는 경계요소법을 사용함으로써 분할요소의 수를 줄일 수 있으며, 또한, 공동의 경계면에서 표면력 벡터가 0이 된다는 사실을 이용할 수 있기 때문이다. 혼합 체적-경계 적분방정식법을 적용하여 구한 해의 정확성을 조사하기 위하여 체적 적분방정식법만을 적용한 해와 비교해 보았으며, 두 가지 수치해석 방법들의 해들이 서로 잘 일치됨을 알 수 있었다.

아울러, 비교적 단순한 형태의 이방성을 나타내는 직교 이방성 함유체가 포함된 무한고체의 탄성해석 과정을 통하여, 체적 적분방정식법과 혼합 체적-경계 적분방정식법이라는 새로운 수치해석 방법이, 복잡한 형태의 이방성을 나타내는 일반적인 이방성 함유체가 포함된 2차원 무한고체의 탄성해석에 매우 효과적인 수치해석 방법임을 입증하였다.

## 참고문헌 (생략)

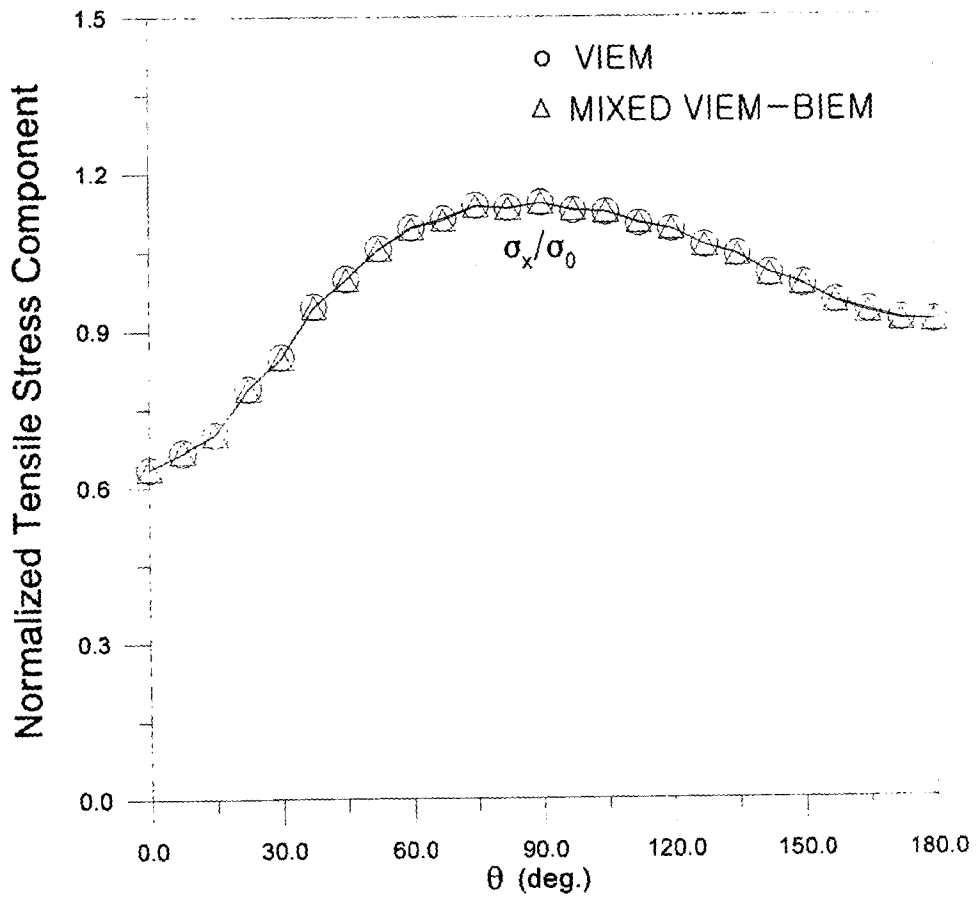
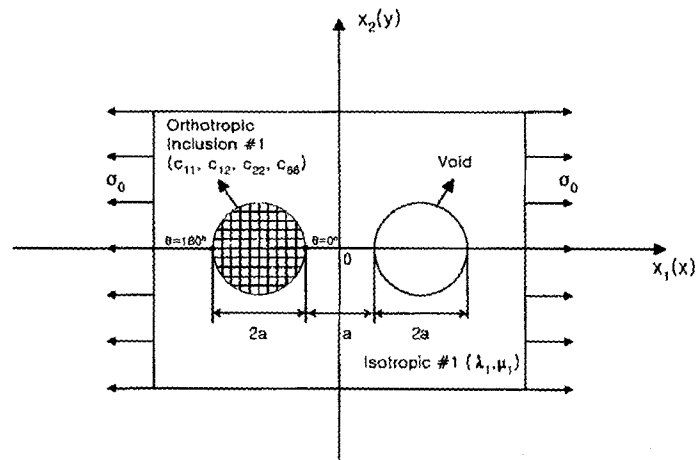


Fig. 8. Normalized tensile stress component ( $\sigma_x / \sigma_0^0$ ) at the interface between the orthotropic inclusion and the isotropic matrix under uniform remote tensile loading ( $\sigma_0^0$ ).