

# $H_\infty$ 제어알고리즘을 이용한 구조물의 진동제어

## Structural Vibration Control with $H_\infty$ Control Algorithm

고현무\*      박관순\*\*      박원석\*\*\*  
Koh, Hyun Moo    Park, Kwan Soon    Park, Wonsuk

---

### ABSTRACT

Mathematical model can be obtained by physical law or engineering theory. However it is always incomplete expression of the real system. In active controls to suppress vibration due to earthquake or wind load, modeling errors can often cause the problems of instability and performance degradation.

In this paper, robust optimal controller design method using  $H_\infty$  control theory is developed for the systems which have uncertain natural frequency and design constraints. Numerical results show that the proposed  $H_\infty$  controller can avoid the performance degradation due to several errors and has better performance than conventional LQR method.

---

### 1. 서론

구조물의 해석, 설계 및 시공기술이 발달함에 따라 현대 구조물들은 장대화되는 경향을 나타내고 있다. 일반적으로 이러한 장대구조물들은 종래의 구조물에 비하여 감쇠비가 낮고 유연하므로 불규칙한 외부하중에 의한 진동발생 가능성이 커지게 된다. 따라서 장대구조물의 진동을 억제하는 효율적인 방법의 하나로 진동제어의 원리가 도입된 이래 사용하중, 풍하중 뿐만 아니라 지진등에 대해서도 적용성이 뛰어나고 구조물의 고차진동모우드까지 유효한 능동제어시스템이 연구되고 있으며 이미 많은 고층건물과 시공중인 교량의 진동문제에 적용되었다.

이러한 능동제어시스템의 도입을 통한 구조제어의 목표는 제어법칙에 의하여 얻어진 보상기를 원시스템에 첨가함으로써 외란에 의한 시스템의 응답을 감소시켜 구조물의 안정성과 사용성을 확보하고자 하는 데에 있다. 제어기의 설계를 위해서는 시스템을 표현하는 수학적 모델이 필요하나

---

\* 서울대학교 토목공학과 교수, 정회원  
\*\* 서울대학교 토목공학과 박사후 연구원  
\*\*\* 서울대학교 토목공학과 박사과정

물리법칙이나 공학적 이론에 의하여 구성된 모델은 실제 시스템의 불완전한 묘사일 뿐이므로 모델링 오차를 고려하지 않은 제어기 설계는 제어기구의 설치에도 불구하고 만족스러운 제진효과를 얻지 못할 뿐만아니라 전체시스템을 불안정하게 할 수도 있다. 이 연구에서는 제진기구로서 Hybrid Mass Damper(HMD)를 사용한다. HMD는 부가질량의 운동을 이용하여 구조물의 진동을 제어하는 복합형제진기구의 일종으로 질량체의 움직임을 위하여 일정공간이 필요하게 된다. 따라서 HMD의 변위는 제어기 설계에 있어서 중요한 제한조건이 된다.

이 연구에서는 구조제어를 위한 제어기의 설계에 있어서 시스템의 모델링과정에서 발생하는 모델오차에 의한 불확실성과 설계제한조건을 동시에 고려할 수 있는 제어기의 설계방법을 제시한다. 제어이론으로는  $H_\infty$  최적제어방법을 사용하여 시스템의 안정도(stability)와 제어기의 제어성능에 대한 강인성(robustness)을 갖도록 하였으며, 성능조건을 설계에 반영하기 위하여 Bilinear Transform 을 사용한다.

수치예제를 통하여 모델오차가 존재하는 시스템에 대하여 일반적인 LQR(linear quadratic regulator)방법과 비교함으로써 제시한 설계방법의 제진성능을 검증한다.

## 2. 모델링오차를 고려한 $H_\infty$ 제어기

일반적으로  $n$ 개의 자유도를 가지고  $q$ 개의 지점에서 외부하중을 받으며  $m$ 개의 제어력을 구조체의 운동방정식은 다음 식(1)과 같은 상태공간방정식(state space equation)으로 나타낼 수 있다.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_w f(t) + B_u u(t) \quad (1)$$

여기서  $x(t)$ 는 구조물의 변위와 속도로 구성된 상태벡터(state vector,  $2n \times 1$ )이고,  $f(t)$ 는 외부 하중벡터( $q \times 1$ ),  $u(t)$ 는 제어력( $m \times 1$ )을 의미하며,  $A$ 는 시스템행렬( $2n \times 2n$ )이라고 하며 정의된 행렬들은 다음 식(2)와 같다.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}, \quad B_w = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}b_1 \end{bmatrix}, \quad B_u = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}b_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

