

# 타원접촉의 탄성유체윤활해석 : 제1보

박태조(경상대학교, 항공기부품 RRC), 현준수(FAG 한화베어링)

## An Analysis of Elastohydrodynamic Lubrication of Elliptical Contacts : Part I

Tae-Jo Park(Gyeongsang Natl. Univ.) · Jun-Soo Hyun(FAG Hanwha Bearings)

**Abstract** - This paper presents a study of the elastohydrodynamic lubrication of elliptical contacts where lubricant entrainment coincides with the major axis of the Hertzian contact ellipse. A finite difference method and the Newton-Raphson method are applied to analyze the problem. Film contours and pressure distributions are compared with the results for lubricant entrainment coincides with the minor axis. Variations of the minimum and central film thicknesses with the radius ratio are also examined. Therefore, the present numerical scheme can be used generally in the analysis of the EHL of elliptical contacts where the lubricant entraining vector did not coincide with either of the principal axis of the conjunction.

**Keywords** : EHL, Elliptical Contacts, Major Axis Entrainment, Numerical Analysis, Newton-Raphson Method

### 1. 서론

기계를 구성하는 필수부품인 구름베어링(rolling bearing), 기어, 캠(cam) 등이 운전중에 파손되는 원인의 대부분은 부적절한 윤활에 기인한다. 따라서, 이러한 기계요소가 오랜 시간 동안 성공적으로 운전되기 위해서는 적절한 윤활설계와 함께 윤활기구에 대한 정확한 이해가 필수적이다. 탄성유체윤활(elastohydrodynamic lubrication : EHL)이라고 불리어지고 있는 집중하중을 받는 기계요소에서의 윤활에 대한 이해와 연구는 트라이볼로지 분야에서 20세기에 이룩한 가장 큰 발전중의 하나이다.

EHL의 특징은 유막내에서 발생하는 아주 높은 압력에 의하여 윤활유의 점도가 급격하게 증가함과 동시에 윤활면이 탄성변형되는 점이다. 이러한 복합적인 작용의 결과로 집중하중상태로 상대운동을 하는 기계요소의 두 면이 아주 얇은 유막으로 서로 분리될 수 있는 것이다.

Dowson과 Higginson[1]에 의하여 선접촉의 EHL 문제에 대한 최초의 수치해석결과가 제시된 이후, 지난 30여년 동안 이 분야에 대한 집중적인 연구가 수행되었다. 특히, 타원접촉의 EHL 문제는 볼베어링, 구형(spherical) 로울러베어링 및 대부분의 기어 등에서도 같이 실제적으로 많이 발생

하지만 지배방정식의 차원증가에 따른 수치해석상의 어려움 때문에 1970년대 중반 이후에야 겨우 해석이 가능하게 되었다. Hamrock과 Dowson[2]은 반복법을 사용하여 윤활유가 접촉타원의 단축(minor axis) 방향으로 유입되는 경우의 수치해를 성공적으로 구하였다. 또한, 해석결과인 유막두께 자료를 이용하여 실제조건에 적용할 수 있는 유막두께식을 제시하였다. Park과 Kim[3]은 동일한 문제의 해석에 유한차분법과 뉴우튼-랩슨 방법을 적용하였다. 그 결과, 참고문헌[2]와는 달리 수치해석과정이 완전히 체계적일 뿐만 아니라 해석결과인 압력 분포와 유막형상이 물리적으로도 타당하였다. 정확한 수치해석결과를 사용하여 구한 참고문헌[4]의 접촉중앙부에서의 유막두께식은 정확도가 떨어지는 유막두께자료를 사용한 참고문헌[2]의 결과와는 상당한 차이를 나타내었다. 따라서, 보다 일반적인 타원접촉문제에 적용할 수 있는 정확한 유막두께식을 구하기 위해서는 추가적인 연구의 필요성을 역설하였다.

한편, 각종 로울러베어링의 로울러와 리브(rib) 사이, 헬리칼(helical) 및 스파이럴 베벨(spiral bevel) 기어, micro-EHL 상태에서 거칠기(asperity)가 길이방향으로 배열된 경우 등의 문제에서는 윤활유의 유입방향이 Hertz 접촉타원의 장축(major axis)방향과 일치한다. Chittenden 등[5]은 접촉타원의 장축방향 뿐만 아니라 임의방향으로 유입되는 경우의 EHL 문제를 참고문헌[2]의 수치해석방법으로써 해석하고 유막두께식을 제시하였다. 그러나, 이들의 결과가 일부조건에서 실험결과[6]와 상당한 차이를 보이는 것은 수치해석결과의 정확성에도 상당한 원인이 있을 것으로 추정되므로 상세한 추가연구가 요구된다.

