

관측기 설계에 의한 시간지연 시스템의 강인한 제어

김정원* 이장명*
* 부산대학교 전자공학과

Robust control of input time delay systems by observer design

Jeong-Won Kim* and Jang-Myung Lee*
* Dept. of Electronics Engineering, Pusan University

Abstract

Most of time delay existing in industrial processes can be modeled as an input time-delay which causes a lot of difficulties. To implement a time-delay free control, loop transfer function is recovered through the direct state feedback. For the proper state feedback, an observer is designed based upon the factorization approach which is known as one of the most powerful tool for the design of various control systems. The design scheme is practically applied for the control of a DC motor which suffers from input time-delay. Simulational results demonstrate that this new algorithm guarantees the stability of the time-delayed system, as well as performance improvement compared to the conventional PI control.

I. 서론

시스템이 선형, 시불변이라고 가정하며, 다음의 기호들을 사용한다.

R : 실수 행렬체(real matrices)

R(s) : 유리식 전달함수 행렬체

H_∞ : 안정하고, proper(분모의 차수 \geq 분자의 차수)한 전달함수 행렬의 공간

I : unity 행렬

전달함수 행렬 $G(s) = G_0(s) e^{-s\tau}$ 를 생각한다. 여기서 $G_0(s) \in \mathbf{R}(s)$ 은 상태공간실현 $G(s) = C(sI - A)^{-1}Be^{-s\tau}$ 와 시간지연 τ 를 가진 strictly proper인 유리식 $p \times m$ 전달행렬이다. (A, B)가 안정가능이고 (C, A)는 검출가능이라고 가정한다. $G(s)$ 의 double coprime factorization은 다음과 같이 나타내어진다 [1,2].

$$G(s) = N(s)M^{-1}(s) = M^{-1}(s)N^-(s) \quad (1)$$

$N(s)$, $M(s)$: right coprime H_∞ matrices

$N^-(s)$, $M^-(s)$: left coprime H_∞ matrices

이 double coprime factorization에 대하여 다음 식을 만족하는 H_∞ 행렬 $Y(s)$, $X(s)$, $Y^-(s)$, $X^-(s)$ 가 존재한다[2].

$$\begin{bmatrix} Y(s) & X(s) \\ -N^-(s) & M^-(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M(s) & -X^-(s) \\ N(s) & Y^-(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ O & I \end{bmatrix} \quad (2)$$

이것을 double Bezout factorization 이라 하며, 위의 8 개 행렬은 상태공간 구성에서 표준 알고리즘에 의해 계산되어 질 수 있고 아래와 같이 주어진다.

$$M(s) = K(sI - A - BK)^{-1}B + I, \quad (3)$$

$$N(s) = C(sI - A - BK)^{-1}Be^{-s\tau} \quad (4)$$

$$M^-(s) = C(sI - A - LC)^{-1}L + I, \quad (5)$$

$$N^-(s) = C(sI - A - LC)^{-1}Be^{-s\tau} \quad (6)$$

$$Y(s) = -Ke^{A\tau}(sI - A - LC)^{-1}Be^{-s\tau} - KV(s) + I \quad (7)$$

$$X(s) = Ke^{A\tau}(sI - A - LC)^{-1}L \quad (8)$$

$$Y^-(s) = -C(I - V(s)K)(sI - A - BK)^{-1}L + I, \quad (9)$$

$$X^-(s) = K(sI - A - BK)^{-1}e^{A\tau}L \quad (10)$$

여기서 K 와 L 은 $\det(sI - A - BK)$ 와 $\det(sI - A - LC)$ 가 안정하도록 선택되며, $G(s)$ 가 안정가능, 검출가능이라고 가정하면 식 (3)-(10)을 만족하는 K 와 L 이 존재한다. $Y(s)$ 와 $Y^-(s)$ 내의 행렬 $V(s)$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$V(s) = (sI - A)^{-1}(I - e^{-s\tau}e^{A\tau})B \quad (11)$$

II. 관측기를 사용한 상태 피드백의 실현.

다음과 같이 입력 시간지연을 가지는 선형 시스템을 생각한다.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - \tau) \quad (12)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (13)$$

