

# 웜홀 라우팅과 양방향 링크를 지원하는 3차원 메쉬로의 완전 이진트리의 최적 임베딩<sup>1)</sup>

이상규<sup>1</sup>, 이주영<sup>2</sup>, 김윤정<sup>1</sup>

<sup>1</sup>숙명여자대학교 전산학과, <sup>2</sup>덕성여자대학교 전산학과

## Optimal Embedding of Complete Binary Trees into 3D Meshes with Wormhole Routing and Bidirectional Links

Sang-Kyu Lee<sup>1</sup>, Ju-Young Lee<sup>2</sup>, and Yoon-Jung Kim<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Sookmyung Women's University, <sup>2</sup>Duksung Women's University

### 요약

완전 이진트리의 통신형태를 갖는 분할 정복방식의 알고리즘을 병렬 컴퓨터에서 실행시킬 때 작업들을 프로세서에 분배하여 처리하게되는데 이때 통신 링크의 충돌을 줄이는 것이 전체 실행시간을 단축하는 중요한 요소가 된다. 본 논문에서는, 웜홀 라우팅과 양방향 링크를 지원하는 3차원 메쉬로의 완전 이진트리의 임베딩 문제를 다룬다. 이 임베딩 방법은 순위차원 라우팅을 사용하며 링크 충돌이 없는 방법으로 최적의 임베딩 알고리즘이다.

### 1. 서론

게스트 그래프  $G=(V_G, E_G)$ 와 호스트 그래프  $H=(V_H, E_H)$  사이에 여러가지 임베딩(embedding)이 존재하는데, 이러한 임베딩은 함수  $G$ 에서 함수  $H$ 로의 1 대 1 함수와 같다.  $V_G$ 의 노드(node)는 작업을,  $V_H$ 의 노드는 프로세서를 각각 나타내며,  $E_G$ 의 변(edge)은 프로그램에서의 작업 대 작업 통신 링크(link)를,  $E_H$ 의 변은 시스템에서의 프로세서 대 프로세서 통신 링크를 나타낸다. 바람직한 임베딩이란 알고리즘의 통신 구조와 시스템의 상호연결망 사이의 효율적인 일치(matching)를 찾는 일이다. 그래서, 다른 통신 구조에 맞도록 쓰여진 각 병렬 알고리즘이 기존의 알고리즘을 수정하지 않고도 호스트 시스템에 시뮬레이트 할 수 있도록 해준다. 새 시스템에 의해 야기되는 통신 지연 시간의 최소치를 유지시키기 위해서, 원시 통신 구조에 대응하는 통신 경로와 작업 할당을 제공하는 임베딩이 있어야 한다.

임베딩에 있어서, 다이레이션이라 함은 게스트 그래프  $G$ 에서 인접한 두 노드의 호스트 그래프  $H$ 에서의 최단거리(즉, 최단 경로의 길이)를 말한다. 게스트 그래프  $G$ 의 호스트 그래프  $H$ 로의 임베딩은  $G$ 에 있는 링크들을  $H$ 에 있는 경로들로 매핑시키는 것을 의미한다. 링크 충돌(link contention)이란  $H$ 에 있는 링크로 매핑되어진  $G$ 의 링크의 최대 수를 말한다. 종전의 임베딩 연구는 대부분 축적교환(store-and-forward) 통신 방식[1,2]을 고려하는 임베딩으로, 가능한 다이레이션을 줄이는데 중점을 두었다. 최근 개발

된 스위칭 테크닉인 회로교환스위칭(circuit-switching)과 웜홀 라우팅(wormhole routing) 방식은 다중 컴퓨터의 통신 시간을 현저히 감소시키며, 통신 링크 충돌이 없는 경우에는 어떤 두 노드 사이의 경로 길이가 통신 시간과는 거의 무관하다는 특성을 갖고있다[6]. 그러므로, 이러한 테크닉을 사용하는 다중 컴퓨터 시스템의 임베딩문제에서는 다이레이션보다 통신 링크 충돌이 더 중요한 요인이 된다. 통신 링크의 종류는, 두 개의 통신이 동시에 같은 링크를 서로 반대 방향으로 사용할 수 있는 양방향 링크(bidirectional link)와 한 통신이 어느 일정한 방향으로 사용할 때 다른 통신이 그 링크를 반대 방향으로 사용할 수 없는 단일방향 링크(unidirectional link)가 있다.

