

Fourier 방법을 이용한 지진파 전달해석

An Analysis of Seismic Wave Propagation by Using the Fourier Method

김현실*, 김재승*, 강현주*, 김상렬*

Hyun-Sil Kim, Jae-Seung Kim, Hyun-Joo Kang, and Sang-Ryul Kim

ABSTRACT

Transient acoustic and elastic wave propagation in inhomogeneous media are studied by using the Fourier method. To verify the proposed numerical scheme, several examples having analytic solutions are considered, where two different semi-infinite media are in contact along a plane boundary. The comparisons of numerical results by the Fourier method and analytic solutions show good agreements. In addition, the Fourier method is applied to a layered half-plane, in which an elastic semi-infinite medium is covered by an elastic layer of finite thickness. It is showed how to derive the analytic solutions by using the Cagniard-de Hoop method. The numerical solutions are in excellent agreements with analytic results.

1. 서론

불균일 매질의 음파전달은 여러 가지 지층구조로 이루어진 지반의 지진파해석이나 음파의 전파속도가 깊이에 따라 변하는 해양의 음파전달해석 등에 이용되는 중요한 문제이나 형상이 매우 단순한 구조외에 대부분의 복잡한 문제는 FDM, FEM 등 수치해석방법의 사용이 불가피하다. 지진에 취약한 특정지역의 지층구조를 FEM 또는 FDM을 이용하여 모델링한 후 가상 지진파를 입력하고 전파특성과 경로를 파악하려는 연구가 최근에 많이 시도되고 있다. 실용적인 결과를 얻기 위해서는 길이가 수 km 또는 수십 km에 이르는 방대한 영역을 요소화하여야 하는데 대부분 수백만 또는 수천만개의 자유도(degree of freedom)가 요구된다. 최근에는 Fourier 방법을 도입한 해석이 널리 활용되고 있는데 FEM 또는 FDM은 파장당 최소 9개의 절점이 필요하며 인위적인 분산(dispersion)이 불가피한 반면 Fourier 방법은 최소 2개까지 줄일 수 있으며 분산현상[1]이 없으므로 기억용량 및 계산시간의 절감, 정확성 등에서 매우 유리하다. 본 논문에서는 밀도와 음파의 전달속도가 위치에 따라 변하는 매질내의 음향파 및 탄성파의 전파를 Fourier 방법을 이용하여 해석하였다. 수치해석 방법의 검증을 위해 엄밀해가 있는 예제에 대해 결과를 비교하였는데 가장 단순한 불균일 매질의 모델로 볼 수 있는 두 개의 반 무한 재질의 결합을 예로 택하였는데 유체와 유체, 유체와 탄성체, 탄성체와 탄성체와의 결합을 고려하였다. 또한 지진파 해석시 기본적인 모델로

* 한국기계연구원 음향연구그룹

자주 사용되는 반 무한 탄성체 위에 두께가 유한한 탄성층이 결합된 경우도 해석하였는데 Fourier 방법에 의한 수치해석결과와 비교하였다.

2. 지배방정식

밀도와 음파의 전달속도가 위치의 함수인 유체의 파동방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \right) + S(x, z, t) = \frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (1)$$

단, p 는 압력, $S(x, z, t)$ 는 source 항, $\rho(x, z)$ 와 $c(x, z)$ 는 각각 밀도와 음속을 나타낸다. 매질이 반무한 또는 무한한 영역이라면 먼저 해석하고자 하는 영역을 선택하여야 하는데 Fourier 방법을 적용하기 위해서는 관심있는 영역을 충분히 포함하면서 직사각형(이차원인 경우)이 되도록 해야한다. 공간에 대한 미분항의 처리를 위해 Fourier 변환의 다음 특성을 이용한다.

$$F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx, \quad (i\xi)^n F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} \frac{\partial^n f}{\partial x^n} dx$$

먼저 $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right)$ 항의 경우를 고려하면 다음과 같은 순서를 따른다.