여기서 $x(t) \in \mathbf{R}^n$ 는 상태벡터, $u(t) \in \mathbf{R}^m$ 은 입력벡터, $y(t) \in \mathbf{R}^p$ 는 측정된 출력벡터이고 A, B, C 는 적당한 차원을 갖는 상수행렬이다. 상태벡터 $x(t)$ 가 직접 측정될 수 있는 상태 피드백 제어인 경우 시스템 식은 다음의 피드백 제어법칙[3]에 의해 안정해진다.

$$u(t) = r(t) + v(t) \quad (14)$$

$$r(t) = P[e^{A\tau}x(t) + \int_{-\tau}^0 e^{-A\theta}Br(t + \theta)d\theta] \quad (15)$$

$P \in \mathbf{R}^{m \times n}$ 는 $\det(sI - A - BP)$ 가 안정하도록 선택되며, $v(t)$ 는 시스템의 모든 입력신호를 나타낸다. 다음은 $v(t) = 0$ 에 의하여 식 (12)로부터 얻어질 수 있다.

$$x(t + \tau) = e^{A\tau}x(t) + \int_{-\tau}^0 e^{-A\theta}Br(t + \theta)d\theta \quad (16)$$

그러므로 식(15)는 피드백의 재구성으로 간주될 수 있다.

$$r(t) = Px(t + \tau) \quad (17)$$

직접 상태피드백 설계는 주어진 plant가 피드백 법칙 식(14)와 식(15)에 의해 안정할 수 있도록 하는 행렬 $P \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 을 찾는 것이며, 그 결과 페루프 시스템의 요구되는 성능 및 강인성이 달성된다. 식(12)를 식(17)에 대입함으로써 $u(t)$ 에서 $r(t)$ 까지의 개루프 출력을 얻을 수 있다. 그러나 대부분의 경우에 있어서 시스템의 상태변수의 직접 사용은 불가능하다. 따라서 다음의 출력 피드백 제어법칙을 도입한다.

$$u(s) = r^*(s) + v(s) \quad (18)$$

$$r^*(s) = F(s)u(s) + H(s)y(s) \quad (19)$$

여기서 $F(s) \in H_\infty$, $H(s) \in H_\infty$ 는 $m \times m$ 과 $m \times p$ 의 안정한 전달함수 행렬이다. 식(19)의 표현은 관측기의 가장 일반적인 형태의 표현이며, 그것의 구조는 어떠한 특별한 형태로 제한되지 않음을 알 수 있다. 여기서 상태피드백 제어 법칙 식(15)는 실제적으로 상태 $Px(t + \tau)$ 를 재구성함을 알 수 있다. 최대로 근사한 상태피드백 제어(식(15))를 하기 위해서는 출력 피드백 제어법칙 식(19)가 $Px(t + \tau)$ 를 재구성하는 것이 요구된다. 따라서 식(19)의 피드백 제어가 시스템 상태의 함수를 주는 상태함수 관측기가 된다. 즉 함수 관측기 식(19)가 존재하게 되면 관측 벡터(observation vector) $r^*(t)$ 가 상태피드백 제어법칙 식(17)의 $Px(t + \tau)$ 대신 사용될 수 있다. 위의 해석으로부터 식(18)과 식(19)는 함수 관측기를 사용한 피드백 제어 법칙으로 간주될 수 있다. $u(t)$ 에서 부터 $r^*(t)$ 까지의 개루프 전달함수를 주파수 영역에서 표시하면

$$r^*(s) = (F(s) + H(s)G_0(s)e^{-\tau s})u(s) \quad (20)$$

이고 페루프 시스템의 출력은

$$y(s) = G_0(s)e^{-\tau s}(I - L(s))^{-1}v(s) \quad (21)$$

이다. 여기서

$$L(s) = F(s) + H(s)G_0(s)e^{-\tau s} \in \mathbb{R}(s)^{m \times m} \quad (22)$$

이며, 루프전달함수 행렬과 관련된다.

