

전달함수를 이용한 펌프(50Hp)의 진동가진력 산정

Estimation of Pump Induced Vibration Force Using Transfer Function

노병철*

Lho, Byeong-Cheol

이호범**

Lee Ho-Beom

ABSTRACT

Dynamic loads may arise from rotating parts of pump if they are insufficiently balanced. The magnitude of pump induced vibrations varies according to the weight, eccentricity, and unbalanced mass of pump. This is a study to estimate the pump induced vibration in time and frequency domain by transfer function. The transfer function has real and imaginary information of signals, and response function has also real and imaginary information. So the vibration force can be obtained from the response and transfer function by complex calculation. The amplitudes and components of 50Hp pump vibration force are suggested.

1. 서론

일반적인 진동제어의 기본 개념은 계의 고유진동수와 외력의 가진진동수 사이의 공진현상을 회피하는 것이며, 이러한 관점에서 진동수영역에서의 계의 고유진동수 및 가진진동수 성분이 주요 관심대상이 되므로, 입력가진과 계의 응답을 진동수별로 구분함으로써 진동에 대한 물리적 감각을 향상시킬 필요성이 있다. 따라서 본 연구에서는 건물내부의 50 Hp 펌프를 대상으로 관심이 있는 두지점 간의 전달함수와 대상 가진원에 의한 진동응답을 측정하고, 이들이 가지고 있는 복소수 정보로부터 미지의 가진력에 대한 진동수 영역에서의 값을 구하며, 이를 역 FFT함으로서 시간 영역에서의 가진력을 구하는 것을 본 연구의 목적으로 한다.

2. Fourier 해석

Fourier 급수는 임의의 주기함수를 무한개의 정현파 및 여현파함수의 급수로 나타내는 것으로, 함수 $F(t)$ 의 Fourier 급수를 Euler 방정식을 이용하여 삼각함수를 지수형으로 바꾸면 식 (2.1) 또는 식 (2.2)와 같이 된다.

$$\begin{aligned} F(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-in\bar{\omega}t} + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^* e^{in\bar{\omega}t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\bar{\omega}t} \end{aligned} \quad (2.1)$$

여기서, $c_0 = a_0$, $c_n = (a_n - ib_n)/2 = C_n/2$, $c_n^* = (a_n + ib_n)/2$

$$F(t) = Re \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\bar{\omega}t} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (C_n e^{in\bar{\omega}t} + C_n e^{-in\bar{\omega}t}) \quad (2.2)$$

여기서, R_e : 실수부

* 정회원, 상지대학교 토목공학과 조교수

** 정회원, 삼성물산 건설부문 기술연구소 수석연구원

식 (2.2)에서 C_n 은 식 (2.3)와 같이 되며, Fourier 급수의 계수를 진동수 ω_n 에 대하여 도시하면, 그 결과는 불연속선의 나열로 된다. 이를 Fourier spectrum이라고 하며, 일반적으로는 $|C_n| = |2c_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ 과 위상 $\varphi = \tan^{-1}(b_n/a_n)$ 을 도시하게 된다.

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} F(t) (\cos n\bar{\omega}t - i \sin n\bar{\omega}t) dt \right) \\ &= \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} F(t) e^{-in\bar{\omega}t} dt \end{aligned} \quad (2.3)$$

3. FFT분석기를 이용한 신호처리 및 계의 분석

시간영역에서의 계의 입력신호 및 출력신호는 신호의 복합적인 성질때문에 계의 거동을 이해하거나 해석하는데 어려운 점이 있다. 따라서 2 채널 FFT분석기를 이용하여 진동수영역에서 계의 진동수응답함수를 서술하기 위하여 power 스펙트럼이나 cross properties 분석을 할 필요가 있다. 진동수응답함수의 일반적인 정의는 식 (3.1)과 같으며, 입력신호 $A(t)$ 의 Fourier변환과 출력신호 $B(t)$ 의 Fourier변환은 식 (3.2)와 같다.

$$\text{전달함수} = \frac{\text{출력함수}}{\text{입력가진력}} \quad (3.1)$$

$$F[A(t)] = S_A(j\omega) = a + jb \quad (3.2)$$

$$F[B(t)] = S_B(j\omega) = c + jd$$

따라서 입력과 출력에 대한 평균 power 스펙트럼(averaged power spectrum)은 식 (3.3) 및 식 (3.4)와 같다.