본 논문에서는, 웜홀 라우팅과 양방향 링크를 지원하는 시스템에서의 임베딩 문제를 다루는데, 링크 충돌을 최소화하는데 그 목적을 두며, 특히 완전 이진트리의 3차원 메쉬로의 최적의 임베딩 알고리즘을 제시한다. 높이(height)가  $p$ 인 완전 이진트리  $T_p$ 는  $2^p-1$ 개의 노드를 가지며,  $T_p$ 의 루트(root)노드를 레벨(level) 1에 있다고 하고 각 차원에  $l_1, l_2, \dots, l_d$ 개의 노드를 가진  $d$ -차원 메쉬를  $M(l_1 \times l_2 \times \dots \times l_d)$ 로 표기한다. 메쉬 상호연결망에서, 두 노드 사이에 1개 이상의 경로가 존재하는데 경로의 선택은 어떤 라우팅 방법을 사용하느냐에 따라 달라진다. 메쉬에서 순위차원 라우팅(dimension-ordered routing)은 메시지가 한번에 어떤 하나의 차원으로 라우트되어지고, 적합한 주소(좌표)계산에 의해 다음 차원으로 라우트되는 방법이다. 완전 이진트리를 양방향 링크를 사용하는 2차원 메쉬에 임베딩하는 이전의 결과로, [3]은 순위차원 라우팅을 사용하지 않는 방법이고 [4]는 순위차원 라우팅을 사용하는 방법이다. [5]

1) 이 논문은 숙명여자대학교 1998년도 교비 연구비의 지원으로 수행되었음

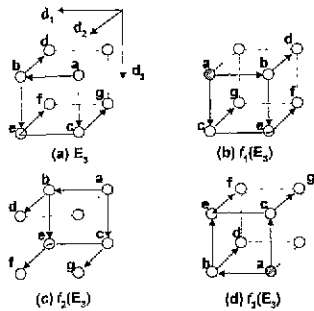


그림 1 임베딩 함수  $f$

에서는 완전 이진트리의 3차원 메쉬로의 임베딩을 보이는 데 최적 크기의 메쉬에 임베딩하는 방법으로 링크의 충돌을 2 까지 허용하는 방법이다.

본 논문의 다음절에서는, 완전 이진트리를 순위차원 라우팅과 양방향 링크를 사용하는 3차원 메쉬에 링크 충돌이 없이 임베딩하는 최적의 알고리즘을 소개한다. 3절에서 결론을 맺는다

2. 임베딩 알고리즘

이 장에서는 먼저 임베딩 알고리즘 설명에 필요한 함수와 용어를 정의한 후 높이가  $p$ 인 완전 이진트리를 워홀 라우팅과 양방향 링크를 지원하는 3차원 메쉬에 통신링크의 충돌 없이 임베딩하는 방법을 소개하겠다. 본 논문에서는  $T_p$ 를 총 노드수가  $2^p$ 개를 넘지 않는 3차원 메쉬로 순위차원 라우팅을 사용하여 통신충돌 없이 임베딩하는 것을  $E_p$ 라 부른다. 이때 임베딩  $f_i(E_p)$ 를,  $1 \leq i \leq d$ , 임베딩  $E_p$ 의  $i$ 차원 방향의 거울영상(mirror image)이라 부른다. 그림 1의 (b) - (d)는 (a)에 나와 있는  $T_3$ 의  $M(2,2,2)$ 로의 임베딩  $E_3$ 의  $f_1(E_3), f_2(E_3), f_3(E_3)$ 를 나타낸다  $f_i(f_j(E_p)) = f_j(f_i(E_p))$  임을 쉽게 알 수 있으며 만약  $E_p$ 가 순위차원 라우팅을 사용하는 임베딩이면  $f_i(E_p)$ 도 순위차원 라우팅을 지원함을 볼 수 있다. 다음 정리에서 재귀적 임베딩 알고리즘을 설명한다.