식 (2)에서  $M, K, C, I, 0$ 는 각각 질량, 강성, 감쇠, 단위, 영행렬이고,  $b_1, b_2$ 는 작용하는 외부 하중과 제어력의 위치를 나타내는 행렬이다. 식(1)로 표현된 시스템에 대하여 동적 보상기설계를 위한 2 port plant는 다음 식(3)과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1 w(t) + B_u u(t) \\ z(t) &= C_1 x(t) + D_{11} w(t) + D_{12} u(t) \\ y(t) &= C_2 x(t) + D_{21} w(t) + D_{22} u(t) \end{aligned} \quad (3)$$

식(3)에서  $w(t) = [f(t), v(t)]^T$ 로서 외부교란벡터이고,  $v(t)$ 는 출력벡터인  $y(t)$ 에 따른 센서 잡음벡터,  $z(t)$ 는 제어변수벡터이다.

구조물의 모델링오차가 어느 한계내에 있다고 가정하고 그 한계내에서 강인성을 갖는 제어기를 구성하기 위하여, 모델링오차의 한계를 설정할 수 있다. 구조물의 고유진동수에 오차가 있다고 하면 교란된 모델을 다음 식(4)와 같이 쓸 수 있다.

$$\tilde{M} = M + \Delta M, \quad \tilde{K} = K + \Delta K \quad (4)$$

식(4)에서  $\Delta M, \Delta K$ 는 질량과 강성행렬의 오차로 설계목적에 따라서 그 범위를 설정한다. 식(4)에 의하여 설정된 교란모델을 이용하여 고유진동수의 오차량 외란의 형태로 모델링하면 식(3)에서  $B_1, C_1, D_{12}$ 행렬을 결정할 수 있으며  $C_2$ 와  $D_{21}$ 은 측정센서의 위치와 상태변수에 따라서 정해진다.

모델링 오차  $\Delta_p$ 와 측정출력에 발생하는 센서잡음을 외부교란으로 모델링한 경우에 대하여 강인제어기  $K(s)$ 를 구하기 위한 블록선도를 그림 1에 나타내었다.  $\rho$ 는 상대가중변수<sup>(1)</sup>로서 제어력에 대한 가중치를 의미한다.

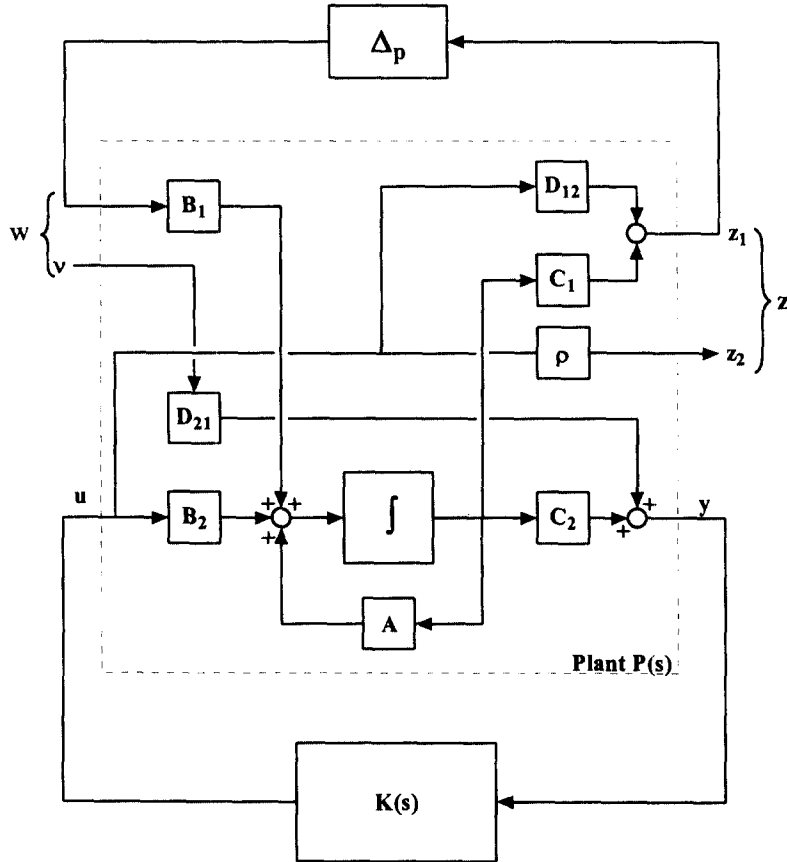


그림 1. 강인제어기의 설계를 위한 블록선도

$H_\infty$  제어방법<sup>(4)</sup>에서, 그림 1과 식(3)으로부터  $w$ 에서  $z$ 로의 페루프 전달함수인  $T_{zw}(j\omega)$ 의  $H_\infty$  놈(norm)  $\|T_{zw}(j\omega)\|_\infty = \|\Delta_p; \rho u\|_\infty \leq 1$ 을 만족하면서 제어플랜트  $P(s)$ 를 안정화하는 제어기  $K(s)$ 를 구할 수 있다.

