

분기이론에 의한 콘크리트의 국소화 해석

Localization Analysis of Concrete using Bifurcation Theory

송 하 원*
Song, Ha-Won

우 승 민**
Woo, Seung-Min

변 근 주***
Byun, Keun-Joo

Abstract

The strain localization is a discontinuous phenomenon that addresses the formation of jumps of the fields variables across a singularity surface. It has become widely accepted that the localization may occur as the result of discontinuous bifurcation which corresponds to the loss of ellipticity of the governing differential equations for elasto-plastic continua.

In this paper, condition for strain localization in concrete based on bifurcation theory is studied and localization tensor analysis algorithm is employed to determine the directions of localization of deformations in concrete. By applying a plasticity model of concrete into the algorithm, localization analysis is performed concrete under uniaxial tension, pure shear and uniaxial compression.

1. 서론

콘크리트에서 변형률의 증가에도 불구하고 응력이 감소되는 연화상태는 변형률 국소화 현상이 수반되는데, 국부적으로 국소화된 영역에서는 집중적으로 변형이 증가되어 파괴면이 생성되고 그 외의 영역에서는 변형률이 감소되는 거동을 보이게 된다. 이와 같이 전체적인 변형률의 불균일한 거동은 구조물의 극한하중에 지배적인 요인으로 작용하고 안정-불안정 문제가 발생하기도 한다.¹⁾ 이때, 변형률 국소화 현상은 증분평형지배방정식의 유일성(uniqueness)과 타원성(ellipticity)의 순간적인 상실로, 재료의 불안정한 비균질변형(non-homogeneous deformation)의 발현으로 설명될 수 있다. 이러한 변형률 국소화에 따른 균열면의 발생과 성장은 궁극적으로 콘크리트 구조물의 파괴를 가져온다. 일반적으로 구조물을 해석하는 수치해석적인 방법으로 유한요소해석이 있으나, 균열의 특성을 고려한 해석을 위해서는 일반 유한요소해석법으로는 부족하며 균열면에서의 특성을 표현할 수 있는 알고리즘을 도입해야 한다.²⁾ 이때, 분기(bifurcation)이론에 의한 국소화 현상의 해석은 유한요소법에서 국소화의 발생 기준을 제공하며, 궁극적으로 균열의 생성시기와 진행방향을 예측하는데 도움이 된다. 본 논문에서는 먼저 콘크리트로 대표되는 준취성재료의 일반적인 파괴 메카니즘에 근거하여 국소화 현상을 분기문제로 보아서 국소화 파괴면 방향에 관한 함수로 국소화 발생조건식을 유도하였다. 한편 도출된 국소화 조건에 대해 콘크리트의 일반적인 소성 모델을 도입하여 국소화 텐서해석을 수행하여 여러가지 하중조건하에서 콘크리트의 불연속 균열면의 생성과 방향을 예측하여 그 거동을 규명하였다.

* 정회원, 연세대학교 토목공학과 부교수

** 정회원, 연세대학교 토목공학과 박사과정

*** 정회원, 연세대학교 토목공학과 교수

2. 국소화 파괴

2.1 국소화 불연속면

재료에 발생하는 파괴는 파괴면의 불연속성의 정도에 따라, 크게 분산형 파괴, 국소화 파괴, 이산형 파괴로 나눌 수 있으며, 국소화 파괴(localized failure)는 그림 1에서 보듯이 국소화된 불연속면에서 변위 증분은 연속이나, 변형률 증분이 불연속(jump)인 불연속 파괴면의 형성으로 설명될 수 있다.

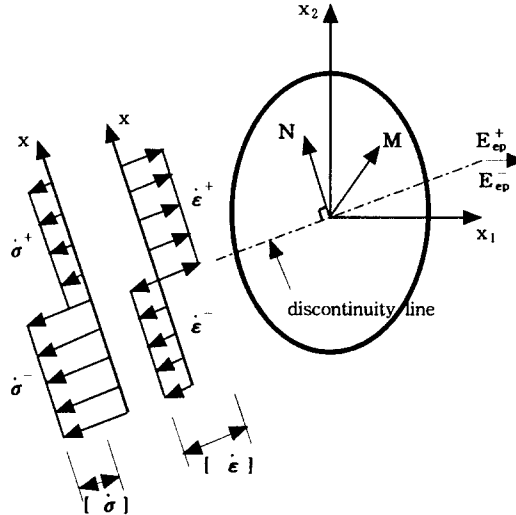


그림 1 Formation of discontinuity line with directional vectors \mathbf{M} and \mathbf{N}