본 논문에서는 일반적인 형태의 타원접촉 EHL 문제에 적용할 수 있는 정확한 유막두께식을 제시하기 위한 연구의 일부분으로서 윤활유가 접촉타원의 장축방향으로

유입되는 경우의 EHL 문제를 수치해석하고자 한다. 이를 위하여 지금까지 3차원 EHL 문제의 해석에 적용된 수치해석방법 중에서 해석과정이 가장 체계적이며 결과가 물리적으로 타당하다고 알려져 있는 유한차분법과 뉴우튼-랩슨 방법[3-4,7-8]으로 수치해석한 후 그 결과를 기존의 연구결과와 비교하고자 한다.

## 2. 지배방정식

Fig.1에 나타낸 것과 같이 윤활유의 유입방향이 Hertz 접촉타원의 장축방향인 경우, 레이놀즈 방정식은 다음식과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\bar{\rho} h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\bar{\rho} h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 12u \frac{\partial(\bar{\rho} h)}{\partial x} \quad (1)$$

여기서,  $u$ 는 타원체의 구름방향 평균속도이다.

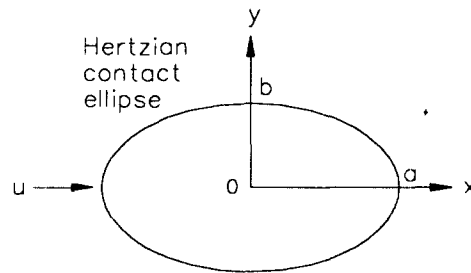


Fig. 1. The EHL of elliptical contacts where the lubricant entraining vector is aligned with the major axis of the Hertzian contact ellipse.

EHL 상태에서의 윤활유의 점도와 밀도는 각각 다음의 식(2)~식(3)과 같이 나타낼 수 있다[1].

$$\bar{\eta} = \eta_0 \exp \left\{ \left[ \ln(\eta_0) + 9.67 \right] \cdot \left\{ -1 + \left( 1 + 5.1 \times 10^{-9} p \right)^2 \right\} \right\} \quad (2)$$

$$\bar{\rho} = \rho_o \left[ 1 + \frac{0.58 \times 10^{-9} p}{1 + 1.68 \times 10^{-9} p} \right] \quad (3)$$

여기서,  $p$ 와  $\eta_o$ 의 단위는 각각 [Pa], [Pa·s]이다.

EHL 상태에서 유막의 크기는 다음식과 같이 정의할 수 있다.

$$h = h_o + h_g + h_d \quad (4)$$

여기서,  $h_o$ 는 상수이고,  $h_g$ 는 타원체의 형상에 의한 유막의 크기로서 다음식과 같이 나타내어진다.

$$h_g = \frac{x^2}{2R_x} + \frac{y^2}{2R_y} \quad (5)$$

발생압력에 의한 탄성변형량인  $h_d$ 의 크기는 참고문헌[3-4,7-8]에서와 동일한 방법으로 구할 수 있다.

유막내에서 발생하는 유체압력의 합은 타원체에 작용하는 하중과 같으며, 이를 식으로 표현하면 다음식과 같다.

$$w = \iint p \, dx \, dy \quad (6)$$

### 3. 무차원화

수치해석과 결과정리를 효율적으로 하기 위하여 다음과 같은 무차원변수를 도입한다.

$$\begin{aligned} X &= x/a, & Y &= y/b, & H &= h/R_x, \\ P &= p/E, & \rho &= \bar{\rho}/\rho_o, & \eta &= \bar{\eta}/\eta_o, & (7) \\ k &= a/b, & U &= \eta_o u/ER_x, & W &= w/ER_x^2, \\ G &= \alpha E \end{aligned}$$

여기서, 유효탄성계수  $E$ 의 단위는 [GPa]이

고, 접촉타원의 타원비  $k$ 와 타원체의 곡률반경  $R_x, R_y$ 과의 관계는 다음식을 사용하였다[5].

