

# 비선형 회귀분석에 의한 프리스트레스 하중의 시간에 따른 손실 예측

## Prediction of Prestress Force Losses by Nonlinear Regression

오 병 환\*      양 인 환\*\*      홍 경 옥\*\*      채 성 태\*\*  
Oh, Byung-Hwan    Yang, In-Hwan    Hong, Kyung-Ock    Chae, Sung-Tae

---

### Abstract

The purpose of this paper is to present and establish a procedure to predict the prestress forces during the service life of the structure. The statistical approach of this procedure is using the in-situ measurement data of the post-tensioning system to develop a nonlinear regression analysis. The method of least squares is used to fit a certain function a set of data. Use of a nonlinear model is achieved by its logarithmic transformation and sunsequent use of linear-regression theory. The regression analysis results can be used to check the prestress force during the service life so that the remaining prestress force is equal to or exceeds the design requirement. Results from the measurement data of PSC box girder bridge structure were used to demonstrate the procedures.

---

### 1. 서론

프리스트레스드 콘크리트(PSC) 구조물에서의 프리스트레스 힘은 콘크리트의 크리프와 건조수축 및 PS강재의 릴랙세이션으로 인해 시간에 따라 감소한다. PSC 교량 또는 원전구조물에서 시간에 따른 프리스트레스 힘의 손실은 중요한 사항이다<sup>1)</sup>. 프리스트레스의 손실은 구조물의 하중부담능력에 영향을 미치고, 과다손실이 발생된 경우 막대한 비용을 투자한 추가 긴장작업을 시행해야만 한다<sup>2)</sup>.

콘크리트의 크리프와 건조수축 및 PS강재의 릴랙세이션은 재료 특성치의 변동성에 의해 많은 영향을 받는다. 콘크리트의 크리프와 건조수축으로 인한 프리스트레스 힘의 시간에 따른 감소예측을 위해 콘크리트의 크리프와 건조수축 특성을 정확히 반영하는 것은 거의 불가능하기 때문에 이론적 해법에 의한다 하더라도 불확실성은 여전히 존재한다. 따라서 본 연구에서는 시간에 따른 프리스트레스 힘의 보다 정확한 예측을 위해 시공중 초기측정치를 이용한 비선형 회귀분석을 통해 프리스트레스 힘의 시간에 따른 손실예측 기법을 제안한다.

---

\* 정희원, 서울대학교 토목공학과 교수

\*\* 정희원, 서울대학교 토목공학과 대학원 박사수료

## 2. 회귀분석

회귀분석은 종속변수와 하나 또는 그 이상의 독립변수 사이의 정량적인 관계를 규명하는 통계학적 기법이다. 종속변수  $Y$ 는 독립변수  $X$ 에 의존하며, 이들 사이의 수치적인 관계를 산출하기 위해 측정치를 사용한다. 두 변수 사이의 관계식이 선형이라면, 선형관계식은 다음과 같다.

$$Y = \alpha + \beta X + \varepsilon \quad (1)$$

여기서  $\varepsilon$ 는 임의의 오차이다. 만약, 오차  $\varepsilon$ 가 독립적이고 평균 0, 분산  $\sigma^2$ 의 정규분포특성을 갖는다면, 식(1)의 양변에 기대값을 취하면 다음과 같다.

$$E(Y) = \alpha + \beta E(X) \quad (2)$$

여기서  $E(Y)$ 는 주어진  $X$ 에 대한  $Y$ 의 조건부 기대값이며,  $\alpha$  및  $\beta$ 는 회귀 계수(regression coefficient)로써 추정되어야 할 값들이다. 최적의 회귀계수를 추정하기 위하여 최소자승법(least square method)을 사용하며, 회귀계수  $\alpha$ 와  $\beta$ 의 최소자승추정치  $\hat{\alpha}$  및  $\hat{\beta}$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= \frac{1}{n} \sum Y_i - \frac{\hat{\beta}}{n} \sum X_i = \bar{Y} - \hat{\beta} \bar{X} \\ \hat{\beta} &= \frac{\sum X_i Y_i - n \bar{X} \bar{Y}}{\sum X_i^2 - n \bar{X}^2} = \frac{\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum (X_i - \bar{X})^2} \end{aligned} \quad (3)$$