즉, 국소화된 불연속면에서 연속적인 변위 증분을 $\dot{\mathbf{u}}$ 라할 때, $\nabla \dot{\mathbf{u}}$ 는 불연속면을 가로지르는 변위 증분의 변화률을 나타낸다. 즉, 불연속면에서 다음 식이 성립된다.

$$[\dot{\mathbf{u}}] = \dot{\mathbf{u}}^+ - \dot{\mathbf{u}}^- = 0, [\nabla \dot{\mathbf{u}}] = \nabla \dot{\mathbf{u}}^+ - \nabla \dot{\mathbf{u}}^- \neq 0 \quad (1)$$

여기서, $[\cdot]$ 는 불연속면의 양쪽면에서의 상대적 차이량을 나타내는 jump operator이다. Maxwell의 적합조건에 의해 식 (1)의 변위 증분은 다음의 식 (2)와 같다.

$$[\nabla \dot{\mathbf{u}}] = \dot{\gamma} \mathbf{M} \otimes \mathbf{N} \quad (2)$$

여기서, \mathbf{N} 은 불연속면의 방향을 나타내는 단위수직벡터이며, \mathbf{M} 은 국소화 거동에 의한 분기 방향을 나타내는 단위벡터이다. 식 (2)에서 미지의 스칼라 $\dot{\gamma}$ 는 파(acoustic)해석에서의 파속도(wave speed)와 관계있는 속도 증분량을 나타낸다. 변형률 증분 불연속 $[\dot{\epsilon}]$ 은 변위 증분 불연속의 대칭부분 ($[\cdot]^s$)으로써 식 (3)과 같이 표현된다.

$$[\dot{\epsilon}] = \frac{1}{2}([\nabla \dot{\mathbf{u}}] + [\nabla \dot{\mathbf{u}}]^T) = \frac{\dot{\gamma}}{2}(\mathbf{M} \otimes \mathbf{N} + \mathbf{N} \otimes \mathbf{M}) = \dot{\gamma}[\mathbf{M} \otimes \mathbf{N}]^s \quad (3)$$

한편, 불연속면에서 응력 증분의 불연속은 식 (4)로 표현된다.

$$[\dot{\sigma}] = \dot{\sigma}^+ - \dot{\sigma}^- \neq 0 \quad (4)$$

2.2 국소화 파괴 조건

그림 1과 같이 국소화 파괴에서는 불연속면을 경계로 응력 증분의 불연속 뿐만 아니라 변형률 증분의 불연속이 일어나지만, 선형운동량 평형을 유지하기 위하여 불연속면을 가로지르는 표면력 증분 $\dot{\mathbf{t}}$ 는 연속이어야 한다. 즉,

$$\dot{\mathbf{t}} = [\mathbf{N} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}}] = \mathbf{N}[\dot{\boldsymbol{\sigma}}] = 0 \quad (5)$$

여기서, 응력 증분은 식 (6)과 같이 점선탄소성텐서 \mathbf{L} 에 의해 변형률 증분과의 관계로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$[\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ij}] = L_{ijkl} [\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{kl}] \quad (6)$$

한편 변형률 증분 불연속 $[\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{kl}]$ 는 식 (3)에 의해 식 (7)과 같이 나타낼 수 있다.

$$[\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{kl}] = \frac{1}{2}(\dot{g}_k N_l + \dot{g}_l N_k) \quad (7)$$

여기서, $\dot{g}_i = \dot{\gamma} M_i$ 이다. 식 (7)과 식 (6)을 식 (5)에 대입하면, 다음 식 (8)을 얻을 수 있다.

$$(Q_{ik}) \dot{g}_k = 0 \quad (8)$$

여기서, $Q_{ik} := N_j L_{ijkl} N_l$ 이며, 국소화 텐서 또는 어쿠스틱 텐서라 한다. 따라서, 불연속한 분기는 국소화 텐서가 특이성(singularity)을 보일 때 발생한다. 즉,

$$\det(Q_{ik}) = 0 \Leftrightarrow \det(N_j L_{ijkl} N_l) = 0 \quad (9)$$

윗 행렬식의 실수해의 존재는 \mathbf{N} 방향에 수직되게 불연속면이 발생하며 \mathbf{M} 방향의 분기가 발생하기 위한 필요조건이다.