$$k = \left( \frac{R_x}{R_y} \right)^{2/3} \quad (8)$$

따라서, 식(1)-식(4), 식(6)을 무차원화하면 다음식들과 같이 나타내어진다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\rho H^3}{\eta} \frac{\partial P}{\partial X} \right) + k^2 \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\rho H^3}{\eta} \frac{\partial P}{\partial Y} \right) &= 12U \frac{a}{R_x} \frac{\partial(\rho H)}{\partial X} \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta &= \exp \left[ \{ \ln(\eta_o) + 9.67 \} \right. \\ &\quad \left. \cdot \{-1 + (1 + 5.1EP)^2\} \right] \quad (10) \end{aligned}$$

$$\rho = 1 + \frac{0.58EP}{1 + 1.68EP} \quad (11)$$

$$H = H_o + \frac{a^2}{2R_x^2} \left\{ X^2 + \frac{R_x}{k^2 R_y} Y^2 \right\} + H_d \quad (12)$$

$$W = \frac{a^2}{kR_x^2} \iint P \, dX \, dY \quad (13)$$

한편, 구름방향 출구부에는 다음의 레이놀즈 경계조건식을 적용한다.

$$P = \frac{\partial P}{\partial X} = \frac{\partial P}{\partial Y} = 0 \quad (14)$$

### 4. 수치해석

본 논문에서는 접촉타원의 장축방향으로 윤활유가 유입되는 경우의 타원접촉 EHL 문제를 수치해석하기 위하여 유한차분법과 뉴우튼-랩슨 방법을 사용하고자 한다. 이 방법은 윤활유가 단축방향으로 유입되는 경

우의 타원접촉문제[3-4] 및 유한한 길이의 선접촉문제[7-8]와 같은 3차원 EHL 문제의 수치해석에 적용되어 지금까지 제시된 수치해석방법중에서 해석과정이 가장 체계적임과 동시에 정확한 해석결과를 제시하였다.

불균일한 격자계에 대한 식(9)의 유한차분형태는 참고문헌[3-4]와 거의 동일하며, 다음식과 같이 표현된다.

$$f_{i,j} = \frac{\rho_{i+1/2,j} H_{i+1/2,j}^3}{\Delta X_i \eta_{i+1/2,j}} (P_{i+1,j} - P_{i,j}) - \frac{\rho_{i-1/2,j} H_{i-1/2,j}^3}{\Delta X_{i-1} \eta_{i-1/2,j}} (P_{i,j} - P_{i-1,j})$$

$$+ \frac{k^2 (\Delta X_{i-1} + \Delta X_i)}{\Delta Y_{j-1} + \Delta Y_j} \left\{ \frac{\rho_{i,j+1/2} H_{i,j+1/2}^3}{\Delta Y_j \eta_{i,j+1/2}} (P_{i,j+1} - P_{i,j}) - \frac{\rho_{i,j-1/2} H_{i,j-1/2}^3}{\Delta Y_{j-1} \eta_{i,j-1/2}} (P_{i,j} - P_{i,j-1}) \right\}$$

$$- 12U \frac{b}{R_x} (\rho_{i+1/2,j} H_{i+1/2,j} - \rho_{i-1/2,j} H_{i-1/2,j}) = 0$$

(15)

$$(i=2, \dots, M_j, \quad j=2, \dots, N-1)$$

여기서,  $M_j$ 와  $N$ 은 각각 식(14)의 레이놀즈 경계조건을 만족시키는 X방향 격자의 수와 Y방향격자의 수이다[3-4,7-8].

비선형성이 아주 강한 식(15)의 미지수  $P_{i,j}$ 를 구하기 위하여 뉴우튼-랩슨 방법을 적용하면 다음식과 같이 된다.

$$\sum_k \sum_l \left( \frac{\partial f_{i,j}}{\partial P_{k,l}} \right)^n (P_{k,l}^{n+1} - P_{k,l}^n) + \left( \frac{\partial f_{i,j}}{\partial H_o} \right)^n \cdot (H_o^{n+1} - H_o^n) + f_{i,j}^n = 0 \quad (16)$$

$$(i=2, \dots, M_j, \quad j=2, \dots, N-1)$$

식(13)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$W = \sum_{i=2}^{M_i} \sum_{j=2}^{N-1} P_{i,j} \Delta A_{i,j} \quad (17)$$

$$\Delta A_{i,j} = \frac{a^2}{4kR_x^2} (\Delta X_{i-1} + \Delta X_i) \cdot (\Delta Y_{j-1} + \Delta Y_j) \quad (18)$$

식(16)과 식(17)에서 미지수와 식의 수가 서로 동일하므로 해석이 가능하며 보다 상세한 수치해석과정은 참고문헌[3-5]에 제시되어 있다.