정리 1. 높이가  $p$ 인 완전 이진트리  $T_p$ 를 순위차원 라우팅을 사용하여 워홀 라우팅과 양방향 링크를 지원하는 최적 크기의 3차원 메쉬에 모든 통신링크의 충돌 없이 임베딩 할 수 있다. 이때 3차원 메쉬의 크기는 한 임의의 양의 정수를  $k$ 라 할 때

- $p$ 가  $3k$  이면  $M(2^k, 2^k, 2^k)$ ,
- $p$ 가  $3k+1$  이면  $M(2^{k+1}, 2^k, 2^k)$ ,
- $p$ 가  $3k+2$  이면  $M(2^{k+1}, 2^{k+1}, 2^k)$ 이 된다.

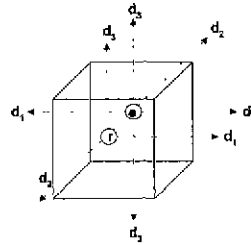


그림 2 임베딩  $E_p$

증명: 먼저  $p=3k$ 인 경우의 증명을 보이도록 하겠다. 이 증명에서는 재귀적 생성방법을 이용하여  $p=3k$ 일 때  $T_p$ 를  $2^k$ 개의 노드를 갖는 최적 크기의 3차원 메쉬  $M(2^k, 2^k, 2^k)$ 으로의 임베딩  $E_p$ 가 항상 존재할 수 있음을 보이겠다.  $E_p$  임베딩에서 루트 노드(root node)는  $r$ 로 표시된다.  $T_p$ 의 노드 개수가  $2^p-1$ 이므로 임베딩 후에도 트리의 노드가 지정(embed)되지 않고 비어있는 메쉬의 노드(empty node)가 하나 생기게되는데 이 노드를  $e$ 로 표시한다

본 논문이 제안하는 임베딩  $E_p$ 는 다음과 같은 특성을 갖는다

- (특성 1) 다음의 링크들은 임베딩 후에도 비어있다.
  - $r$ 의 오른쪽에 있으면서  $r$ 을 지나는 1차원 선상에 있는 모든 링크
  - $r$ 의 위쪽에 있으면서  $r$ 을 지나는 3차원 선상에 있는 모든 링크
  - $e$ 를 지나는 1차원 선상에 있는 모든 링크
  - $e$ 를 지나는 2차원 선상에 있는 모든 링크
  - $e$ 를 지나는 3차원 선상에 있는 모든 링크

(특성 2) 어느 링크를 보아도 충돌이 없다

(특성 3) 모든 경로 연결은 순위차원 라우팅을 따른다.

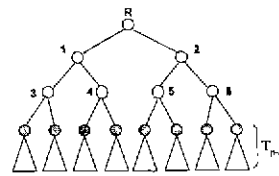


그림 3  $T_p$

그림 2.에 위의 특성을 만족하는 임베딩  $E_p$ 의 예가 도식적으로 나타나 있다. 여기서 점선으로 표시된 선들은 비어 있는 링크를 의미한다.

$k=1$ 인 경우의 기본 임베딩이 그림 3(a)에 나타나 있다. 이

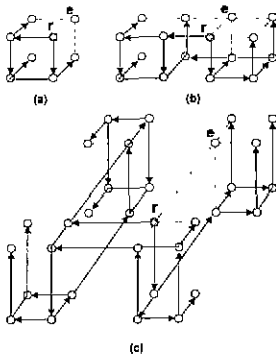


그림 4  $E_3, E_4, E_5$

임베딩은 위의 3가지 특성을 모두 만족함을 볼 수 있다. 그림 5는  $E_{p-3}$ 을 이용해  $E_p$ 를 생성해내는 재귀적 알고리즘을 나타낸다. 그림 5(a)는  $E_{p-3}$ 와 그의 거울영상 임베딩을 이용한 여덟 개의 서브임베딩의 배치를 나타낸다.  $r$ 과  $e$ 는  $T_{p-3}$ 의 임베딩의 루트와 비는 노드를 나타낸다.  $E_{p-3}$ 들이 위의 3가지 특성을 만족 한다면 그림 5(a)에서 점선으로 표시된 비어있는 링크를 갖게된다 이 여덟 개의 서브임베딩은 그림 4의 여덟 개의 서브트리의 임베딩을 나타내고 재귀적으로 생성하기 위해서 R, 1...6로 표시된 상위 세 레벨에 있는 노드들과 이를 연결하는 14개의 링크들은 비어있는 링크들과 e노드들을 사용하여 임베딩 되어 있는데 이는 그림 5(b)에 나타나 있다. 그림 5를 보면 여덟 개의  $E_{p-3}$ 를 이용해 새로 생성된  $E_p$ 또한 3가지의 특성을 모두 만족하고 있는 임베딩임을 볼 수 있다. 따라서 높이가  $p=3k$ 를 만족하는 모든  $T_p$ 의 최적 크기인  $M(2^k, 2^k, 2^k)$ 로의 임베딩이 항상 가능함을 볼 수 있다.