3. 분기문제로서의 국소화 현상 해석

2차원상태에서 응력을 $\{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\} = \{\dot{\sigma}_{11}, \dot{\sigma}_{22}, \dot{\sigma}_{12}\}^T$, 변형률을 $\{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}\} = \{\dot{\epsilon}_{11}, \dot{\epsilon}_{22}, \dot{\epsilon}_{12}\}^T$ 라 할때 구성연산자 텐서의 행렬 $[\mathbf{L}]$ 은 응력과 변형률 텐서의 대칭성 때문에 다음의 식 (10)과 같다.

$$[\mathbf{L}] = \begin{bmatrix} L_{1111} & L_{1122} & L_{1112} \\ L_{2211} & L_{2222} & L_{2212} \\ L_{1211} & L_{1222} & L_{1212} \end{bmatrix} \quad (10)$$

윗 식을 국소화 텐서식 (9)에 대입하면 다음의 식 (11)과 같다.

$$Q_{ik} = N_1^2 L_{1i1k} + N_1 N_2 (L_{1i2k} + L_{2i1k}) + N_2^2 L_{2i2k} \quad (11)$$

따라서, 국소화 파괴조건은 다음의 식 (12)로 표현될 수 있다.

$$\det(Q_{ij}(N)) = \begin{vmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad (12)$$

여기서, $Q_{11} = N_1^2 L_{1111} + N_1 N_2 (L_{1112} + L_{2111}) + N_2^2 L_{2112}$

$$Q_{22} = N_1^2 L_{1212} + N_1 N_2 (L_{1222} + L_{2212}) + N_2^2 L_{2222}$$

$$Q_{12} = N_1^2 L_{1112} + N_1 N_2 (L_{1122} + L_{1212}) + N_2^2 L_{1222}$$

$$Q_{21} = N_1^2 L_{1211} + N_1 N_2 (L_{1221} + L_{2211}) + N_2^2 L_{2212}$$

식 (12)를 전개하면 국소화 텐서의 행렬식은 불연속면에 수직인 벡터 \mathbf{N} 의 방향 θ 에 관한 다음과

같은 4차방정식 (13)이 얻어진다.

$$f(\theta) = b_0 + b_1 \tan \theta + b_2 \tan^2 \theta + b_3 \tan^3 \theta + b_4 \tan^4 \theta = 0 \quad (13)$$

여기서, $\tan \theta = N_2/N_1$ 이며, $b_0 = L_{1111}L_{1212} - L_{1112}L_{1211}$

$$b_1 = L_{1111}L_{1222} + L_{1111}L_{2212} - L_{1112}L_{2211} - L_{1211}L_{1122}$$

$$b_2 = L_{1111}L_{2222} + L_{1112}L_{1222} + L_{1211}L_{2212}$$

$$- L_{1122}L_{1212} - L_{1122}L_{2211} - L_{1212}L_{2211}$$

$$b_3 = L_{1112}L_{2222} + L_{1211}L_{2222} - L_{1222}L_{2211} - L_{2212}L_{1122}$$

$$b_4 = L_{1212}L_{2222} - L_{1222}L_{2212}$$

한편 분기의 방향벡터 $\dot{\mathbf{g}}$ 가 좌표계의 한점 (x_1, x_2) 에서 성분 g_1 와 g_2 를 갖는 고유벡터라면 식 (8)은 다음 식과 같다

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (14)$$

그리고, 분기방향 ω 는 다음의 식 (15)와 같이 얻을 수 있다.

$$\tan \omega = \frac{g_2}{g_1} = \frac{-[L_{1111} + (L_{1112} + L_{1211})\tan \theta + L_{1212}\tan^2 \theta]}{[L_{1112} + (L_{1122} + L_{1212})\tan \theta + L_{1222}\tan^2 \theta]} \quad (15)$$

즉, 기준좌표축 (x, y) 에 대한 불연속면의 수직방향(θ)과 그에 대응하는 분기방향(ω)은 그림 2과 같다.