## 5. 결과 및 고찰

본 논문에서는 수치해석결과의 타당성을 검증하기 위하여 동일한 문제를 다루고 있는 Chittenden 등[5]의 경우와 계산조건을 동일하게 두었다.

타원비가  $k=1.667$ 인 조건에서 윤활유가 접촉타원의 장축방향으로 유입되는 경우의 유막형상은 Fig.2에, 이와는 달리 단축방향으로 유입되는 경우에 대한 결과는 Fig.3에 각각 나타내었다. 이들 그림에서 + 표시는 Hertz 접촉타원의 중심( $X=0, Y=0$ )을 나타낸다. 윤활유 유입방향의 차이에도 불구하고 과도한 측면누설(side leakage)을 억제하기 위하여 EHL의 특징중에 하나인 유막형상에서 Side lobe가 모두 형성되어 있다. 이와같은 형상의 유막으로 인하여 타원접촉형태의 기계요소가 큰 하중을 지지하면서도 경계윤활상태가 아닌 유체윤활상태로

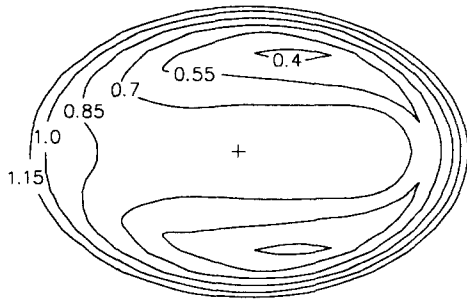


Fig. 2. Film thickness contours with lubricant entrainment along the major axis ( $H \times 10^6$ ):  $k=1.667$ ,  $G=4522$ ,  $U=0.935 \times 10^{13}$ ,  $W=0.91 \times 10^8$ .

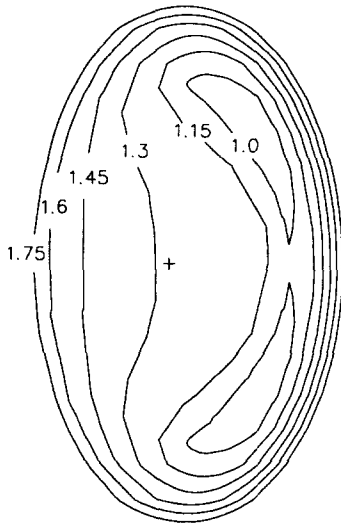


Fig. 3. Film thickness contours with lubricant entrainment along the minor axis ( $H \times 10^6$ ):  $k=1.667$ ,  $G=4522$ ,  $U=0.935 \times 10^{13}$ ,  $W=0.91 \times 10^8$ .

운전될 수 있는 것이다. 그러나, 윤활유의 유입방향에 따라서 유막의 형상과 크기는 아주 큰 차이를 보이고 있다. 특히, 장축방향으로 유입되는 경우에는 단축방향인 경우에 비하여 윤활유가 측면으로 쉽게 누설될 수 있기 때문에 유막두께는 상대적으로

아주 작게 된다. 따라서, 타원접촉의 EHL 문제에서 타원비가 동일한 경우일지라도 윤활유가 장축방향으로 유입되는 경우의 윤활조건이 한층 가혹함을 알 수 있다.

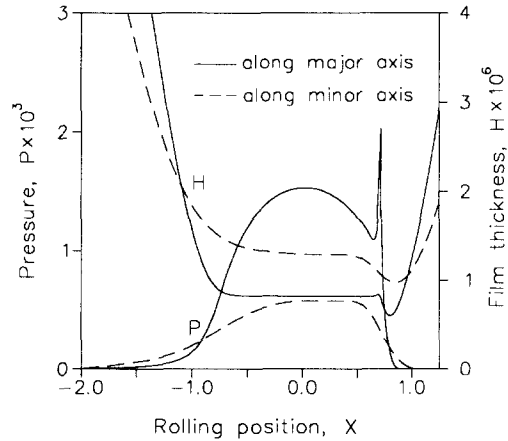


Fig. 4. Pressure profiles and film shapes in the rolling direction centerline:  $k=1.667$ ,  $G=4522$ ,  $U=0.935 \times 10^{13}$ ,  $W=0.91 \times 10^8$ .