$$G_{AA}(\omega) = S_A(j\omega) \cdot S_A(j\omega)^* = (a + jb)(a - jb), \quad \overline{G_{AA}(\omega)} = \overline{a^2 + b^2} \quad (3.3)$$

$$G_{BB}(\omega) = S_B(j\omega) \cdot S_B(j\omega)^* = (c + jd)(c - jd), \quad \overline{G_{BB}(\omega)} = \overline{c^2 + d^2} \quad (3.4)$$

식 (3.3) 및 식 (3.4)에 의한 값은 위상에 대한 정보를 갖지 못한다. 그러나, 두 신호의 인과 관계를 적절히 이용하면, 식 (3.5) 및 식 (3.6)과 같이 cross property를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} G_{BA}(\omega) &= S_B(j\omega) \cdot S_A(j\omega)^* = (c + jd)(a - jb) \\ \overline{G_{BA}(\omega)} &= \overline{(ac + bd) + j(ad - bc)} = \text{Re } G_{BA}(\omega) + j \text{Imag } G_{BA}(\omega) \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\varphi(\omega) = \tan^{-1} \frac{\text{Imag } G_{BA}(\omega)}{\text{Re } G_{BA}(\omega)} \quad (3.6)$$

입력신호 A에 대한 출력신호 B의 cross spectrum과 위상은 2채널 cross property 측정에 있어서 가장 중요한 것이다. 이 함수들은 응답신호 B에서의 mutual power를 나타내며, 참고입력신호 A와 안정된 위상관계가 있음을 나타낸다. 안정된 위상관계를 가지고, 실수 및 허수성분은 상호간 성질의 향상을 위하여 평균화되어야 한다. 실험대상이 되는 계에 대한 응답스펙트럼 크기의 변화를 결정하기 위하여 진동수응답함수를 측정함으로써 계의 입력에 대한 출력특성을 구하여야 한다. 이러한 진동수응답함수는 식 (3.7)과 같이 정의한다.

$$TF_{MAG} = H(\omega) = \frac{S_B(j\omega)}{S_A(j\omega)} = \frac{S_B(j\omega) \cdot S_A(j\omega)^*}{S_A(j\omega) \cdot S_A(j\omega)^*} = \frac{S_B(j\omega) \cdot S_B(j\omega)^*}{S_A(j\omega) \cdot S_B(j\omega)^*} \quad (3.7)$$

식 (3.7)에서 분자의 cross spectrum은 입력 power spectrum으로 정규화되거나 분자의 power

spectrum이 입력 cross spectrum으로 정규화됨을 나타내고 있으며, 결과는 입력 power 스펙트럼에 대한 출력 power 스펙트럼의 단순한 비(반대의 경우도 성립)로서 전달률(transmissibility)과 비교되는 진동수응답함수가 된다. 식 (3.7)의 $H(\omega)$ 는 실험대상인 계의 진동수응답함수이며 선형적이다. 또한 이 진동수응답함수의 위상스펙트럼은 식 (3.6)에 나타낸 바와 같다.

4. 이론적 접근방법에 의한 펌프 가진력의 산정

이론적 접근방법에 의한 펌프 가진력은 펌프 제작시 발생하는 편심질량(m)이 회전축으로부터 떨어진 거리(e)에서 회전함에 따라 회전각속도(ω)의 제곱에 비례하는 원심력을 유발함에 따라, 펌프에 의한 가진력 F 는 식 (4.1)에 의하여 구할 수 있다.

$$F = me\omega^2 \quad (4.1)$$

그러나 편심질량의 크기는 제작사에서 제시하기는 하나 가진력을 구할 수 있을 정도로 정확하게 제시되지는 않으며, 출고시 제시된 편심값의 정확도는 물론 장기간 사용 후에는 그 값이 일반적으로 증가하므로 이로부터 가진력을 정확히 산정하는 것은 무리가 있다. 한편, VDI(Verein Deutscher Ingenieure)에서 제시한 방법에 따르면 평형정도(balancing grade)를 회전기기 및 장비에 따라 구분하고 식 (4.2)를 이용하여 가진력을 산정하도록 제시한 바 있으나, Q값이 등급화되어 있는 값이므로 정밀해석을 위한 가진력을 산정할 수 있을 정도로 세분화하지는 않은 것으로 판단된다.

