

푸리에 급수와 최소 자승법을 이용한 마멸량 측정  
The measurement of the amount of wear  
by using least squares approximation with Fourier series

전 종하\*, 구 영필(부산대학교 대학원), 조 용주(부산대학교 기계공학부)  
Jun,Jong-Ha Koo,Young-Pil Cho,Yong-Joo (Pusan National University)

**Abstract**

A method of calculating wear amount which is based on digitally measured surface profile was suggested. The original profile of worn out profile was estimated from its adjacent surface profile by using least squares curve fitting with Fourier series. The approximated curve was well fitted to original surface profile. With this approach, more accurate calculation of the wear amount will be possible.

**Key words**

least squares approximation, Fourier series, the amount of wear

**1.서론**

마멸 실험에서 마멸량의 측정은 통상 무게 감소, 체적 변화 등의 방법을 이용하여 왔다. 무게 감소의 경우는 전자 저울을 이용하여 측정하고 체적 변화에 의한 경우는 LVDT 센서나 다이얼 게이지를 이용한 길이 변화를 측정하거나, 표면 조도기를 이용한 마멸 자국의 형상을 측정하는 방법이 이용되어져 왔다. 또한 각종의 마멸 기구에 따른 여러 가지 수식을 이용할 수도 있다. 그러나 무게 감소에 의한 방법은 시편의 무게에 비하여 마멸량이 매우 적을 경우 저울의 민감도가 떨어져서 부정확한 측정이 이루어 질 수 있으며 LVDT를 이용한 길이변화에 의한 측정 방법은 pin-on-disc 실험과 같은 경우에 편에는 적용 할 수 있으나 디스크에는 적용할 수 없는 단점이 있다. 마멸기구에 의한 수식을 적용할 경우 실제 기계류나 실험 시에는

단 한가지의 마멸기구에 의해 마멸이 발생하는 것이 아니라 여러 가지 주변 상황의 조건에 따라 여러 가지 마멸기구가 동시에 발생하며 각각의 복합적인 조건에 따라 마멸량은 변하게 된다. 따라서 수식을 사용한 마멸량 계산에도 상당한 오차를 내포하게 된다.

표면 조도기에 의해 측정된 표면 형상을 이용하여 마멸량을 측정하는 방법은 표면 조도기를 이용하여 마멸 자국을 측정한 다음 저역 통과 필터를 사용하여 저역 통과 필터된 표면 형상을 구하고 이것의 단면적을 계산하여 부피를 구한 후 무게로 환산하는 것이다. 하지만 이 방법은 원래의 표면 형상에 대해 필터를 사용함으로써 표면 형상을 왜곡시킨다는 단점이 있으며, 이로 인해 마멸량 측정에 오차를 내포하게 된다. 따라서, 마멸 자국을 측정하여 마멸량을 측정하는데 있어서 정밀한 측정 방법은 필터되지 않은 표면

형상을 가지고 단면적을 계산하는 것이라 고려 되어진다. 이러한 방법에 있어서 가장 중요한 것은 마멸전의 표면 형상에 대한 근사 곡선의 설정일 것이다. 이것은 마멸 실험을 하기 전의 표면 형상을 기준으로 마멸이 된 후의 표면형상과 비교하여 마멸량을 계산하는 것이 가장 정확하나 현실적으로 상당히 어렵기 때문에 마멸 실험 후 표면 형상을 사용하여 마멸 실험 전의 표면 형상을 추측해야 되기 때문이다.

본 논문에서는 정밀한 마멸량 측정을 위해 푸리에급수가 적용된 최소 자승법을 이용하여 마멸이 되어 없어진 부분에 대해 본래 형상을 예측하여 추정하고 이렇게 추정된 근사 곡선으로 마멸량을 계산하는데 목적이 있다.