- (1) $p(x, z, t)$ 를 x 에 대해 Fourier 변환하여 $P(\xi, z, t)$ 를 구한다.
- (2) $(i\xi)P(\xi, z, t)$ 를 역 Fourier 변환하여 $\partial p / \partial x$ 를 구한다.
- (3) $\partial p / \partial x$ 에 $1/\rho(x, z)$ 를 곱하고 Fourier 변환한다.
- (4) (3)번에서 얻어진 항에 $(i\xi)$ 를 곱한 후 역 Fourier 하여 $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right)$ 를 구한다.

z 에 대한 미분항도 같은 요령으로 처리하며 실제 계산과정에서는 Fourier 변환 및 역 변환은 기존의 FFT 프로그램을 이용하였는데 효율성을 극대화하기 위해 x 와 z 방향으로의 요소수 N 은 2^n 개로 택하였다. 시간에 대한 미분항은 이차 유한차분법을 적용하였으며 정리하면 지배방정식은 다음과 같이 된다.

$$p_{n+1} = 2p_n - p_{n-1} + \frac{\rho c^2}{\Delta t^2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_n}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_n}{\partial z} \right) + S(x, z, n\Delta t) \right] \quad (2)$$

단, p_n 은 $t = t_n$ 에서의 값이며 Δt 는 시간의 증분을 나타낸다. 식 (2)의 해가 안정적으로 주어지기 위해서는 다음 관계[1]를 만족하도록 Δt 를 선택하여야 한다.

$$\frac{c\Delta t}{\Delta_d} < \frac{\sqrt{2}}{\pi} (\approx 0.45)$$

단, Δ_d 는 공간상에서의 절점간격이며 실제로는 $c\Delta t / \Delta_d < 0.2$ 가 되도록 시간증분을 택하는 것이 보통이다.

탄성파의 경우 지배방정식은 다음과 같이 된다.

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \rho f_x, \quad \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho f_z \quad (3)$$

여기서 u 와 w 는 각각 x 및 z 축으로의 변위이며 f_x, f_z 는 가진력을 나타낸다. 응력과 변위는 다음 식을 만족한다.

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \sigma_{zz} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \sigma_{xz} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (4)$$

단, λ 와 μ 는 Lamé의 상수이다. 공간에 대한 미분항의 처리는 음향파의 경우와 동일하다.

무한영역 중 유한한 영역만 모델링함으로써 발생하는 가장 큰 문제는 경계에서의 인위적인 반사현상("wrap-around")으로 반사파를 제거해 주지 않으면 시간이 흘러감에 따라 해는 완전히 반사파에 의해 오염되고 만다. 이는 FEM이나 FDM을 사용한 해석에서도 마찬가지로 나타나는 문제이며 반사파를 제거하기 위한 몇가지 방안이 제시되었다. Reynolds[2]는 경계영역에서 파동방정식을 반사가 없도록 형태를 변형하였는데 2차와 3차 공간의 일반적인 경우에는 적용하기가 쉽지 않다. Cerjan[3] 등은 해석하고자 하는 주변을 댐핑영역으로 감싸서 이 구간에서는 음파의 크기가 지수함수로 점진적으로 줄어들도록 하는 방법을 제시하였다. 본 논문에서는 Cerjan의 방법을 사용하였다.

3. 수치해석 예 및 엄밀해와의 비교

그림 1에 두가지 매질이 결합된 경우를 보였는데 빗금친 부분은 댐핑영역을 나타낸다.

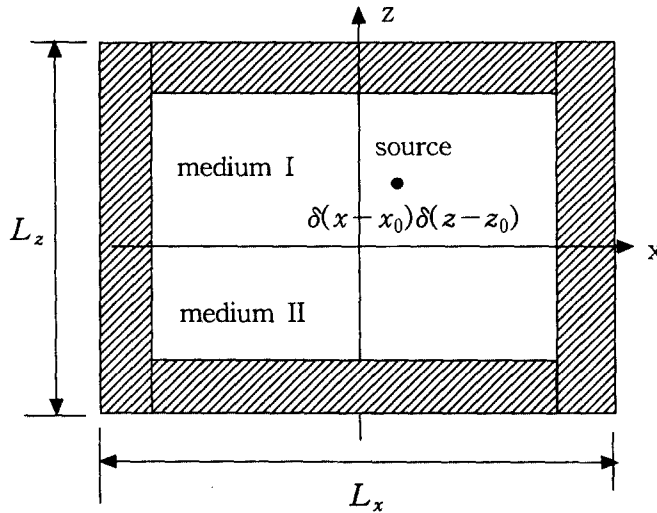


Figure 1. Typical model for two semi-infinite media in contact.