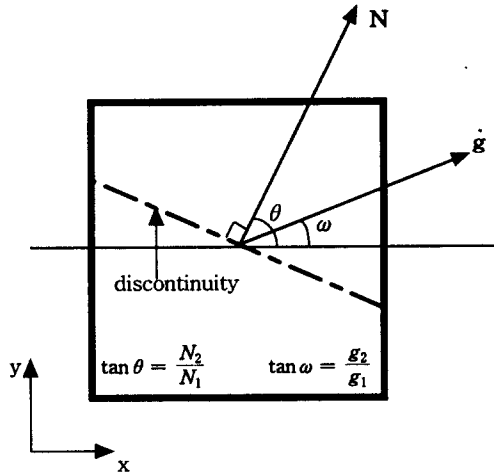


그림 2. Geometrical representation of discontinuity line in 2-D situation

4. 콘크리트의 국소화 해석

변형을 국소화 현상이 일어나는 콘크리트의 국소화 해석을 하기 위한 콘크리트모델로서, 콘크리트에 Drucker-Prager 파괴기준을 적용하여 전개된 소성연화모델에서 유도된 접선탄소성텐서를 사용하였다.³⁾

적용된 Drucker-Prager 파괴기준은 다음 식 (16)과 같다.

$$f = \|s\| - \sqrt{\frac{2}{3}} k(\bar{e}^p) + \alpha \cdot p = 0 \quad (16)$$

$$k(\bar{e}^p) = \sigma_0 + \bar{\sigma} \bar{e}^p + (\sigma_\infty - \sigma_0)[1 - e^{-\beta \bar{e}^p}] \quad (17)$$

여기서, p 는 정수압용력, \bar{e}^p 는 유효소성변형률 그리고, $\|s\|$ 는 편차용력 s 의 norm($\| \|$)으로서 $\|s\| = \sqrt{s:s}$, σ_0 는 초기항복용력, $\bar{\sigma}$ 는 선형항복용력 계수, σ_∞ 는 극한용력, β 는 포화계수이다.

한편 접선탄소성텐서는 다음 식 (18)과 같다.

$$L = K1 \otimes 1 + 2G\beta(I - \frac{1}{3}1 \otimes 1) + \alpha K(\bar{r} - 1) \hat{n} \otimes 1 + 2G(\bar{r} - \beta) \hat{n} \otimes \hat{n} \quad (18)$$

여기서, K 와 G 는 각각 체적탄성계수와 전단계수, $I_{ijkl} = \frac{1}{2}(1_{il}1_{kj} + 1_{ik}1_{jl})$ 이며, 1 는 Kronecker delta이다. 한편, 식 (18)에서 α , β , \bar{r} 는 다음과 같다.

$$\alpha = \frac{6\sqrt{2} \sin \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)}, \quad \beta = \frac{-\alpha p + \sqrt{\frac{2}{3}} k}{\|s^T\|}, \quad \bar{r} = \frac{2}{3} \frac{k'}{2G + \frac{2}{3} k'} \quad (19)$$

여기서, k' 는 $k(\bar{e}^p)$ 의 \bar{e}^p 에 관한 미분이다.

적용 콘크리트 모델에 대해서 일축 인장($\sigma_x = \sigma$, $\sigma_y = 0$), 순수 전단($\sigma_x = \sigma$, $\sigma_y = -\sigma$) 그리고 일축 압축($\sigma_x = 0$, $\sigma_y = -\sigma$)의 세가지 하중 경우에 대한 국소화 텐서 해석을 수행하여 각각의 경우에 대한 국소화 발생조건으로부터 불연속 파괴면의 방향을 구하였다. 적용 콘크리트 모델의 물성치는 탄성계수 E 는 $2.5 \times 10^5 (kg/cm^2)$, 포아송 비 ν 는 0.18 그리고, 내부 마찰각 ϕ 는 45° 로 가정하였다. 그림 3은 일축 인장, 그림 4는 순수 전단 그리고 그림 5는 일축 압축에 대한 $det(Q_{ep})$ 로 정규화된 $det(Q_e)$ 의 값(국소화 지수($det(Q_{ep})/det(Q_e)$))을 그래프로 나타낸 것이다. 국소화 지수의 값이 0일 때 불연속 파괴면이 생성되며 그때의 θ 값이 불연속 파괴면의 방향이다.