## 2. 마멸량 계산 방법

Fig.1 은 표면 조도기에 의해 측정된 필터 되지 않은 표면 형상과 주파수 영역에서 FFT를 이용하여 저역 통과 필터를 적용하여 구해진 표면의 형상을 나타내었다. Fig1 은 Ball-on-disc 실험의 결과로 나타난 표면 형상이다. Fig1에 나타난 바와 같이 차단 주파수의 설정에 따라서 저역 통과 필터된 표면 형상은 실제의 형상에 비하여 왜곡된 형상을 하고 있다. 여기서 보는 바와 같이 표면 조도기에서 구해진 저역 통과 필터된 표면 형상을 사용하여 마멸량을 측정하는 것은 대략적인 마멸량은 알수 있으나 보다 정밀한 마멸량 계산에는 부적당한 것을 알 수 있다. 필터링 되지 않은 원 표면 형상을 이용하여 마멸량을 측정하고자 할 때 가장 문제가 되는 것은 근사 곡선의 설정문제이다. 즉 측정되는 값들이  $\mu\text{m}$  단위로 나타내어지기 때문에 이러한 값들의 오차를 최소화 시킬 수

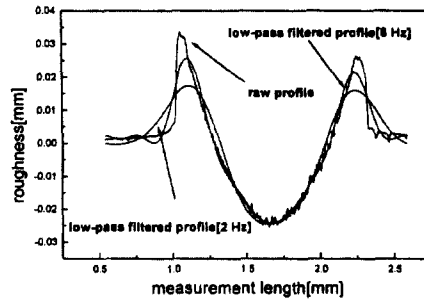


Fig.1 Comparison of raw profile with low-pass-filtered profile

있는 근사 곡선의 설정이 필요하고 이러한 근사 곡선은 마멸이 된 부분에 대해서 원래의 표면 형상을 추정 할 수 있어야 한다. 이것은 마멸량 계산을 위한 근사 곡선 설정에서 가장 중요한 문제이며 난해한 문제이다.

마멸이 된 부분과 이 영향을 받은 부분에 대해 원래의 표면 형상을 예측하기 위하여 푸리에 급수와 최소 자승법을 이용하여 이 부분의 원래 표면 형상을 예측함과 동시에 마멸량 계산을 위한 근사 곡선으로 설정하였다.

### 2.1 마멸전 표면형상 근사 곡선 설정

푸리에 급수의 장점은 자연계의 모든 함수 또는 신호는 조화 함수의 합으로서 나타낼 수 있다는 것이다. 푸리에 급수의 개념에서 보면, 표면 조도기를 통해 측정된 표면 형상은 주기적으로 반복되는 형상의 하나로서 가정될 수 있다. 또한 측정된 표면 형상 하나를 두고 보면 어떠한 파장을 가지고 있는 조화 함수로서 표현 될 수 있을 것이다. 이러한 개념을 최소 자승법에 적용시키면, 마멸이 되지 않은 부분의 정보를 이용하여 마멸이 발생한 부분의 원래 형상을 조화 함수의 합으로서 추정할 수 있다. 최소 자승법은

측정된 자료들에 대해 가장 근사 하는 근사 식을 구할 때 오차가 주어진 데이터 값과 근사선 상의 데이터 값의 차를 제곱해서 모두 합한 것을 최소화시키는 근사선을 구하는 것이다. 최소 자승법을 마멸량 계산에 이용함에 있어 일반적인 대수 방정식이나 다른 여러 가지 기존의 방법으로 마멸이 일어나지 않은 부분의 정보를 이용하여 근사 곡선을 설정할 수도 있으나 이렇게 구해진 근사식은 표면 형상의 고주파 성분에 해당하는 거칠기를 구현하기 어렵다는 단점을 가지고 있다. 즉 일반적인 최소 자승법에 관련된 방법으로 구해지는 표면 형상의 근사식은 저역 통과 필터된 표면 형상을 나타낸다고 볼 수 있다. 이러한 문제점을 보완하기 위하여 푸리에 시리즈의 기본개념을 최소 자승법에 적용시킬 수 있을 것이다. 측정된 표면 형상을 하나의 주기 함수로서 생각하고 이 주기함수의 일부가 생략되었을 때 이 부분을 추정하는 것이다.