그러나 제어대상인 구조물은 자체적으로 보유하고 있는 감쇠능력으로 인하여 안정한 시스템이므로 모든 극점이 복소평면의 좌측에 존재한다. 이 시스템의 극점들을 Bilinear Transform을 이용하

여 불안정한 영역에 배치하여 불안정한 시스템으로 만든 다음, 변환된 시스템을 안정화시키는 제어기를 설계하는 방법을 사용하였다<sup>(2),(5)</sup>.

### 3. 수치예제 및 해석결과

해석대상 구조물로서 인천국제공항 관제탑<sup>(5)</sup>을 선정하고 Hybrid Mass Damper를 사용하여 제어기를 설계하였다. 구조물의 동적거동은 1차모우드가 지배적이라고 가정하고 1차모우드에 대하여 설계하였으며 모달질량은 1082.2ton, 고유진동수는 0.77Hz, 모달감쇠비는 1%로 하였다. 그림 2에 HMD가 설치된 2자유도해석모델을 나타내었다.

그림 2에서  $r_1$ 은 지반에 대한 구조물의 상대변위,  $r_2$ 는 구조물에 대한 HMD의 상대변위를 의미한다. HMD의 설계에 있어서 수동형에 해당되는 Tuned Mass Damper (TMD)의 설계인자는 Den Hartog의 최적식을 사용하였으며, 이때 질량비는 1%의 값을 사용하였다. 표 1에 TMD의 설계값을 나타내었다.

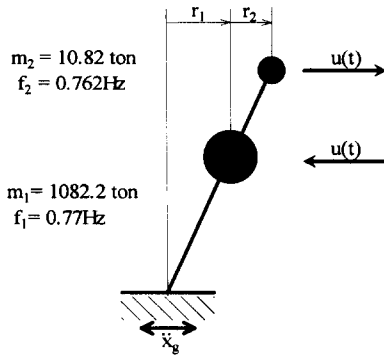


그림 2. HMD가 설치된 해석모델

표 1. 대상구조물의 TMD설계값

TMD의 질량	10.82ton
최적 진동수비	0.99
TMD의 고유진동수	0.762Hz
TMD의 최적감쇠비	6.03%

$H_\infty$ 제어기에서 강인성을 위하여 고려된 고유주기의 오차는 10%이며, 제어기의 성능조건으로는 목표감쇠비를 10%로 하였다. 또한 제시한 방법과 비교하기 위하여 LQR방법을 사용하여 동일한 수치모델에 대하여 제어기를 설계하였다. LQR방법을 사용한 제어기의 설계에 있어서는 정현지진과 입력에 대하여 두 방법간에 동일한 크기의 최대진폭을 갖도록 하였다.

설계된 제어기의 응답특성을 알아보기 위하여 0.1g의 진폭을 갖는 정현파 가속도를 가진 주파수를 0.3Hz에서 0.5Hz까지 변화시켜가면서 지반입력으로 사용하였으며 모델오차가 없는 모델(공칭모델, 고유진동수=0.77Hz)과 모델오차가 존재하는 모델들(교란모델, 고유진동수=0.69Hz, 0.84Hz)에 대하여 각각 응답을 해석하였다. 수치모사를 수행한 결과, 각 주파수에 따른 최대응답의 변화를 그림 3, 4, 5에 나타내었다.

그림 3은 공칭모델에 대한 주파수별 최대응답을 가진 주파수에 따라 도시한 것이다. LQR제어기와  $H_\infty$ 제어기는 정량적인 비교를 위하여, 동일한 크기의 최대진폭이 발생하도록 설계하였으므로 1.62cm(LQR)와 1.60cm( $H_\infty$ )로서 차이가 없으며, 이는 수동형 제진모드인 TMD 사용할 때와 비교하여 약 69%의 응답이 감소한 것이다(그림 3(a)). 그림 3의 (b)에는 Damper의 운동거리를 나타내었다. TMD의 경우 제어장치의 움직임은 0.7Hz에서 0.8Hz사이의 구간에 집중되어 크게 나타나는 반

면,  $H_{\infty}$ 제어기는 비교적 전 영역에 걸쳐서 나타나는 특성을 보인다. LQR제어기는 0.47Hz에서 0.77Hz까지를 제외한 전구간에서  $H_{\infty}$ 제어기보다 짧은 운동거리를 나타내나 최대값은 49.57cm로서  $H_{\infty}$ 에 비하여 22.4%나 큰 것으로 나타났다.