첫 번째 예로 두 개의 반 무한 유체가 결합된 경우를 고려하였는데 포인트 하중이 유체 I에 작용한다.

$$z > 0, \quad \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \delta(x - x_0)\delta(z - z_0)f(t) = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

$$z < 0, \quad \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

경계조건으로는 평면 $z=0$ 에서 압력과 수직방향의 속도성분이 같아야 한다.

$$\text{at } z=0, \quad p_1 = p_2, \quad \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial z} = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p_2}{\partial z}$$

수치해석에서는 다음과 같이 무차원화된 변수를 사용하였는데

$$x' = x/L_x, \quad z' = z/L_z, \quad c' = c/c_0, \quad t' = t/(c_0 L_x), \quad \rho' = \rho/\rho_0$$

여기서 L_x, L_z 는 모델의 길이를 나타내며 기본 변수로 $c_0 = 1 \text{ m/s}$, $\rho_0 = 1 \text{ kg/m}^3$ 를 사용하였다. (이후부터 prime 표시를 생략하였음). Fourier 방법을 적용한 면적은 $-0.5 < x, z < 0.5$ 이며 그리드 수는 128×128 , 시간 증분은 0.001 을 사용하였다. 밀도와 음파의 속도는 각각 다음과 같다.

$$\rho_1 = 1.0, \quad c_1 = 1.0, \quad \rho_2 = 1.5, \quad c_2 = 1.2$$

가진원으로는 다음과 같은 Ricker의 웨이브렛을 사용하였으며 여기서 $f_0 = 50 \text{ Hz}$, $t_0 = 0.06 \text{ sec}$ 을 선택하였다.

$$f(t) = \cos \pi f_0 (t - t_0) \exp(-0.5 f_0^2 (t - t_0)^2)$$

그림 2에 수치해와 엄밀해를 고정된 위치 $x=0.125$, $z=0.25$ 에서 시간의 함수로 비교하였는데 (단, 가진원의 위치는 $x_0=0$, $z_0=0.125$) 잘 맞음을 알 수 있다.

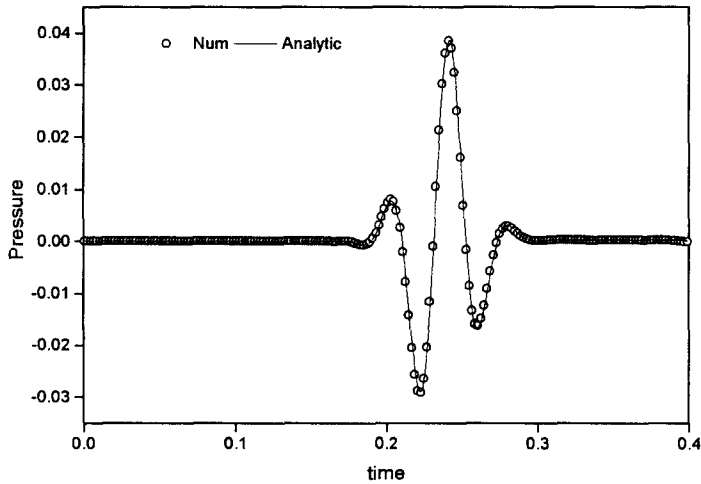


Figure 2. Pressure vs. time at the point $x=0.125$, $z=0.25$.

두 번째 예로 유체와 탄성체와의 결합을 고려하였는데 엄밀해는 참고문헌 [5]에 나와있다. 수치 해석에서 유체는 탄성체의 특별한 경우로 간주할 수 있으며 식 (4)에서 $\mu=0$ 로 택하면 normal 성분의 응력은 다음과 같이 부호가 반대인 압력이 되고 전단응력은 제로가 된다.

$$\sigma_{xx} = \sigma_{zz} = -p, \quad \sigma_{xz} = 0$$

또한 변위는 다음과 같이 된다.

$$\rho \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = -\nabla p$$

여기서 \vec{U} 는 속도 벡터이다. 그림 3에 고정된 시간 $t=0.4$ 에 대해 $0 < z < 0.3$ 을 따라 유체의 압력을 수치해와 엄밀해를 비교하였는데 $f(t) = H(t)$ (Heaviside step 함수), $x_0 = 0, z_0 = -0.125$ 이다. 유체와 탄성체의 재질은 각각 $\rho_1 = 1.0, c_1 = 0.7, \rho_2 = 1.5, \alpha_2 = 1.5, \beta_2 = 0.8$ 을 사용하였다 (α_2 와 β_2 는 재질 II의 P파와 S파의 전파속도). 그림 3에서 P파와 S파가 도달하는 특이점을 제외하고는 두 결과가 잘 일치함을 알 수 있다.