본래의 표면 형상을  $y$  라 하고 근사식을  $f$  라 할 때 표면 형상은 식(1)과 같이 sine 과 cosine 두 조화 함수의 합으로서 표현될 수 있다. 여기에서 오차의 합인 식(2)를 최소화 시키는 계수  $a_0, a_n, b_n$  를 구하면 된다. 이 때 오차의 합을 구하는 부분은 물론 데이터가 주어지지 않은 부분(마멸된 부분)을 제외한 곳에서 계산하였다.

$$f = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)) \quad (1)$$

$$E(a_0, a_n, b_n) = \sum_{k=1}^N [y(k) - f(k)]^2 \quad (2)$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial a_n} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial b_n} = 0$$

$$n=1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

식(3)을 이용하여 오차가 최소이면서 본래의 표면 형상에 근사하는 함수를 찾아내어서 이 함수를 근사 곡선으로 설정한다. 먼저 이 가정이 타당한지에 대하여 검증을 하여 보았다.

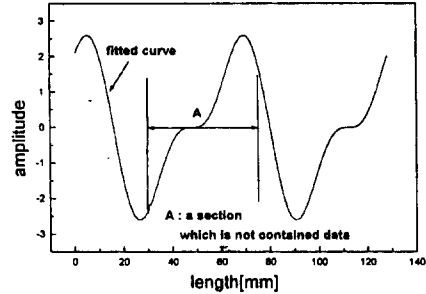


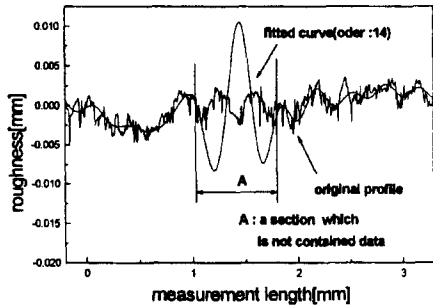
Fig2. Comparison of least squared fitted curve with original curve

$1/4\lambda$  즉 4 Hz 의 성분을 가지는 sine 함수와  $1/2\lambda$  (2 Hz)를 가지는 cosine 함수를 합성시키고 이 합성된 함수에서 특정 부분의 값들이 주어지지 않았다고 가정하고 위의 식(2)와 식(3)을 적용하여 정규 방정식을 유도한후 데이터가 주어지지 않은 부분을 추정한 것을 Fig.2 에 나타내었다. 원 함수와 최소 자승법으로 근사된 함수를 함께 나타내었으며, 푸리에 급수를 최소 자승법에 적용시킨 결과 데이터가 주어지지 않은 부분에 대한 추정이 가능하다는 것을 알 수 있다. 위의 경우는 만들어진 함수 자체가 cosine 과 sine의 조화 함수로서 구성되어 있어 푸리에 급수를 적용한 최소 자승법에 의해 우리가 구하고자 하는 함수의 원형을 구할 수가 있었다. 하지만, 실제 표면 형상을 측정할 경우 표면 형상은 아주 불규칙적인 형상을 지니고 있기 때문에 조화 함수를 이용한 최소 자승법으로 원래의 표면 형상 추정은 상당히 어려웠다. 실제 표면 형상 자체가 어떠