그림 4는 LQR제어기와  $H_{\infty}$ 제어기에 의한 구조물의 변위응답을 교란모델과 공칭모델에 대하여 비교한 것이다. LQR제어기를 사용한 경우에는 구조물의 고유진동수가 0.69Hz로 약 10%감소되었을 때, 최대값은 2.59cm이며 오차가 없는 공칭모델의 최대값인 1.62cm보다 60% 증가되었음을 알 수 있다. 이에 비하여  $H_{\infty}$ 제어기는 최대변위응답이 1.97cm로서 공칭모델보다 23% 증가된 것이다. 따라서 오차에 의하여 구조물의 고유진동수가 설계값보다 낮아진 경우에 있어서, 이 연구에서 사용한  $H_{\infty}$ 제어기는 비동조오차에 의한 응답의 증가율을 LQR보다 완화할 수 있는 것으로 판단된다. 오차에 의하여 구조물의 고유진동수가 설계값보다 증가한 경우는 두 경우 모두에 있어서 응답이 감소함을 알 수 있다.

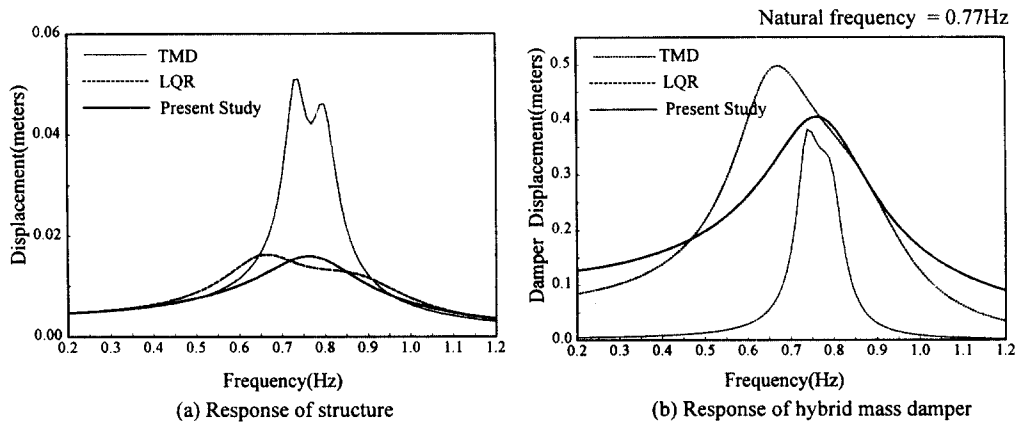


그림 3. 공칭모델에 대한 가진주파수별 최대응답

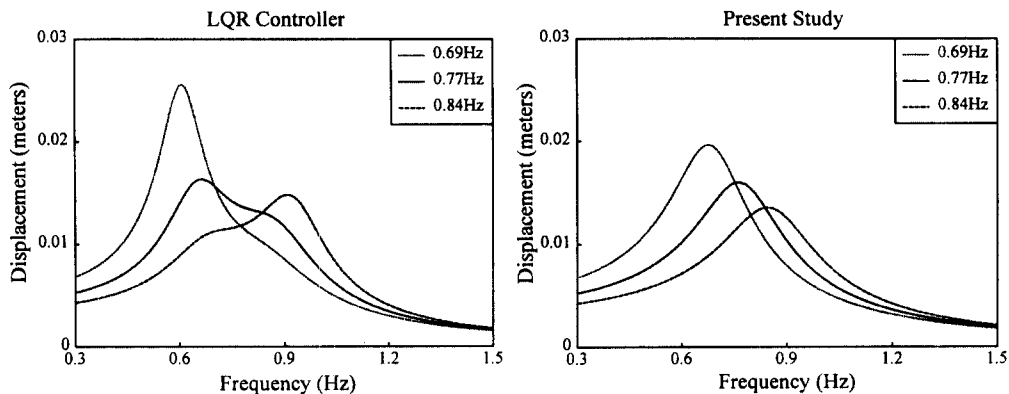


그림 4. 모델오차에 따른 구조물의 가진주파수별 최대변위

그림 5에서는 LQR제어기와  $H_{\infty}$ 제어기에 의한 Damper의 최대운동거리의 변화를 가진주파수에 따라 나타내었다. Damper의 변위응답은 전반적으로 구조물의 변위응답과 비슷한 양상을 나타낸다. 최대값의 경우, LQR제어기의 최대운동거리가 73.96cm,  $H_{\infty}$ 제어기는 50.46cm로 각각 운동거리가 공칭모델에 비하여 49.3%, 24.7%씩 증가한 것으로 나타났다. 그러므로 정현파 지진가속도입력에 대한 구조물의 변위응답과 Damper의 운동거리를 비교하여 볼 때, 제안된  $H_{\infty}$ 방법은 LQR보다 모델오차에 대한 응답의 증가량이 적게 나타남을 알 수 있다.

해석결과로부터 실제 구조물의 고유진동수가 설계값보다 감소한 경우에는 응답의 증가현상이 크게 나타나며, 제안한  $H_{\infty}$ 제어기 설계방법은 이러한 문제에 효과적으로 적용될 수 있음을 보여 준다.

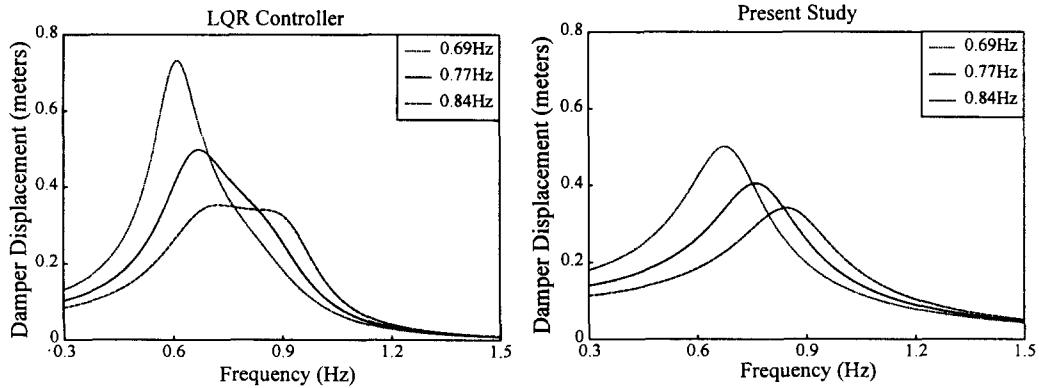


그림 5. 모델오차에 따른 Damper의 가진주파수별 최대변위