$$F = m(e\omega)\omega = \frac{W}{g} Q\omega = \frac{W}{g} Q(2\pi f) \quad (4.2)$$

여기서, Q : 평형정도에 따른 값 (mm/s), W : 편심중량 (kgf), g : 중력가속도 (mm/s^2)

5. 실험적 접근 방법에 의한 펌프 가진력의 산정

모드실험을 위한 구조물의 가진방법은 여러가지가 있으며, 본 연구에서는 충격햄머에 의한 충격시험기법을 이용하였다. 충격햄머시험의 유용성은 가진에너지가 정현파 가진력의 경우처럼 특정진동수대에 있는 것이 아니라, 가용진동수 영역내에 연속적으로 분포해 있다는 점이며, 이러한 충격력은 가용진동수 범위내에 있는 모든 고유진동형을 발생시킬 수 있으며, 가진방법이 비교적 간편하다는 장점이 있다. 충격햄머가 가지고 있는 동적특성은 구조물을 가진시키는 선형충격량의 크기를 결정하며, 이로부터 충격력의 크기와 가용진동수범위가 결정된다. 일반적으로 가진진동수 범위는 햄머의 질량에 반비례하고 팁의 경도에 비례하는 것으로 알려져 있다. 따라서 햄머의 질량에 따라 충격력의 크기가 좌우되므로, 본 연구에서는 건물내부의 진동에 대한 영향을 주로 고려하므로 관심진동수영역을 200 Hz이하의 진동수로 선정하고, 매우 무른 팁과 무게가 비교적 큰 충격햄머를 이용하여 가능한 큰 에너지를 갖는 저진동수의 가진을 입력가진력으로 사용하였다.

한편 가진력은 식 (5.1)에 나타낸 바와 같이 기지의 가진력에 대한 진동가속도를 측정하여 구한 accelerance와 현재 발생되고 있는 진동가속도의 함수로 나타낼 수 있다.

$$R = H \cdot F \quad (5.1)$$

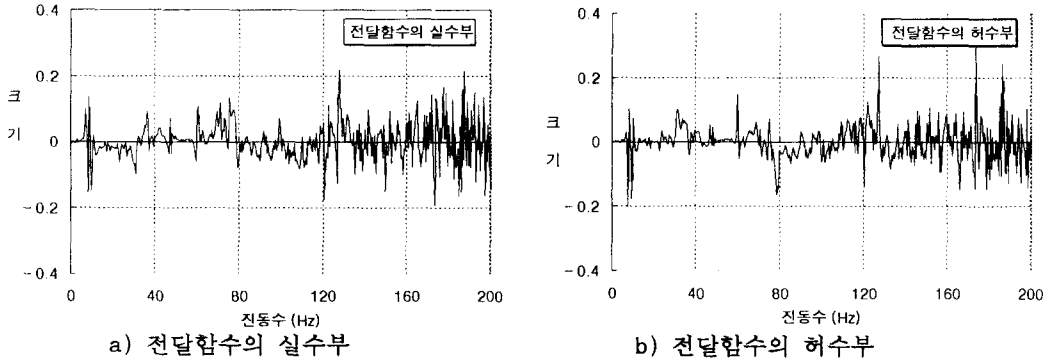
여기서, F : 가진력, H : 전달함수, R : 진동 가속도 응답

식 (5.1)의 변수는 진동수영역에서의 값이며, 실제적으로 복소수로 나타내어져야 한다. 만약 펌프근처와 콘크리트 바닥 슬래브간의 전달함수를 알 수 있다면, 일정 두 점간의 전달함수의 유일성에 근거하여 미지의 가진력을 구할 수 있을 것이다. 따라서 두 점간의 전달함수(accelerance)를 측정하기 위하여 펌프근처의 지정된 지점에 충격햄머로 진동을 주고, 이때 바닥 콘크리트 슬래브상의 지정된 지점에서의 가속도를 측정함으로써 지정된 두 점간의 전달함수를 구할 수 있다. 즉, 충격햄머에 의한 가진력은 진동수영역에서 $F = a + jb$ 로 나타낼 수 있으며, 이에 의한 가속도응답은 진동수 영역에서 $R = c + jd$ 로 나타낼 수 있다. 그림 5.1은 충격햄머로 펌프 근처를 가진하고 바닥 콘크리트 슬래브에서의 진동 가속도 응답으로부터 구한 전달함수의