여기서,  $n$ 은 측정자료의 수( $i=1,2,3,\dots,n$ )이며,  $\bar{X}$  및  $\bar{Y}$ 는 각각 변수  $X$  및  $Y$ 의 평균값이다. 따라서, 종속변수  $Y$ 의 추정치  $\hat{Y}$ 는 다음과 같다.

$$\hat{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X \quad (4)$$

식 (1)에서 (4)까지의 과정은 독립변수  $X$ 에 대한 종속변수  $Y$ 의 회귀분석과정이며,  $\hat{Y}$ 는 주어진  $X$ 에 대한  $Y$ 의 평균값을 나타낸다.

한편, 두 변수 사이의 관계가 항상 선형인 것만은 아니며, 측정자료를 바탕으로 두 변수 사이의 비선형관계의 결정을 비선형 회귀분석(nonlinear regression analysis)이라 한다. 일반적으로 비선형 회귀분석은 미리 가정된 비선형함수(평균값)에 바탕을 둔다.  $X$ 에 대한  $Y$ 의 비선형 회귀분석의 형태는 다음과 같다.

$$\hat{Y} = \alpha + \beta g(X) \quad (5)$$

여기서,  $\alpha$ 와  $\beta$ 는 측정자료를 바탕으로 추정되어야 할 회귀계수이며,  $g(X)$ 는 미리 결정된  $X$ 의 비선형함수이다. 이때, 새로운 변수  $X' = g(X)$ 로 정의함으로써, 식 (5)는 다음과 같이 표현된다.

$$\hat{Y} = \alpha + \beta X' \quad (6)$$

식(6)은 식(4)와 동일한 형태의 수학적 표현이다. 따라서, 측정자료의 순서쌍  $(X_i, Y_i)$ 를  $[g(X_i), Y_i]$  즉,  $(X'_i, Y_i)$ 로 변환하여 원래  $X$ 와  $Y$ 사이의 비선형관계식을 변수  $X'$ 와  $Y$ 사이의 선형관계로 변환할 수 있다. 회귀계수  $\alpha$  및  $\beta$ 는 식 (3)에서처럼 결정할 수 있다. 이와 같이 비선형회귀분석 문제는 선형회귀분석 문제로 변환하여 해결할 수 있다.

### 3. 상관관계 분석

임의 변수사이의 상관관계는 상관계수(correlation coefficient)로 표현될 수 있으며, 이는 다음과 같다.

$$R_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (7)$$

측정치  $X$ 와  $Y$ 를 바탕으로 식 (7)의 상관계수는 식(8)과 같이 표현할 수 있다.

$$R_{XY} = \frac{1}{(n-1)} \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{S_X S_Y} = \frac{1}{(n-1)} \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i - n \bar{X} \bar{Y}}{S_X S_Y} \quad (8)$$

여기서,  $\bar{X}$  및  $\bar{Y}$  는 표본의 평균이며,  $S_X$  및  $S_Y$  는 표본의 표준편차이다.

$R_{XY}^2$ 의 값은 0에서 1까지의 값을 갖는다. 따라서,  $-1 \leq R_{XY} \leq 1$ 이다. 만약, 상관계수  $R_{XY}$ 가 1 또는 -1을 가지면, 변수  $X$ 와  $Y$ 사이에는 강한 상관관계가 존재한다. 반면에, 상관계수가 0에 가까우면 변수사이의 상관관계가 약함을 나타낸다.