#### 4. 결론

상대적으로 유연한 장대구조물에 발생하는 진동을 제어하기 위한 능동형 진동제어기의 설계에 있어서, 시공 또는 모델링 오차 등에 의하여 발생하는 불확실성에 대한 강인제어기의 설계방법을 제시하였다.

불확실성에 의하여 제어대상 구조물에 발생하는 오차의 한계를 설계에 반영하기 위하여  $H_{\infty}$ 제어이론을 사용하였으며, 중요요소인 성능조건을 최종목표감쇠비의 형태로 설계상에서 직접적인 반영이 가능하도록 하였다.

수치예제를 통하여 제시한 제어기 설계방법의 효율성을 검증하였다. 선정된 제진기구인 HMD에 대한 제어기설계와 수치모사결과에서  $H_{\infty}$  제어기는 짧은 운동거리에 비하여 우수한 제진효과를 나타내며, 비동조오차시 발생하는 제어장치의 성능저하 현상을 효과적으로 방지할 수 있음을 알 수 있다.

#### 참고문헌

1. 고현무, 박관순, 박원석 (1995) "설계제한조건이 고려된 출력되먹임 최적제어에 의한 구조물 진동의 능동제어," 대한토목학회논문집, 15권, 6호, pp. 1535-1544.

2. 박관순 (1998) “ $H_\infty$ 강인제어이론을 적용한 장대구조물의 진동제어,” 서울대학교 대학원 토목공학과 박사학위논문.
3. Den Hartog J.P. (1956) “Mechanical Vibration,” 4th Ed., McGraw-Hill, New York.
4. Doyle J.C., Glover K., Khargonekar P.P. and Francis B.A. (1989) “State-Space Solutions to Standard  $H_2$  and  $H_\infty$  Control Problems,” IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-24, pp. 607-611.
5. Koh H.M., Park K.S., Park W., Park K.S., Kim Y.S. (1998) “Active Vibration Control of Air Traffic Control Tower at Incheon International Airport under Wind Excitation,” Proceedings of the 2nd World Conference on Structural Control.