실수 및 허수부에 대한 그림이다. 그러므로 이들간의 전달함수는 식 (5.2)와 같이 나타낼 수 있다.

$$H = \frac{a+jb}{c+jd} = \frac{(a+jb) \times (c-jd)}{(c+jd) \times (c-jd)} = \frac{(ac+bd)}{(c^2+d^2)} + j \frac{(bc-ad)}{(c^2+d^2)} = A + jB \quad (5.2)$$

한편, 펌프 가동중에 대한 바다 콘크리트 슬래브의 지정점에서 측정된 가속도 응답을 $R' = c' + jd'$ 이라 하고, 이때의 구하고자 하는 미지의 펌프 가진력을 $F' = a' + jb'$ 이라 한다면, F' 은 식 (5.3)과 같이 구할 수 있다.



a) 전달함수의 실수부

b) 전달함수의 허수부

그림 5.2 전달함수의 실수부 및 허수부(50 Hp 펌프)

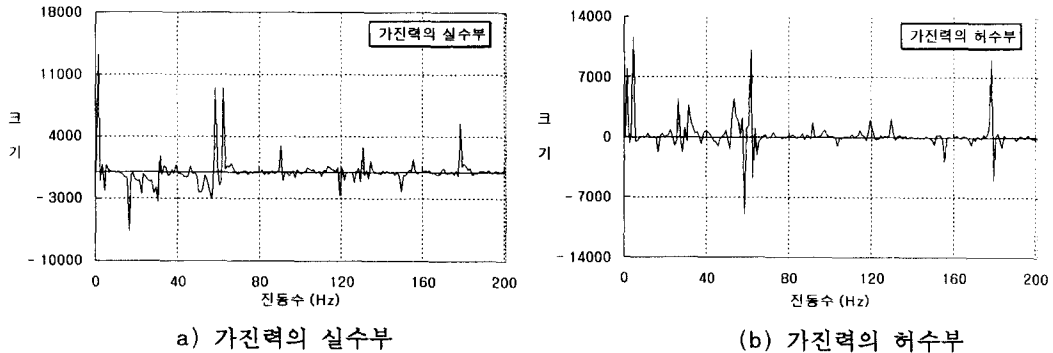
$$F' = \frac{R'}{H} \quad (5.3)$$

식 (5.3)에서 H 는 식 (5.2)로부터 이미 구한 기지의 값이므로, 미지의 가진력(펌프에 의한 가진력)의 진동수 성분은 식 (5.4)와 같이 정리할 수 있다.

$$F = \frac{(c' + jd')}{A + jB} = \frac{(c'A + d'B)}{(A^2 + B^2)} + j \frac{(c'B - d'A)}{(A^2 + B^2)} = C + jD \quad (5.4)$$

식 (5.4)에 나타낸 가진력 성분은 진동수영역에서 표현된 것으로, 진동수에 따른 크기 ($\sqrt{C^2 + D^2}$) 및 위상각 ($\theta = \tan^{-1} \frac{D}{C}$) 정보를 가지고 있게 된다. 한편, 이를 역 FFT하면 시간영역에서의 가진력 성분으로도 환산할 수 있다.

그림 5.2는 이로부터 구한 가진력의 실수부 및 허수부를 나타낸 것이고, 그림 5.3 및 5.4는 이 결과로부터 구한 실험적 가진력의 진동수 및 시간영역에서의 성분을 나타낸 것이다.



a) 가진력의 실수부

(b) 가진력의 허수부

그림 5.3 가진력의 실수부(50 Hp 펌프)

그림 5.3에 나타낸 바와 같이 시간영역에서의 가진력은 290 kgf ~ 323 kgf 정도 발생하는 것으로 분석된다. 또한 그림 5.4에서 가진력은 29.5 Hz일 때 120.24 kgf, 59.0 Hz일 때 32.2 kgf,

89.0 Hz일 때 102.28 kgf가 비교적 크게 작용함을 알 수 있었으며, 여러종류의 가진 성분이 있으나 펌프의 주회전수 성분과 이의 2~4배의 진동수성분을 갖는 가진원도 영향력이 있음을 알 수 있다. 표 5.1에는 국내에서 생산되고 있는 펌프의 마력수에 따른 이론적 가진력을 전술한 방법에 의하여 구한 것이다. 그림 5.5는 표 5.1를 도시한 것으로 가진력 산출방법에 따라 큰 편차가 있음을 알 수 있으며, 평형등급개념을 이용하여 산정한 값은 일반적으로 사용되어 왔던 펌프중량의 9%~30% 사이의 값을 나타내고 있음을 알 수 있다.