페루프 시스템이 직접 상태피드백 설계의 성능과 강인성을 회복하기 위해서는 다이내믹 출력 피드백 제어의 $L(s)$ 가 직접 상태피드백 제어의 루프 전달함수 행렬 L_s 과 정확히 동일하거나 근사하도록 $F(s)$ 와 $H(s)$ 를 결정해야 한다. 이것이 본 논문에서 목표로 하는 설계의 기본 아이디어이다. 이 목표를 달성하기 위해 직접적으로 $L(s) = L_s(s)$ 로 놓으면

$$F(s) + H(s)G_0(s)e^{-\tau s} = L_s(s) \quad (23)$$

이 되고 $G_0(s)e^{-\tau s} = N(s)M^{-1}(s)$ 를 이용하면

$$F(s)M(s) + H(s)N(s) = L_s(s)M(s) \quad (24)$$

이 되며 여기서 $M(s)$ 와 $N(s)$ 는 $G(s)$ 의 right coprime H_∞ factor이다. 이상으로 부터 함수 관측기 식 (19)는 함수 $Px(t + \tau)$ 에 대한 예측기임을 알 수 있고 예측기 특성을 이용하여 시간지연 문제를 지연과 무관한 문제로 바꿀 수

있음을 알 수 있다.

III. 관측기의 존재조건

관측기 설계 관점에서 보면 시스템 식(12),(13)에 대한 함수관측기 식(19)는 $Px(t + \tau)$ 에 대한 관측에러가 다음과 같은 특성을 가지는 다이내믹 시스템이다. 즉, 관측 에러가 모든 $u(t)$ 와 초기상태에 대해

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (Px(t + \tau) - r^*(t)) = 0 \quad (25)$$

이 된다. 식(25)를 만족하는 함수 관측기 존재에 대한 필요충분 조건을 아래에 제시한다. 먼저 partial 상태 $\xi(s)$ 를 도입하여 시스템을 factorization 식으로 나타내면

$$u(s) = M(s)\xi(s) \quad (26)$$

$$y(s) = N(s)\xi(s) = G(s)u(s) \quad (27)$$

과 같다. 그리고 식 (1)로부터

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}Be^{-\tau s} = N(s)M^{-1}(s) \quad (28)$$

이며, 식(4)의 상태공간 표현 $N(s) = C(sI - A - BK)^{-1}Be^{-\tau s}$ 를 이용하여 다음 식을 얻는다.

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}Be^{-\tau s} = C(sI - A - BK)^{-1}Be^{-\tau s}M^{-1}(s) \quad (29)$$

따라서 식(29)에 의하여

$$\begin{aligned} x(s) &= (sI - A)^{-1}Be^{-\tau s}u(s) \\ &= (sI - A - BK)^{-1}Be^{-\tau s}M^{-1}(s)u(s) \end{aligned} \quad (30)$$

이다. 그리고 식(17), (26)에 의하여

$$r(s) = P(sI - A - BK)^{-1}B\xi(s) \quad (31)$$

따라서 식(32), (33)이 얻어진다

$$r(s) = Pe^{-\tau s}x(s) = P(s)\xi(s) \quad (32)$$

여기서

$$P(s) = P(sI - A - BK)^{-1}B \quad (33)$$

이며, $P(s)$, $M(s)$ 는 상태피드백에서 요구된 전달함수 $L_s(s)$ 의 right-coprime factor가 된다. 즉,

$$L_s(s) = P(s)M^{-1}(s) \quad (34)$$

식(34)는 직접 상태피드백의 루프 전달회복과 시간지연 시스템의 함수관측 사이의 상호관계를 나타내는 중요한 역할을 하며, 이것으로부터 함수 관측기 설계로부터의 결과를 직접 상태피드백의 루프 전달함수 회복을 구하는데 이용할 수 있음을 알 수 있다.

이상의 서술에 따라 식(25)를 만족하는 함수 관측기의 존재조건은 다음과 같이 주어진다. 주어진 시스템 식(12),(13)에 대하여 만약 다음의 조건이 유지된다면 식(19) 관측기를 사용하여 변수 $Px(t + \tau)$ 는 관측될 수 있다.

$$F(s)M(s) + H(s)N(s) = P(s) \quad (35)$$

관측기 식(19)를 사용하여 함수 $Px(t + \tau)$ 를 관측하기 위해서는 식(35)가 만족되어야 한다. 이것은 함수 관측기와 상

태 피드백을 구성하는 필요충분 조건이다.