Fig.4는 윤활유의 유입방향 중심( $Y=0$ )에서 유입방향에 따른 압력분포와 유막형상을 비교하여 나타낸 그림이다. 윤활유가 장축방향으로 유입되는 경우에는 EHL의 대표적인 특징인 구름방향 출구측에서의 압력 Spike와 함께 접촉중앙부에서의 평행한 유막형상 및 출구부에서의 유막수축(fluid film constriction)이 선명하게 나타나고 있다. 그러나, 유입방향이 단축방향인 경우에는 전체적인 압력의 크기가 장축방향인 경우에 비하여 작기 때문에 주어진 조건에 대하여 압력 Spike는 나타나지 않지만 접촉중앙부에서의 압력발생을 위하여 출구부에서의 유막수축은 발생하고 있다. 한편, Fig.2의 유막형상에서 알 수 있는 것과 같이 장축방향으로 유입되는 경우에는 쉽게 측면누설이 발생할 수 있는 접촉형상이기 때문에 단축방향인 경우에 비하여 압력발생영역이 크게 축소된다. 이와같은 경

우에도 하중을 지지하기 위해서는 Fig.2~ Fig.4의 결과로부터 다음과 같은 사실을 확인할 수 있다. 즉, 상대적으로 작은 크기로 형성된 유막은 측면과 출구부에서의 윤활 유 누설을 줄임으로써 유막내에서 고압의 유체압력이 발생할 수 있게 작용한다.

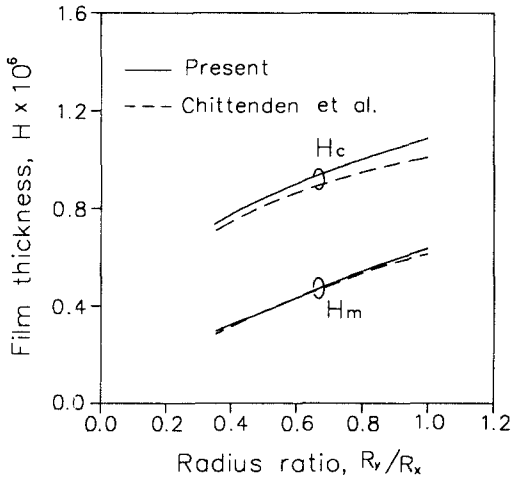


Fig. 5. Variation of central and minimum film thicknesses with contact radius ratio:  $G=4522$ ,  $U=0.935 \times 10^{13}$ ,  $W=0.91 \times 10^8$ .

Fig.5는 타원체의 주곡률반경비의 변화에 대한 최소유막두께  $H_m$  및 접촉중앙부에서의 유막두께  $H_c$ 의 변화를 Chittenden 등 [5]의 결과와 비교하여 나타낸 것이다. 이 결과,  $H_m$ 의 변화는 서로 거의 일치하지만  $H_c$ 에서는 상당한 차이를 보이고 있다. 이러한 결과는 윤활유가 단축방향으로 유입되는 경우에 대한 참고문헌[4]에서의 결과와 동일하다. 이 경우,  $H_c$ 에서의 차이는 Hamrock과 Dowson[2]의 접촉중앙부에 대한 부정확한 유막두께자료에 전적으로 기인하는 것으로 밝혀졌다. 따라서, 이와 거의 동일한 수치해석방법을 사용한 참고문헌[5]의 결과와 본 논문의 방법으로 구한 결과의  $H_c$ 에서의 상당한 차이도 동일한 원인일 것으로 추정된다. 특히, 참고문헌[5]

에서의 수치해석은 거의 경험에 의존할 뿐만 아니라 아주 완화된 수렴판정조건을 사용하였기 때문에 완전하게 수렴된 결과인지는 불확실한 실정이다. 또한, 참고문헌 [2]의 결과를 함께 사용하여 일반적인 타원 접촉 EHL 문제에 적용할 수 있는 유막두께식을 제시하였지만 정확성은 뒤떨어질 수 밖에 없는 실정이다. 따라서, 보다 정확한 수치해석결과에 기초한 유막두께식의 예측이 요구되며, 이를 위해서는 다양한 형태의 운전조건에 대한 추가연구가 절실하다. 이상의 결과에서 본 논문에서 제시한 수치해석방법은 일반적인 타원접촉의 EHL 문제의 정확한 수치해석에 유용하게 사용할 수 있음을 알 수 있다.