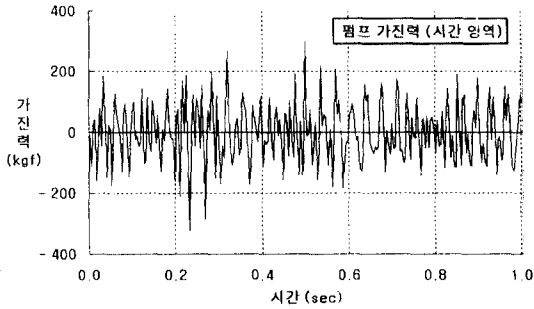


그림 5.3 펌프가진력(시간영역, 50Hp)

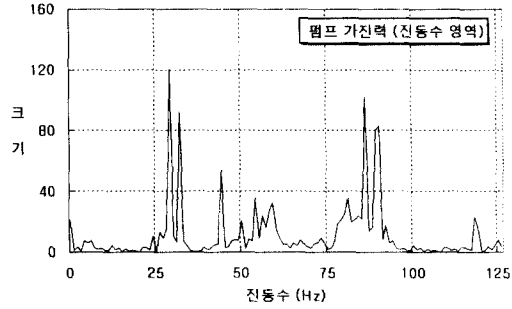


그림 5.4 펌프가진력(진동수영역, 50Hp)

표 5.1 펌프의 가진력 산정 (29.5 Hz인 경우)

내용 펌프 종류 (Hp)	가진력의 크기(kgf)			펌프 중량 kgf
	평형등급개념 이용	펌프 중량의 9%	펌프 중량의 30%	
150	218.5	167.0	556.8	1,856
100	100.1	76.5	255.0	850
75	74.7	57.2	242.5	808
50	64.8	49.5	165.0	550
25	48.3	36.9	123.0	410
20	33.0	25.2	84.0	280
10	30.0	23.0	76.5	255

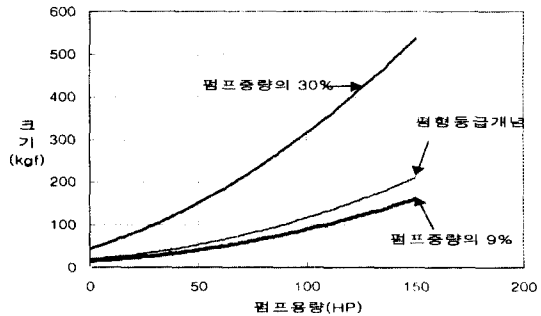


그림 5.5 여러가지 방법에 의한 가진력

표 5.2는 본 연구에서 측정한 50Hp의 펌프의 가진력을 기존의 이론적 방법에 의하여 도출한 값과 비교한 것으로, 본 연구에 의한 가진력 산정법은 기존의 방법과 달리 모터의 극수에 관계된 가진력이 존재함을 나타내고 있다. 물론 이들 가진력 사이에는 각자의 위상각을 가지기 때문에 펌프가진력은 나타난 값들의 단순한 산술합이 되지 않는 것이라 사료된다.

표 5.2 펌프 가진력 비교

본 연구	가진력 1	진동수(Hz)	29.5	기존 펌프가진력 산출 방법 에 의한 가진력	평형등급개념이용	진동수(Hz)	29.5
		크기 (kgf)	120.2		크기 (kgf)	64.8	
	가진력 2	진동수(Hz)	59.0		펌프중량 의 9%	진동수(Hz)	29.5
		크기 (kgf)	32.1			크기 (kgf)	49.5
	가진력 3	진동수(Hz)	86.0		펌프중량 의 30%	진동수(Hz)	29.5
		크기 (kgf)	102.2			크기 (kgf)	165.0

그림 5.6은 본 연구에서 실험적으로 산정한 진동가진력 성분중 몇 개의 중요성분(모터 회전수, 회전수의 2~3배 진동수)이 동일 위상각 차로 가진된 가상의 경우, 모터의 회전수를 기준으로 하

여 이론적 방법에 의하여 산정된 가진력 및 실험적으로 산정된 가진력 성분을 시간영역으로 역 FFT 하여 산정한 가진력의 차이를 펌프 용량별로 비교한 것이다.