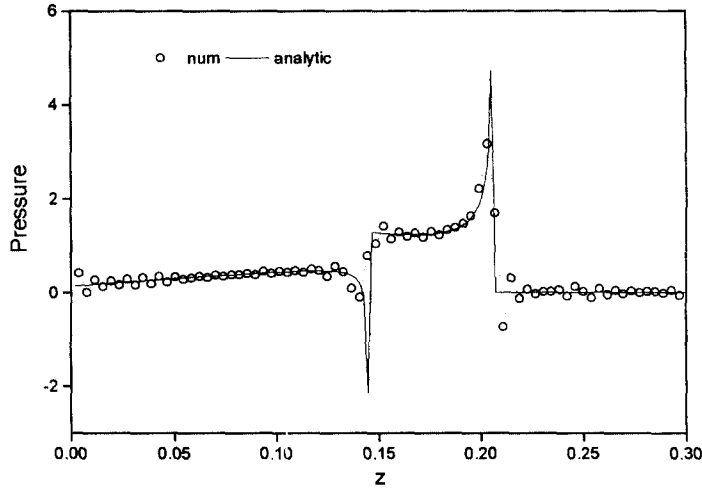


Figure 3. Pressure when $t=0.4$ and source function is $f(t)=H(t)$.

세 번째 예로 두 개의 반무한 탄성체가 결합된 경우를 고려하였다. 두 반무한 탄성체의 경우는 참고문헌 [6]에서 다루고 있으나 주로 shear dislocation을 고려하였을 뿐 일반적인 엄밀해가 명확히 유도되어 있지 않았으므로 여기에 다시 유도하였다. 탄성체에서의 파동방정식을 변위로 표현하면 포인트하중이 재질 I ($z > 0$)에 가해지는 경우 아래와 같이 주어진다.

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \alpha_1^2 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial z} \right) + \beta_1^2 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial z} \right) + \delta(x) \delta(x - z_0) f_z(t) \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = \alpha_1^2 \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial z} \right) + \beta_1^2 \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial z} \right) + \delta(x) \delta(x - z_0) f_z(t) \quad (6)$$

재질 II ($z < 0$)에 대해서도 유사한 형태의 방정식이 성립한다. 식 (5), (6)에 대해 시간에 대해서는 Laplace 변환을, x 에 대해서는 Fourier 변환을 적용한 후 이를 풀면 해는 다음과 같이 주어진다.

$$U_1^* = U_p^* + qA_1e^{-s\eta_\alpha z} + \eta_\beta A_2e^{-s\eta_\beta z}, \quad W_1^* = W_p^* + i\eta_\alpha A_1e^{-s\eta_\alpha z} + iqA_2e^{-s\eta_\beta z} \quad (7)$$

$$U_2^* = qB_1e^{s\gamma_\alpha z} + \gamma_\beta B_2e^{s\gamma_\beta z}, \quad W_2^* = -i\gamma_\alpha B_1e^{s\gamma_\alpha z} - iqB_2e^{s\gamma_\beta z} \quad (8)$$

단, $\eta_\alpha = \sqrt{q^2 + 1/\alpha_1^2}$, $\eta_\beta = \sqrt{q^2 + 1/\beta_1^2}$, $\gamma_\alpha = \sqrt{q^2 + 1/\alpha_2^2}$, $\gamma_\beta = \sqrt{q^2 + 1/\beta_2^2}$. U_p^* , W_p^* 는 식 (5), (6)의 특별해(particular solution)로 $z < z_0$ 인 경우 다음과 같이 주어진다.

$$U_p^* = qG_\alpha e^{-s\eta_\alpha(z_0-z)} + \eta_\beta G_\beta e^{-s\eta_\beta(z_0-z)}, \quad W_p^* = -i\eta_\alpha G_\alpha e^{-s\eta_\alpha(z_0-z)} - iqG_\beta e^{-s\eta_\beta(z_0-z)}$$

단, $G_\alpha = (-F_x q/\eta_\alpha + iF_z)/2s$, $G_\beta = (-F_x - iqF_z/\eta_\beta)/2s$

경계조건으로는 경계면에서 변위 및 응력이 같아야 한다.

$$u_1 = u_2, \quad w_1 = w_2, \quad \sigma_{xz}^1 = \sigma_{xz}^2, \quad \sigma_{zz}^1 = \sigma_{zz}^2$$

미지수 A_1, A_2, B_1, B_2 에 대한 조건식 4개를 구할 수 있으며 해는 다음과 같이 주어진다.