## 6. 결론

본 논문에서는 윤활유가 접촉타원의 장축방향으로 유입되는 경우의 타원접촉 EHL 문제를 수치해석하였다. 이를 위하여 지금까지 일반적인 3차원 EHL 문제의 수치해석에 사용된 수치해석방법중에서 해석과정이 가장 체계적이며 결과가 물리적으로 타당하다고 알려져 있는 유한차분법과 뉴우튼-랩슨 방법을 적용하였다. 윤활유의 유입방향에 따라서 EHL 특성은 아주 큰 차이를 보였으며, 특히, 장축방향으로 유입되는 경우의 윤활조건이 더욱 가혹하였다. 동일한 문제에 대한 Chittenden 등[5]의 연구결과와 비교한 결과, 본 논문에서 사용한 수치해석방법이 일반적인 형태의 타원접촉 EHL 문제의 수치해석에 가장 적합함을 알 수 있었다. 따라서, 다양한 조건에 대한 추가적인 연구를 통하여 타원접촉 EHL 문제에 대한 정확한 유막두께식을 제시할 수 있을 것으로 기대된다.

## 후 기

본 연구는 1997년도 통상산업부에서 시행한 공업기반기술개발사업의 기술개발연구의 일부입니다.

## 참 고 문 헌

1. Dowson, D. and Higginson, G.R., *Elastohydrodynamic Lubrication*, SI ed., Pergamon Press, 1977.
2. Hamrock, B.J. and Dowson, D., Isothermal Elastohydrodynamic Lubrication of Point Contacts, Part 1 : Theoretical Formulation, *J. of Lub. Tech.*, Vol.98, pp.223~229, 1976. Part 2 : Ellipticity Parameter Results, Vol.98, pp.375~383., Part 3 : Fully Flooded Results, Vol.99, pp.264~276, 1977.
3. Park, T.J. and Kim, K.K., A Numerical Analysis of the Elastohydrodynamic Lubrication of Elliptical Contacts, *Wear*, Vol.136, pp.299~312, 1990.
4. 박태조, Hamrock & Dowson의 EHL 유막두께식에 대한 평가, *한국윤활학회지*, Vol.12, No.3, pp.115-122, 1996.
5. Chittenden, R.J., Dowson, D., Dunn, J.F. and Taylor, C.M., A Theoretical Analysis of the Isothermal Elastohydrodynamic Lubrication of Concentrated Contacts, *Proc. R. Soc. Lond. A*, Vol.387, pp.245~269, 1985.
6. Chittenden, R.J., Dowson, D. and Taylor, C.M., Elastohydrodynamic Film Thickness in Concentrated Contacts, *Proc. Instn. Mech. Engrs.*, Vol.200, pp.207~226, 1986.

7. Park, T.J. and Kim, K.K., The Elastohydrodynamic Lubrication of Profiled Cylindrical Roller, *Proc. of the Int. Tribology Conf.*, Vol.2, pp.1043-1048, 1995.
8. Park, T.J. and Kim, K.K., Elastohydrodynamic Lubrication of a Finite Line Contact, *Wear*, in press.

## 기 호 설 명

$a$	Hertz 접촉타원의 장반경
$b$	Hertz 접촉타원의 단반경
$E$	$2/E = (1 - \nu_1^2)/E_1 + (1 - \nu_2^2)/E_2$
$G$	무차원재료변수, $aE$
$h$	유막두께
$H$	무차원유막두께, $h/R_x$
$H_c$	접촉중심부에서의 무차원유막두께
$H_m$	무차원최소유막두께
$k$	Hertz 접촉타원의 타원비, $a/b$
$n$	반복계산횟수
$p$	압력
$P$	무차원압력, $p/E$
$R_x$	타원체의 x방향으로의 곡률반경
$R_y$	타원체의 y방향으로의 곡률반경
$u$	타원체의 구름방향 평균속도
$U$	무차원속도변수, $\eta_0 u / ER_x$
$x, y$	좌표계
$X, Y$	무차원좌표계, $x/a, y/b$
$w$	하중
$W$	무차원하중변수, $w / ER_x^2$
$Z$	윤활유의 Roelands 계수
$a$	윤활유의 압력-점도지수
$\eta_0$	대기압상태에서의 윤활유점도
$\rho_0$	대기압상태에서의 윤활유밀도