즉, 펌프에 의한 가진력은 주요 3~4개의 진동수 성분이 동일 위상각을 가지고 가진된다고 보아도 큰 무리가 없으며, 개략적인 계산을 위한 가진력산정을 위한 개략식은 펌프중량의 10~25 % 정도를 가진력이 모터의 주진동수에 관계하여 진동하고, 이에 배수되는 진동수 성분은 약 2~15% 정도까지 추가로 고려하는 것이 바람직한 것으로 판단된다. 이는 시간영역에서의 가진력 값이 323 kgf 정도(펌프 및 모터중량의 30~60% 수준)가 되는 것을 보아도 알 수 있다. 따라서 시간영역에서의 분석을 위해서는 시간영역으로 역 FFT한 자료를 활용하는 것이 가장 바람직할 것으로 판단된다.

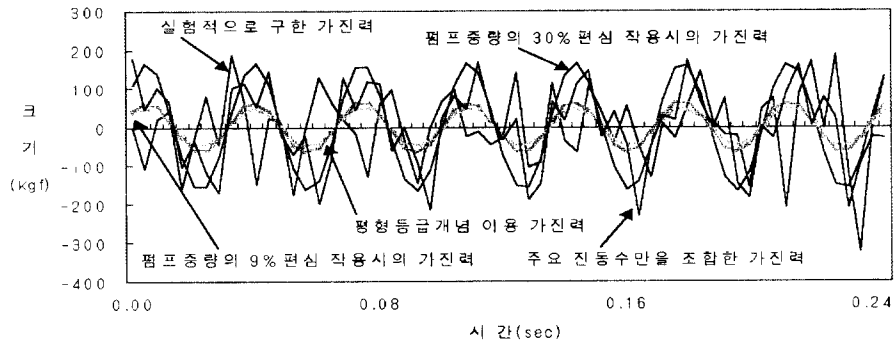


그림 5.6 50 Hp 펌프가진력 비교 (시간영역)

한편, 평형등급 개념을 이용할 경우 Q의 값이 6.3 mm/s이라 가정하면 펌프 중량의 12%정도가 진동발생에 기여함을 알 수 있다. 그러나 이 방법도 펌프의 분당회전수만의 함수로 표시되므로, 가진력의 진동수를 고려한 진동제어를 위해서는 바람직하지 않은 것으로 판단된다. 따라서 정확한 진동제어를 위한 상세한 가진력의 산정을 위해서는 본 연구에서 제안한 전달함수개념을 이용한 산정방법을 사용하는 것이 바람직하다.

6. 결론

시간 및 진동수영역에서의 펌프 가진력을 구하였으며, 펌프 가진력의 진동수성분은 펌프의 회전수 이외에도 회전수에 2~4배가 되는 가진성분이 작용하고 있음을 실험적으로 구명하였으며, 이론적인 방법과 실험적인 방법에 의하여 가진력을 구하였으며, 이론적인 방법으로 구한 값과 실험값과를 비교하여 실험적으로 구한 값의 타당성을 입증하였다. 향후 여러종류의 펌프에 대하여 펌프중량, 진동수 대비 가진력 범위 및 기타 토목구조물에 가해지는 가진력에 대한 지속적인 연구가 필요한 것으로 판단된다.

감사의 글

본 연구는 삼성물산 건설부문 기술연구소의 지원에 의한 것으로 이에 감사드립니다.

참고문헌

1. 小野介嗣, 精密防振ハンドブック, フジテクノシステム(株), 1987, pp. 80~472.
2. Randall, R. B., Frequency Analysis, Brüel & Kjaer, Sept. 1987. pp. 11~15.
3. 변근주, 노병철, 이현주, "전달함수법에 의한 콘크리트슬래브의 동특성 해석", 1993년 학술 발표회 개요집(1), 1993, pp. 87~90.
4. Ewins, D. J., Modal Testing : Theory and Practice, Research Studies Press Ltd., 1984, pp. 1~264.