$$A_1 = r_{PP}^0 G_\alpha e^{-s\eta_\alpha z_0} + r_{SP}^0 G_\beta e^{-s\eta_\beta z_0}, \quad A_2 = r_{PS}^0 G_\alpha e^{-s\eta_\alpha z_0} + r_{SS}^0 G_\beta e^{-s\eta_\beta z_0}$$

$$B_1 = t_{PP}^0 G_\alpha e^{-s\eta_\alpha z_0} + t_{SP}^0 G_\beta e^{-s\eta_\beta z_0}, \quad B_2 = t_{PS}^0 G_\alpha e^{-s\eta_\alpha z_0} + t_{SS}^0 G_\beta e^{-s\eta_\beta z_0}$$

여기서 r_{PP}^0 는 경계면에서 P-P파의 반사계수, t_{SP}^0 는 S-P파로의 투과계수이며 다른 기호도 유사한 방법으로 정의된다. 반사 및 투과계수의 자세한 표현식은 참고문헌 [4]에 나와있다. 식 (7), (8)의 역 Laplace 및 Fourier 변환은 Cagniard-de Hoop 방법[4]을 이용하여 구할 수 있다.

재질 I이 두께가 유한한 경우인 적층된 반무한 탄성평면은 지진파해석시 기본모델로 자주 사용되는 구조인데 엄밀해를 구하는 과정은 반무한 탄성체 결합시와 유사하나 두께가 유한해지면 탄성파가 표면에서 반사되어 해가 매우 복잡해진다. 식 (7), (8)에 주어진 항외에 두개의 반사파 항이 추가되며 최종적으로 해는 무한 급수의 합으로 표현되며 각각의 항에 대해 Laplace 역변환을 구해야 한다.

수치해석 예로 다음과 같은 물성치를 고려하였다.

$$\text{재질 I } (z > 0) : \alpha_1 = 1.0, \beta_1 = 0.6, \rho_1 = 1.0$$

$$\text{재질 II } (z < 0) : \alpha_2 = 1.5, \beta_2 = 0.8, \rho_2 = 1.5$$

적층의 두께는 $H=0.2$ 이며 음원과 관측점은 $x_0=0$, $z_0=0.125m$, $x=z=0.0938m$ 이다. 격자는 $-0.5m < x, z < 0.5m$ 인 면적을 128×128 개로 나누었으며 시간 증분은 0.001sec로 하였다. 응력이 제로인 공간을 표현하기 위해 $0.2 < z < 0.5$ 인 영역은 Lamé의 상수를 제로로 취하였다. 그림 4에 두가지 경우($H=\infty, H=0.2$)에 대해 수치해와 엄밀해를 비교하였는데 $t=0.204$ 에서 처음 반사가 $H=0.2$ 에서 발생하기 까지 두가지의 해는 잘 일치함을 알 수 있다.

마지막 예로 그림 5와 같이 더욱 복잡한 구조를 고려하였는데 물리적 성질은 다음과 같다.

$$\text{재질 I : } \alpha_1 = 2700m/s, \beta_1 = 1600m/s, \rho_1 = 2200kg/m^3$$

$$\text{재질 II : } \alpha_2 = 4500m/s, \beta_2 = 2500m/s, \rho_2 = 2100kg/m^3$$

그림 6에는 특정 위치에서 응력의 변화를 보였는데 이는 추후 다른 해석(예를 들어 빌딩의 내진

해석 등)시 기본 입력자료로 활용될 수 있다.

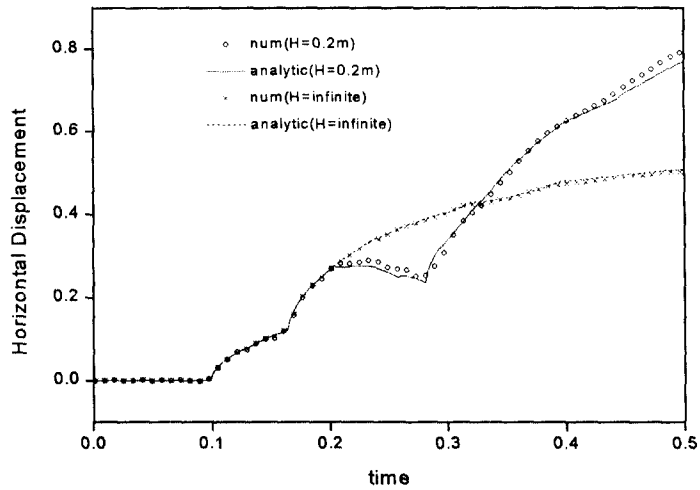


Figure 4. Comparisons of horizontal displacements.