IV. 관측기의 파라미터화

식(35)의 조건을 만족하는 모든 관측기의 parameter를 찾는다.

정리 1.

주어진 시스템 식(12),(13)에서 $Px(t + \tau)$ 에 대한 모든 함수 관측기는 다음에 의해 파라미터화 된다.

$$F(s) = [P(s)Y(s) - Q(s)N^-(s)] \quad (36)$$

$$H(s) = [P(s)X(s) + Q(s)M^-(s)] \quad (37)$$

$$Q(s) \in H_\infty \quad (38)$$

여기서 $N^-(s)$, $M^-(s)$, $Y(s)$, $X(s)$ 는 $G(s)$ 의 coprime factorization 과 관련된 Bezout 항등식 식(2)를 만족한다. 따라서 정리 1.에 의하여 시스템 식(12),(13)에 대한 모든 함수 관측기의 파라미터화가 가능하게 된다. 그리고 이러한 방법의 파라미터화에 의하면 관측기 설계는 H_∞ set내의 적절한 파라미터 행렬 $Q(s)$ 를 찾는 것으로 귀결된다. 여기서 파라미터 행렬 $Q(s)$ 의 선택은 시스템 설계에서 요구된 성능사양에 따라 달라지게 된다.

정리 2.

$L_s(s)$ 가 안정할 때 모든 함수 관측기의 파라미터화는 다음과 같이 주어진다.

$$F(s) = L(s) - R(s)N^-(s) \quad (39)$$

$$H(s) = R(s)M^-(s) \quad (40)$$

$$R(s) = L_s(s)X^-(s) + Q(s) \in H_\infty \quad (41)$$

V. 입력 시간-지연 시스템의 관측기 구성

주어진 plant 가 안정한 경우 식(39)와 식(40)을 식(19)에 대입하면

$$r'(s) = L_s(s)u(s) + R'(s)(y(s) - G(s)u(s)) \quad (42)$$

$$R'(s) = R(s)M^-(s), R(s) = L_s(s)X^-(s) + Q(s) \quad (43)$$

이 된다. 관측기 식(42)는 2개의 항으로 구성되는 것을 알 수 있다. 첫번째 항 $r(s) = L_s(s)u(s) = P(s)\xi(s)$ 는 상태 함수 $Px(t + \tau)$ 의 예측치이고 두번째 항은 측정할 수 있는 출력과 그것의 추정치 사이의 불일치를 반영한다. 불일치(mismatch)는 일반적으로 외란 신호와 process 내의 plant 동요(perturbation)에 기인한다.

본 논문의 관측기 구성 식(42)에서는 계인 행렬 $R'(s)$ 가 다이나믹하므로 관측기의 강인성을 개선하는데 있어 더 많은 자유로움을 갖게 된다. 관측기 구성의 마지막 순서로서는 plant 동요(perturbation)와 외란에 대해 만족스러운 효과를 나타내고 규정된 성능 사양을 만족시키는 최적의 $Q(s)$ 를 찾는 것이 된다. 이상과 같이 본 논문의 관측기 설계는 모델을 사용한 주파수 영역의 기술로 간주될 수 있다. 이에 대한 제어 시스템 구성이 그림 1이다. 이것은 시간지연 시스템에서 성공적으로 사용되어 온 IMC 와 스미스 예측기(Smith predictor)와 동일한 형태를 가지며, 본 논문에서 제

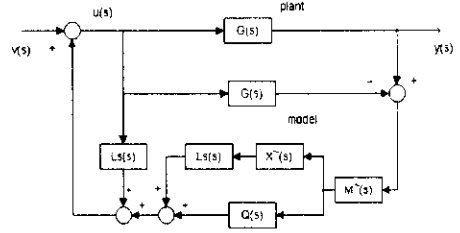


그림 1. 함수관측기를 사용한 피드백 시스템

안된 제어구성은 시간지연 시스템을 제어하는데 있어서 가장 일반적인 형태라 볼 수 있다.

VI. 모의실험 및 검토

DC 모터의 경우에서 관측기의 각 파라미터를 구하고 그림 1의 관측기를 구성하여 matlab 으로 모의실험하였다.