다음은 나머지 두 경우인 트리의 높이가  $p=3k+1$ 인 경우와  $p=3k+2$ 인 경우를 증명하는데 그 기본적인 방법은  $p=3k$ 인 경우와 같다. 재귀적 생성방법은 이 두 경우도 앞의 방법과 같고 기본 임베딩  $E_4$ 과  $E_5$ 만 각기 다르겠는데 그림 3(b)와 그림 3(c)에 나타나 있다. 이 두 임베딩도 앞에서 언급한 3가지 특성을 모두 만족함을 볼 수 있다. 그 두 기본 임베딩을 사용하면 높이가  $p=3k+1$ 를 만족하는  $T_p$ 의  $M(2^{k+1}, 2^k, 2^k)$ 로의 임베딩이,  $p=3k+2$ 를 만족하는  $T_p$ 의  $M(2^{k+1}, 2^{k+1}, 2^k)$ 로의 임베딩이 항상 가능함을 볼 수 있다. 따라서 모든 높이의 완전 이진트리의 정리 1의 조건을 만족하는 임베딩이 항상 존재함을 알 수 있다.

### 3. 결론

본 논문에서는 완전 이진트리를 워홀 라우팅과 양방향 링크를 지원하는 3차원 메시에 통신링크의 충돌 없이 임베딩하는 방법을 제안했다. 이는 재귀적 방법을 이용한 최적의

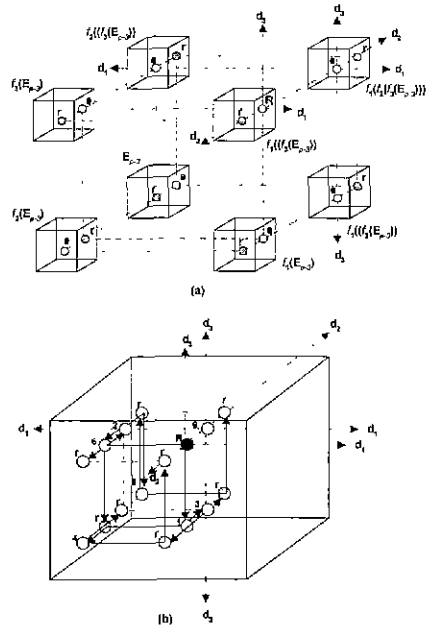


그림 5 재귀적 임베딩 방법

임베딩 알고리즘이며, 완전 이진트리의 통신형태를 갖는 분할 정복방식의 알고리즘을 병렬 컴퓨터에서 실행시킬 때 작업들의 프로세서 분배에 직접 응용될 수 있는 방법이다.

### 참고 문헌

- [1] S. N. Bhatt and S. S. Cosmadakis, "The Complexity of Minimizing Wire Lengths for VLSI Layouts," Information Processing Letters, Vol 25, 1987.
- [2] J. E. Brandenburg and D. S. Scott, "Embeddings of Communication Trees and Grids into Hypercubes," Technical Report, Intel Scientific Computers, 1985.
- [3] A. Gibbons and M. Patterson, "Dense Edge-Disjoint Embedding of Binary Trees in the Mesh", Proc. of 4th Annual ACM Symposium on Parallel Algorithms and Architecture, pp. 257 - 263, 1992
- [4] S.-K. Lee and H.-A. Choi, "Embedding of Complete Binary Trees into Meshes with Row-Column Routing," IEEE Trans on Parallel and Distributed Systems, Vol 7, No 5, pp 493-497, May 1996
- [5] S.-K. Lee and H.-A. Choi, "Link-Disjoint Embedding of Complete Binary Trees in Meshes", Networks Journal, Vol 30, No. 4, pp.283-292, 1997.
- [6] L. M. Ni and P. K. McKinley, "A Survey of Routing Techniques in Wormhole Networks," IEEE Computers, pp 62 - 76, Feb. 1993.