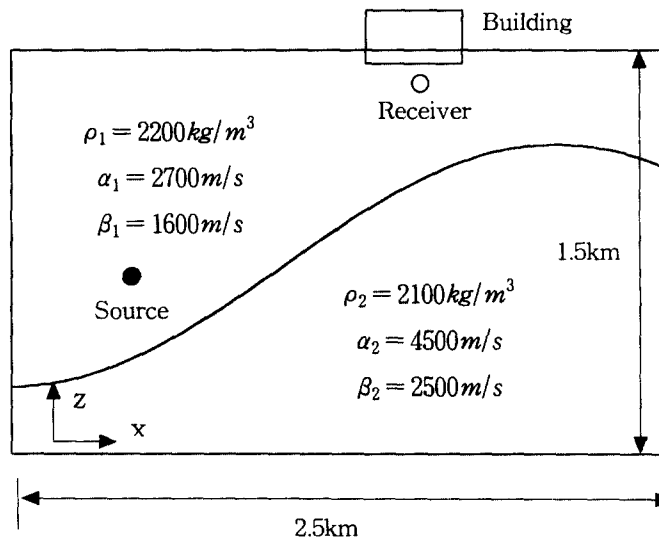


Figure 5. Model for continuously varying surface. The source and receiver positions are ; $x_0 = 0.5\text{km}$, $z_0 = 0.7\text{km}$, and $x = 1.5\text{km}$, $z = 1.45\text{km}$.

4. 결론 및 검토

본 논문에서는 밀도 및 음속이 위치에 따라 변하는 불균일 고체 및 유체내의 탄성파와 음향파 전파를 Fourier 방법을 이용하여 해석하였으며 또한 엄밀해와 비교하여 잘 맞음을 확인하였다.

Fourier 방법은 유체와 탄성체가 접한 경우에도 적용이 되며 다양한 실제 문제에 응용을 할 수 있다. 또한 본 연구에서 유도한 적층된 반무한 탄성면의 엄밀해는 새로운 수치해석방법의 검증 수단으로 이용되며 자체로도 유용한 해석결과로 활용된다.

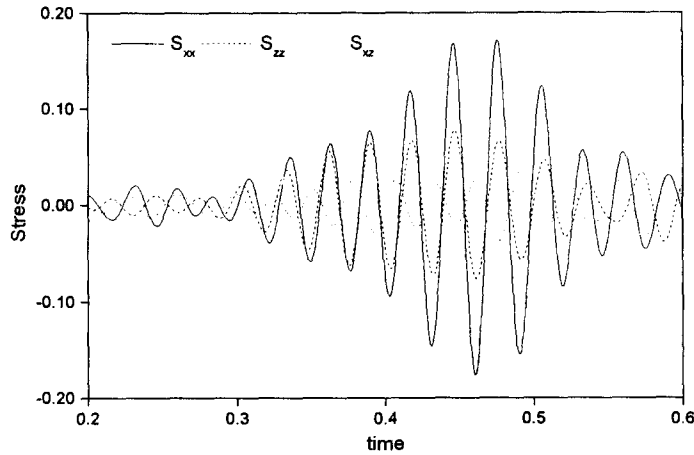


Figure 6. Stresses vs. time at the receiver position.

후 기

본 연구는 과학기술부에서 지원한 기관고유 연구사업의 일환으로 수행된 것임을 밝힌다.

참 고 문 헌

1. D. D. Kosloff and E. Baysal (1982), "Forward modelling by a Fourier method", *Geophysics*, Vol. 47, No. 10, pp. 1402-1412.
2. A. C. Reynolds (1978), "Boundary conditions for a numerical solution of wave propagation problems", *Geophysics*, Vol. 43, No. 6, pp. 1099- 1110.
3. C. Cerjan, D. Kosloff, R. Kosloff, and M. Reshef (1976), "A nonreflecting boundary condition for discrete acoustic and elastic wave equations", *Geophysics*, Vol. 50, No. 4, pp. 705-708.
4. K. Aki and P. G. Richards (1980), *Quantitative Seismology, Theory and Methods, Volume I*, W. H. Freeman and Co.
5. A. T. de Hoop and J. H. van der Hirde (1983), "Generation of acoustic waves by an impulsive line source in a fluid/solid configuration with a plane boundary", *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 74, pp. 333-342.
6. A. Ben-Menahem and M. Vered, "Extension and interpretation of the Cagniard-Pekeris method for dislocation sources", *Bull. Seism. Soc. Am.* Vol. 63, pp. 1611-1636.