### 4. 신뢰구간 추정

앞 절에서 살펴본 회귀계수  $\hat{\alpha}$  및  $\hat{\beta}$ 의 신뢰구간은 사용자료를 통해 추정할 수 있다. 만약, 회귀선 (regression line)을 중심으로  $\hat{\alpha}$  및  $\hat{\beta}$ 가 각각 Student- $t$  분포특성을 갖는다면  $Y$ 도 또한  $t$ -분포특성을 갖는다<sup>3)</sup>. 이때, 회귀계수  $\alpha$ 에 대한 유의수준  $\alpha$ 를 사용한  $100(1-\alpha)\%$  신뢰구간은 다음과 같다<sup>4)</sup>.

$$\begin{aligned} \text{상한선(upper limit)} &= \hat{\alpha} + S_{\hat{\alpha}} t_{n-2, 1-\alpha/2} \\ \text{하한선(lower limit)} &= \hat{\alpha} - S_{\hat{\alpha}} t_{n-2, 1-\alpha/2} \end{aligned} \quad (9)$$

회귀계수  $\beta$ 에 대한 유의 수준  $\alpha$ 를 사용한  $100(1-\alpha)\%$  신뢰구간은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{상한선(upper limit)} &= \hat{\beta} + S_{\hat{\beta}} t_{n-2, 1-\alpha/2} \\ \text{하한선(lower limit)} &= \hat{\beta} - S_{\hat{\beta}} t_{n-2, 1-\alpha/2} \end{aligned} \quad (10)$$

따라서, 특정한  $X$ 값이 주어졌을때, 종속변수  $Y$ 에 대한 유의 수준  $\alpha$ 를 사용한  $100(1-\alpha)\%$  신뢰구간은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{상한선(upper limit) } YU &= \hat{Y} + S_{\hat{Y}} t_{n-2, 1-\alpha/2} \\ \text{하한선(lower limit) } YL &= \hat{Y} - S_{\hat{Y}} t_{n-2, 1-\alpha/2} \end{aligned} \quad (11)$$

여기서,  $t_{n-2, 1-\alpha/2}$ 는 자유도  $n-2$ 이며  $100(1-\alpha)\%$ 의 양측신뢰수준에 대한  $t$ -분포 특성치이며,  $S_{\hat{\alpha}}$ ,  $S_{\hat{\beta}}$ 는 각각 다음과 같다.

$$S^2_{\bar{x}} = \left( \frac{1}{N} + \frac{\bar{X}^2}{\sum(X_i - \bar{X})^2} \right) \hat{\sigma}^2$$

$$S^2_{\bar{y}} = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sum(X_i - \bar{X})^2} \quad (12)$$

$S_{\bar{y}}$ 는 변수  $X$ 가 주어졌을 때,  $\hat{Y}$ 에 대한 예측오차의 표준편차이며, 이는 다음과 같다.

$$S^2_{\bar{y}} = \left( 1 + \frac{1}{N} + \frac{(X - \bar{X})^2}{\sum(X_i - \bar{X})^2} \right) \hat{\sigma}^2 \quad (13)$$

## 5. 프리스트레스 하중의 예측

본 절에서는 지금까지 살펴본 통계적 이론 및 절차를 바탕으로 시공기간 동안의 초기측정치를 이용하여 구조물의 프리스트레싱 하중(또는 응력)의 예측을 실제 적용한다. 긴장후 시간  $t$ 에서의 PS강재의 응력은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\sigma_p = \sigma_{pi} - [\sigma_{pi}(\sigma_{pi}/\sigma_{py} - 0.55)/C] \log t \quad (14)$$

여기서,  $C$ 는 PS강재의 형태에 따라서 결정되는 상수이며, Magura<sup>5)</sup> 등은 10을 제안하였으며, 저릴렉세이션 강재의 경우에는 45를 권장하고 있다<sup>6)</sup>.  $\sigma_{pi}$ ,  $\sigma_{py}$  및  $C$ 는 시간에 따라 변하지 않는 상수이며, 식 (14)는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$Y = \alpha + \beta \log T \quad (15)$$

여기서  $Y$ 는 임의의 시간  $T$ 에서의 텐던의 응력이며,  $\alpha$ 와  $\beta$ 는 회귀분석에 의해 결정되어야 할 회귀계수이다. 이때, 식 (15)는 비선형 회귀분석식인 식(5)와 동일한 형태이며,  $X' = \log T$ 로 변환하므로써 선형회귀분석 문제로 해결할 수 있다. 위에서 살펴본 회귀분석 방법에 식 (15)를 사용하여 시간  $T$ 에서의 텐던의 평균응력값  $\hat{Y}$ , 하한값  $Y_L$  및 상한값  $Y_U$ 를 각각 계산하였다. 긴장시의 시간  $T=0$ 에서  $\ln T$ 는 정의가 안되기에 초기시간  $T_0 = 0.001$ 을 사용하였다.