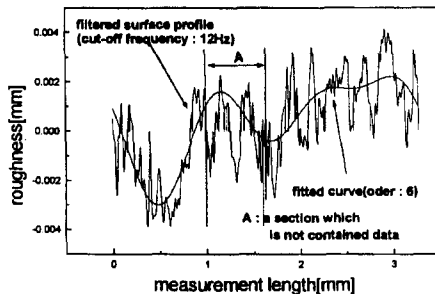
한 주기성을 가지지 않고, 거칠기 성분이 불규칙적으로 분포하고 있기 때문에, 푸리에 급수를 적용하여 표면 형상의 함수를 구현하더라도 많은 시간을 요하게 되고 고주파 성분에 해당하는 거칠기 성분을 완전하게 복원하는 것이 상당히 어렵기 때문이다. 아래의 Fig3의 (a)는 임의의 측정된 표면 형상에 대해 최소 자승법을 사용하여 원래의 표면 형상을 추정하는지 조사한 것이다. 최소 자승법에서 차수를 14차로 하여 근사 시켰다. 그리고, 데이터의 개수는 계산 과정에 포함되지 않는 부분 즉, 마멸이 된 부분의 3배로 설정하였다. 이것은 표면 조도기에서도 사용되는 범위로서 측정하고자 하는 부분의 웨이브니스를 알고자 할 때 측정 길이는 컷-오프 길이의 3배 이상으로 하고 있다. 측정하고자 하는 부분의 형상은 이것이 가지는 파장의 3배 이상으로 측정할 때 이 형상을 정확하게 표현할 수 있기 때문이다. 그리고, 그림에서도 나타나듯이 차수가 높을수록 마멸이 되지 않은 부분에서는 고주파 성분에 해당하는 거칠기 성분까지 근사 시킬 수 있음을 알 수 있으나 마멸이 발생한 부분에서는 발산이 되고 있다. 이러한 방법에 있어서의 문제점은 차수가 고차가 됨으로 인해서 푸리에 급수의 계수가 2배씩 증가하여 이들을 구하고자 할 때 많은 시간이 소요되었다. 또한 실제 데이터 값들의 개수와 방정식의 차수에 따라서 오차의 범위가 달라짐을 알 수 있었다. 여기서 원 표면 형상을 왜곡하지 않으면서도 계산 시간을 단축시킬 수 있는 급수의 차수 선정과 측정된 자료의 개수들을 설정할 필요가 있음을 알 수 있다. 따라서 측정된 표면 형상 중 데이터값이 주어지지 않은 표면 형상의 원 형상을 추정하기 위해 최소 자승법으로 계산을 했을 때 계

산 시간을 줄이면서도 작은 오차의 범위를 나타내는 차수와 데이터의 개수에 대하여 알아보았다. 그 결과 데이터의 개수는 마멸이 되어 원래의 형상을 알 수 없는 부분의 데이터 개수의 3배 이상일 경우 원 형상에 근사하게 추정하였으나 3배 이하가 될 경우 발산을 하여 원 형상을 추정하기 어려웠다. 이것은 앞에서 언급한 바와 같이 추정하고자 하는 표면 형상이 가지는 파장의 3배 이상일 때 또는 데이터의 개수가 3배 이상일 때 가장 유사하게 추정하고자 하는 부분의 형상을 나타내는 것이다. 데이터의 개수가 4배 또는 그 이상이 되더라도 형상에는 큰 변화를 일으키지 않았다. 즉 데이터의 개수는 3배가 가장 적절하다는 것을 알 수 있었다. 푸리에 급수의 차수의 경우 5차까지는 마멸이 된 부분에서의 형상은 마멸이 되기 전의 형상을 근사하게 추정하나, 6차 이상에서는 발산이 발생하였으며, 원래의 표면 형상을 왜곡시키는 결과를 나타내었다. 이 문제는 표면 형상의 측정시 나타나는 노이즈 성분으로 인해 최소 자승식을 계산할 때 영향을 끼친 것으로 보인다. 따라서, 노이즈 성분의 영향을 최소화하기 위해 원 표면 형상을 필터링을 통해 노이즈 성분을 제거시키고 마멸이 된 부분과 이 영향을 받은 부분의 오차를 마멸이 되지 않은 부분의 오차와 동일하게 두고 계산하였다. 이때 마멸이 된 부분과 이 영향을 받은 부분은 원 표면 형상을 알 수 없기 때문에 오차의 계산이 불가능하다. 이 부분의 오차는 급수 전개시 마멸이 되어 원래의 표면 형상을 알 수 없는 부분에 대해서 식(1)에서  $n$ 번째에서의 데이터와  $n-1$ 번째에서의 데이터 값을 비교하여 설정하였다. 이 결과를 이용하여 실제 측정된 표면 형상에 적용을 시켜보았다. Fig.3의 (b)에 이 결

과를 도시한다. 푸리에 급수의 차수는 6차 까지 확장하였으며, 데이터의 개수는 형상을 추정하고자 하는 부분의 약 3배로 설정하였으며 최소 자승법을 이용하여 구한 근사 곡선과 원래의 표면 형상을 비교한 것이다. 여기서 표면 형상은 노이즈 성분이 제거되었다. 이 그림에 나타나듯이 대체적으로 근사하게 추정함을 알 수 있다.