6-1. 관측기의 각 파라미터 계산 및 관측기 구성

다음과 같은 DC 모터의 전달함수를 생각한다.

$$G(s) = \frac{0.5}{0.1s^2 + 0.6s + 0.75} e^{-0.5s} \quad (44)$$

따라서 식(12),(13)으로 표현되는 상태방정식을 구할 수 있으며, A,B,C는 다음과 같이 주어진다.

$$A = \begin{bmatrix} -6 & -7.5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [0 \quad 5], \tau = 0.5 \quad (45)$$

상태 피드백 제어법칙 식(15)에 의하여 폐루프 극점이 $-3.162 + 0.1i$ 와 $-3.162 - 0.1i$ 에 놓이도록 한다. 이는 시스템의 응답에서 감쇠비(ξ)를 1 이 되도록 한다. 따라서 상태 피드백의 경우 식(15)의 계인 행렬은 다음과 같이 구해진다.

$$P = [0.324 \quad 2.5082] \quad (46)$$

그리하여 $\det(sI - A - BP) = s^2 + 5.676s + 4.9918 = (s + 4.588)(s + 1.088)$ 가 안정하고 이에 따라 루프 전달함수 $L_s(s)$ 를 구할 수 있다. $K = P = [0.324 \quad 2.5082]$, $L = [-0.2257 \quad 0.1913]^T$ 를 선택하면 $\det(sI - A - BK) = s^2 + 5.676s + 4.9918 = (s + 4.588)(s + 1.088)$, $\det(sI - A - LC) = s^2 + 5.0435s + 2.8895 = (s + 4.3845)(s + 0.6590)$ 가 안정하고 파라미터값들은 식(3)-(10)으로부터 구할 수 있다. 따라서 $u(t) = r'(t) + v(t)$ 와 식(42)로 표현되는 함수 관측기를 사용한 제어가 실현될 수 있으며, 그림 1의 구성에서 주어진 성능지수를 만족하는 $Q(s)$ 의 값을 찾을 수 있다.

6-2. 모의실험 결과

6-2-1. 관측기를 사용한 피드백 제어와 PI 제어의 비교
그림 2는 관측기를 사용한 피드백 시스템에서 시간-지연 값을 증가한 경우(0초, 1초, 2초, 2.8초)의 스텝입력 응답을 보이며 그림 3은 동일한 DC 모터의 전달함수로 PI 제어에서 동일한 조건으로 시간지연값을 증가시킨 경우의 스텝입력 응답이다. 그림 2와 그림 3을 비교하여 보면 PI 제어의

경우는 시간지연의 증가에 따라 스텝 입력응답의 과도 뎁핑이 심해지고 2.8초 이상의 시간 지연에서는 안정적인계를 넘는 발진현상이 생기는 반면에 본 논문의 관측기 구성에서는 시간 지연값이 증가하여도 그에 따른 응답시간만 지연될 뿐이며, 바람직한 성능을 보이고 있다. 그림 4는 동일한 시간지연 1 초를 가지는 경우 PI 제어와 관측기를 사용한 피드백 제어의 비교이며, 상승시간, settling time, overshoot 등의 모든 점에서 관측기를 사용한 피드백 제어가 우수한 성능을 보이고 있다.