프리스트레스 하중의 시간에 따른 손실의 경우 변수  $X_i$ 가 증가함에 따라 변수  $Y_i$ 는 감소한다. 따라서, 상관계수  $R_{XY}$ 는 음의 값을 가지며, 일반적으로  $|R_{XY}| \geq 0.6$ 이면 변수사이에 강한 상관관계가 있는 것으로 알려져 있다<sup>4)</sup>. 텐던 BI1, BI2, BI3 및 BI4<sup>7)</sup>의 회귀분석시의 상관계수는 각각 -0.882, -0.910, -0.887 및 -0.841로서 변수들 사이의 밀접한 상관관계를 나타내고 있다. 측정자료 및 식 (11)을 사용하여 프리스트레스 하중의  $\hat{Y}$ ,  $Y_L$  및  $Y_U$ 를 산출하였다. 이때, 자유도  $n-2=5$  및 신뢰구간 95%에 대한  $t$ -분포 특성치는 2.571을 사용한다. 여기서 신뢰구간 95%는 텐던의 실제응력이 하한값  $Y_L$  보다 클 확률이 97.5%, 텐던의 실제응력이 상한값  $Y_U$ 보다 클 확률이 2.5%임을 뜻한다.

그림 1에 시간에 따른 각 텐던의 측정값 및 이의 회귀분석 결과를 나타내었으며, 그림 2에 회귀분석 결과를 토대로 3,000일까지의 예측결과를 평균값, 하한선 및 상한선을 각각 나타내었다.

## 6. 결론

본 연구에서는 시공중의 초기 측정치를 사용하여 텐던의 프리스트레스 하중의 시간에 따른 변화를 예측하는 실용적인 방법을 제안하였다. 제안한 방법은 회귀분석기법을 사용하여 평균값뿐만 아니라, 신뢰구간(본 예제에서는 95% 적용) 내에서의 상한값 및 하한값도 결정할 수 있다. 따라서, 본 연구에서의 적용방법을 통한 예측결과를 토대로 PSC 구조물 텐던의 하중관리를 좀 더 정확하고 효율적으로 관리할 수 있다고 판단된다.