(a)



(b)

Fig3. Fitted curves to real rough surface

지금까지의 내용을 실제 pin-on-disc 실험에서 나타난 마멸 트랙의 형상을 측정한 후 적용 시켜보았고 그 결과를 Fig4에 나타내었다. 마멸이 되어 원래의 표면 형상을 알수 없는 부분의 데이터 개수 보다 3배정도 데이

터 개수를 취하고 차수는 6차로 설정하였다. 마멸이 된 부분에 대해서 근사하게 추정함을 알 수 있다.

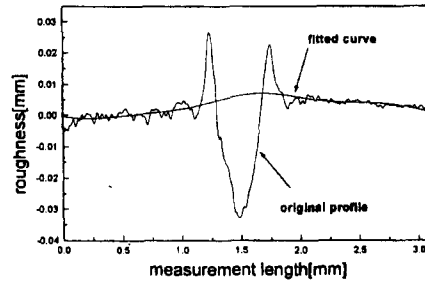


Fig4. Original Profile and estimated curve

## 2.2 마멸 단면적의 계산

마멸 단면적의 계산은 근사 곡선이 결정되면 이 근사 곡선 이하의 면적과 측정된 표면 형상의 면적 차를 구하는 것으로 한다. 측정된 마멸 형상은 표면 조도기에서 측정될 때 중심선 즉 전체 면적의 합이 0으로 되는 선을 기준으로 하여 설정된다. 이 중심선에 대신 새로운 기준선을 설정하는데 이 선은 측정된 마멸 형상의 가장 낮은 값 또는 그보다 작은 값을 기준으로 하여 각각의 데이터 값을 더하여서 설정할 수 있다. 이렇게 하여 새로운 기준선이 설정되고 데이터값들이 수정되면 이 값들에 대해 최소 자승법을 적용시키고, 근사 곡선을 계산한다. 다음으로 근사 곡선에 의한 면적에서 원래의 마멸형상에 대한 면적을 감함으로서 마멸 면적을 구할 수 있다.

## 3. 결론

본 논문에서는 정밀한 마멸량 계산을 위하여 푸리에 급수에 최소 자승법을 적용하여 마멸량 계산을 하는 방법을 제시하였다.

1. 푸리에 급수가 적용된 최소 자승법을 이용하면 적절한 데이터 개수와 차수의 선정을

통해 마멸이 된 부분과 이 영향을 받은 부분에 대해 원래의 표면 형상을 추정할 수 있었고, 이렇게 추정된 결과를 이용하여 마멸량 계산에 적용할 수 있었다.

2. 푸리에 급수가 적용된 최소 자승법을 이용하여 마멸이 된 부분과 이 영향을 받은 부분의 원 형상을 추정하기 위해서는 이 부분들 보다 데이터의 개수가 3배정도 많은 것이 가장 적절하였다.

### 참 고 문 헌

1. William H.Pres, Saul A.Teukolsky, William T.Vetterling, Brian P.Flannery. " Numerical Recipes in Fortran" ,CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS.1992
2. G.J.Borse " Numerical Methods with MATLAB" .PWS Publishing Company,1997
3. 김 규철, 나연목 " 알기쉬운 수치해석" 1996
4. 공 호성, " 재료의 마찰과 마모" , 제16차 KIST-KITA 협동 전문 기술 교육 과정, p216~221
5. 성 인하, " 금속의 상대적 물성비와 마찰 및 마멸특성에 관한 연구", p46~60
6. Edward P.Cunningham , "DIGITAL FILTERING AN INTRODUCTION", Houghton Mifflin Company
7. 日本規格學會, JIS B 0610, "表面 うねりの定義と表示"