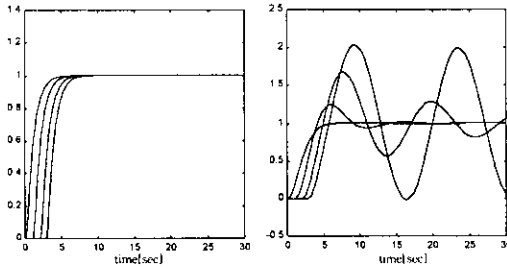


그림 2. 관측기를 사용한 피드백 제어의 스텝입력 응답

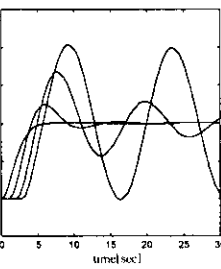


그림 3. PI 제어의 스텝 입력응답

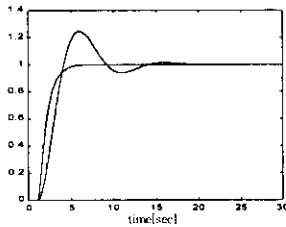


그림 4. 관측기를 사용한 피드백제어 vs PI 제어 스텝입력 응답

6-2-2. 플랜트와 모델 사이의 시간지연에 의한 오차 보정
 그림 5는 플랜트와 모델(model)간에 시간지연 오차가 있는 경우로서 모델의 시간지연 1초를 기준으로 플랜트의 시간지연이 0%(1초), +50%(1.5초), +100%(2초), +150%(2.5초), +200%(3초)의 오차를 가지는 경우 스텝입력 응답으로서 Q(s)로 보정한 결과이다.

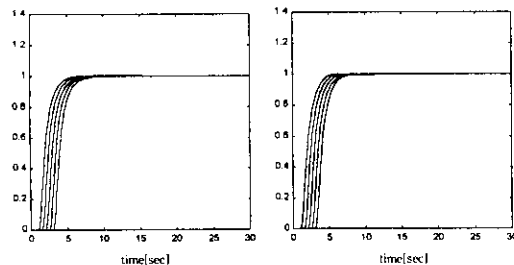


그림 5. 스텝입력 응답 (플랜트와 모델사이의 시간지연 오차가 존재하는 경우)

그림 6은 모델(model)의 시간지연 3초를 기준으로 플랜트의 시간지연이 0%(3초), -50%(2.5초), -100%(2초), -150%(1.5초), -200%(1초)의 오차를 가지는 경우 스텝입력 응답

으로서 Q(s)로 보정한 결과이다.

6-2-3. 외란 응답

그림 7은 Q(s)로 조정된 경우 스텝입력의 부하외란에 대한 응답이며, 그림 8은 Q(s)로 조정된 경우 스텝입력의 출력외란에 대한 응답으로서 외란에 대하여 강인함을 보여 주고 있다.(시간지연 1초)

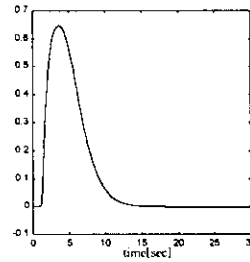


그림 7. 스텝입력의 부하외란 응답

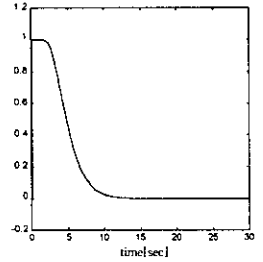


그림 8. 스텝입력의 출력외란 응답

VII. 결론

본 논문에서는 여러 다양한 제어 시스템 설계 문제를 해결하는데 있어서 유용한 방법이라고 알려진 인수분해(factorization) 접근 방법을 사용하여 입력 시간지연이 존재하는 시스템에 대해 주파수 영역에서 상태함수 관측기(state functional observer)와 상태 피드백을 설계하고 함수관측기(functional observer)를 사용한 피드백으로 직접적인 상태 피드백의 루프 전달 회복(loop transfer recovery)을 달성할 수 있음을 DC 모터에 대하여 모의실험하고 그 결과를 PI 제어와 비교검토 하였다. 그 결과 시간지연을 갖는 시스템에 있어서 함수 관측기를 사용한 피드백제어가 시간지연에 무관하게 우수한 성능을 보이는 것을 알 수 있었고 외란에 대하여도 강인한 특성을 보임을 알았다.

참고문헌

[1] Nobuyama, E., "Robust stabilization of time delay system via reduction to delay-free model matching problems," *Proceedings of the 31st Conference on Decision and Control*, Tucson, Arizona, U.S.A., pp.357-358, 1992.
 [2] Kemin Zhou with John C. Doyle and Keith Glover, *Robust and optimal control*, Prentice Hall, 1996.
 [3] Kwon, W. H., and Pearson, A. E., "Feedback stabilization of linear systems with delayed control," *IEEE Transaction on Automatic Control*, 25, pp. 266-269, 1980.
 [4] X. Ding, L. Guo, and P.M. Frank. "Parameterization of Linear Observers and Its Application to Observers Design." *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39, pp.1648-1652, 1994.