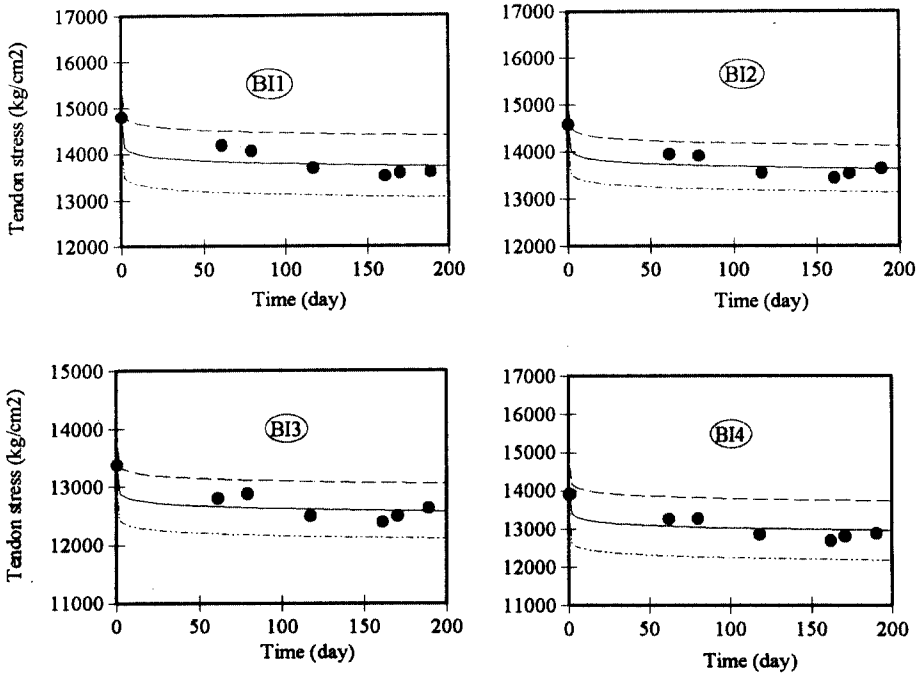


그림 1. 프리스트레스 하중의 회귀분석

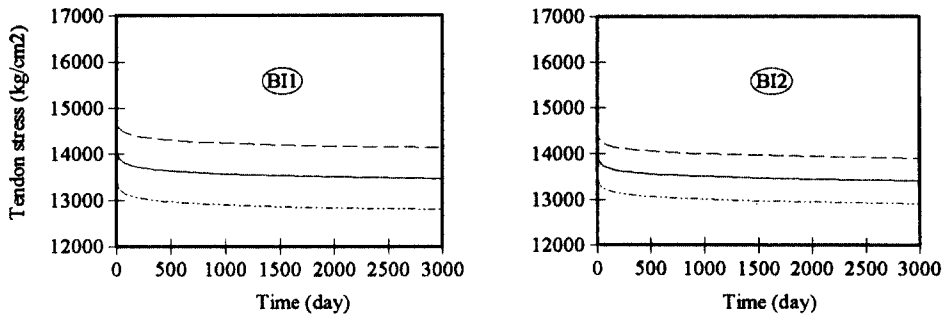


그림 2. 프리스트레스 하중의 예측

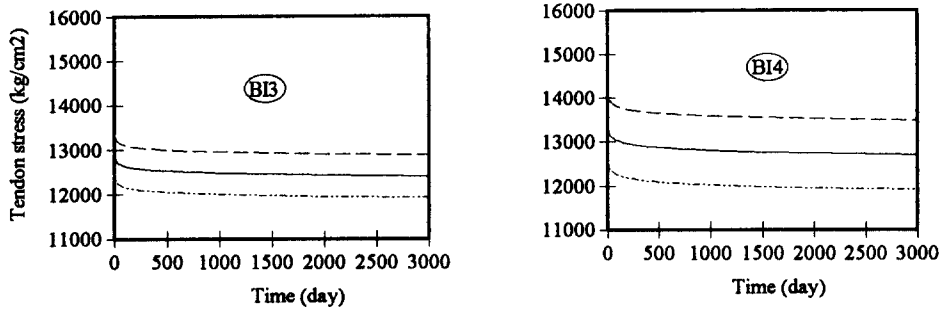


그림 2. 프리스트레스 하중의 예측 (계속)

#### 참고문헌

1. Chadha, G.(1982), "Design Aids for Prediction of Long-Term Prestress Losses Due to Creep and Shrinkage", Design for Creep and Shrinkage in Concrete Structures, *ACI Publication SP-76*, American Concrete Institute, Farmington Hills, MI, pp.109-124.
2. Massicotte, B. Picard, A. Ouellet, C. and Gaumont, Y.(1994), "Strengthening of a Long Span Prestressed Segmental Box Girder Bridge", *PCI Journal*, Vol.39, No.3, May-June, pp.52-65.
3. Ang, A.H. and Tang, H.(1975), "*Probability Concepts in Engineering Planning and Design*", John Wiley & Sons, New York.
4. Bethea, R. M. and Rhinehart, R. R.(1991), "*Applied Engineering Statistics*", Marcel Dekker, New York.
5. Magura, D. D., Sozen, M. A. and Siess, C. P.(1964), "A Study of Stress Relaxation in Prestressing Reinforcement", *PCI Journal*, Vol.9, No.2, pp.13-57.
6. Ontario Highway Bridge Design Code, Ministry of Transportation and Communications, Government of Ontario, 2nd edition, Toronto.
7. 건설교통부(1997), "PC 장대교량의 정밀안전시공 및 유지관리를 위한 통합계측관리시스템의 개발"