해석결과, 분기조건에 의한 불연속 파괴면의 방향 θ 는 x축에 대하여, 일축 인장의 경우는 0° , 순수 전단의 경우는 44.9° 그리고 일축 압축의 경우는 52.5° 인 것으로 예측되었다.

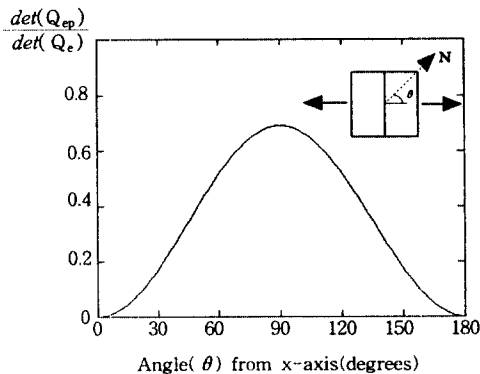


그림 3. Localization indicator of concrete model in uniaxial tension

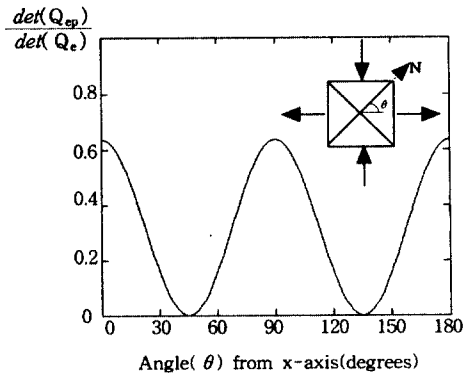


그림 4. Localization indicator of concrete model in pure shear

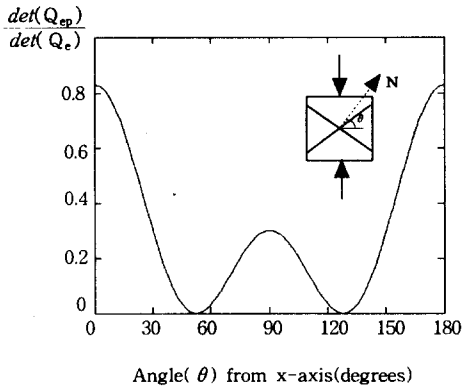


그림 5. Localization indicator of concrete model in uniaxial compression

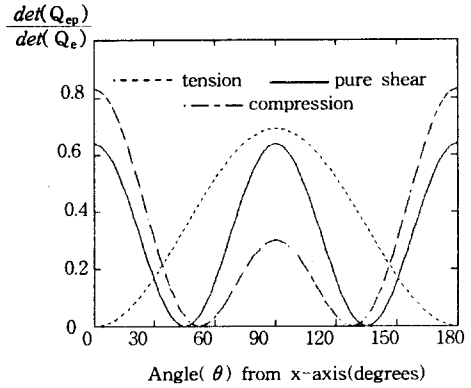


그림 6. Comparison of localization indicator in three load cases

5. 결론

본 연구에서는 콘크리트의 국소화 현상을 분기문제로 보아서 국소화 발생조건식을 유도하였다. 유도된 국소화 발생조건식으로 국소화 텐서 해석을 수행하였으며, 국소화 텐서의 행렬식을 4차방정식으로 정식화하여, 콘크리트의 대표적인 구성모델인 Drucker-Prager 파괴기준이 적용된 소성연화모델에 대하여 국소화 해석을 수행하였다. 국소화 해석 결과로부터 일축 인장, 일축 압축, 순수 전단의 세가지 하중 경우에 대한 국소화에 의한 콘크리트의 불연속 파괴면의 생성과 방향을 예측하였다.

참고문헌

1. 송하원, 전재홍, 변근주, "콘크리트의 안정-불안정 거동에 관한 연구", 콘크리트학회 학술발표회논문집, Vol. 8, 1996, pp. 459~465.
2. 송하원, "유한요소법에 의한 콘크리트의 진행성 파괴해석", 한국콘크리트학회논문집, Vol. 8, No. 1, 1996. 2., pp. 145~153.
3. 송하원, 나웅진, "손상과 소성을 고려한 콘크리트 변형률 국소화의 유한요소해석", 전산구조공학회 논문집, 제 10권 3호, 1997. 9., pp. 241~250.