

공기윤활 구면틸팅패드베어링에 대한 연구

김성국 · 김경웅

한국과학기술원 기계공학과

A Study on Air-Lubricated Spherical Tilting Pad Bearings

Seong-Kook Kim, Kyung-Woong Kim

Department of Mechanical Engineering, KAIST

Abstract- A theoretical analysis has been undertaken to show the influence of bearing geometry on the steady state characteristics of air lubricated spherical tilting pad bearings. The geometry variations considered are the number of pads, the eccentricity ratio, the direction of load, and the preloading.

Key Words: Spherical Tilting Pad Journal Bearings, Friction Force, Load Capacity

1. 서 론

공기윤활구면틸팅패드베어링은 틸팅패드 베어링과 구면베어링을 결합시킨 형태이다. 베어링의 특성상 구면의 형상과 미소한 유막두께를 가짐으로 인해 가공의 어려움이 있지만, 최근의 기계가공기술의 발전으로 인해 정밀한 구면형상을 가지는 공기윤활구면틸팅패드베어링의 제작도 가능하게 되었다. 틸팅패드베어링은 고속회전기계와 같이 고속안정성이 요구되는 기계에 적합한 장점을 가지고 있으며, 구면베어링은 저널베어링과 드러스트베어링이 결합된 형태로 양방향의 하중 지지가 가능함으로 인해 별도의 드러스트베어링이 필요치 않아 설치 공간이 상대적으로 줄어들며, 미스얼라인먼트(misalignment)에 민감하지 않은 장점을 가지고 있다.

본 연구에서는 새로운 형태의 베어링인 공기윤활구면틸팅패드베어링을 제안하고 베어링의 기하학적 변화에 따른 정적특성을 알아보고 동특성을 구하기 위한 기본방정식을 유도하였다.

2. 기본방정식

(1) 기본방정식

구면틸팅패드베어링의 레이놀즈방정식은 다음과 같다.

$$\sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sin \phi h^3 \rho \frac{\partial p}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3 \rho \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) = 6\mu R^2 \sin^2 \phi \left(\omega \frac{\partial}{\partial \theta} + 2 \frac{\partial}{\partial t} \right) (\rho h) \quad (1)$$

이를 무차원화하면

$$\frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sin \phi H^3 P \frac{\partial P}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{\sin^2 \phi} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(H^3 P \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) = \Lambda \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + 2 \frac{\partial}{\partial \tau} \right) (PH) \quad (2)$$

사용된 무차원 변수는 다음과 같다.

$$P = \frac{p}{p_a}, \quad H = \frac{h}{c_p}, \quad \Lambda = \frac{6\mu\omega R^2}{p_a c_p^2}, \quad \tau = \omega t \quad (3)$$

구면틸팅패드베어링의 유막두께식은

$$H = \frac{h}{c_p} = 1 - \varepsilon_p \sin \phi \cos(\theta - \theta_p) - m \sin \phi \cos(\theta - \theta_p) - \delta \sin \phi \sin(\theta - \theta_p) - \varepsilon_z \cos \phi \quad (4)$$

여기서 ε_p , m , δ , ε_z , θ_p , θ_p 는 각각 편심양, 예압양, 틸팅각, 축방향으로의 변위, 편심각, 피벗각이 된다. 레이놀즈방정식(2)으로부터 구하여진 유막압력으로부터 각 패드

의 모멘트가 균형을 이루는 틸팅각 $\bar{\delta}$ 를 구한다. 식(5)는 모멘트계산에 필요한 식이다.

$$M = \int \int P \sin^2 \phi R^3 \sin(\theta - \theta_p) d\phi d\theta \quad (5)$$

(2) 정특성

X, Y, Z 방향의 하중과 마찰력을 구할 수 있으며 이는 다음과 같다.

$$F_x = \int \int P \sin^2 \phi \cos \theta R^2 d\phi d\theta$$

$$F_y = \int \int P \sin^2 \phi \sin \theta R^2 d\phi d\theta \quad (6)$$

$$F_z = \int \int P \sin \phi \cos \phi R^2 d\phi d\theta$$

$$F_r = \frac{f \mu R^2}{\mu U R^2} = \int \left[\frac{3H}{\Lambda \sin \phi} \frac{dP}{d\theta} + \frac{\sin \phi}{H} \right] d\phi d\theta \quad (7)$$

(3) 동특성

단일 패드만을 고려하여 Fig. 2에서와 같이 각각의 좌표계를 ξ, η, δ, χ 이라고 하면 각 방향의 미소변위로 인한 압력과 유막두께의 변화는 다음과 같다.

$$P = P_s + P_1 e^{j\omega t} + P_2 e^{j\omega t} + P_3 e^{j\omega t} + P_4 e^{j\omega t}$$

$$H = H_s + \Delta \xi \sin \phi \cos(\theta - \theta_p) e^{j\omega t} + \Delta \eta \sin \phi \sin(\theta - \theta_p) e^{j\omega t} + \Delta \delta \sin \phi \sin(\theta - \theta_p) e^{j\omega t} + \Delta \chi \cos \phi e^{j\omega t} \quad (8)$$

식 (8)에서 P_s, P_1, P_2, P_3, P_4 는 각각 정상상태, ξ, η, δ, χ 방향의 미소변위에 의한 유막압력의 변화이다. 식 (8)을 식 (2)에 대입을 하고 정리하면

$$\frac{1}{\sin^2 \phi} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(H_s^3 \frac{\partial P_s P_1}{\partial \theta} + 3H_s^2 H_1 P_s \frac{\partial P_s}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sin \phi H_s^3 \frac{\partial P_s P_1}{\partial \phi} + \sin \phi 3H_s^2 H_1 P_s \frac{\partial P_s}{\partial \phi} \right) = (9)$$

$$\Lambda \frac{\partial (P_s H_1 + P_1 H_s)}{\partial \theta} + 2j\Lambda \gamma (P_s H_1 + P_1 H_s)$$

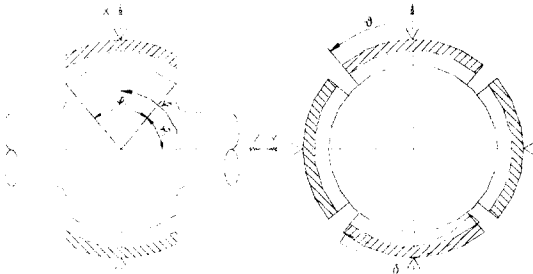


Fig. 1 Coordinates of the spherical tilting bearing

위의 식에서 $P_i = P_{re} + jP_{im}$, ($i=1,2,3,4$)이고 H_i 는 다음과 같다.

$$H_1 = \sin \phi \cos(\theta - \theta_p), \quad H_2 = \sin \phi \sin(\theta - \theta_p), \quad (10)$$

$$H_3 = \sin \phi \sin(\theta - \theta_p), \quad H_4 = \cos \phi$$

단일패드에 대한 운동방정식은 식 (11)과 같고 식(9)에서 구하여진 압력을 이용하여 강성과 감쇠계수를 구할 수 있다.

$$F_\xi = K_{\xi\xi}\xi + K_{\xi\eta}\eta + K_{\xi\delta}\delta + K_{\xi\chi}\chi + j\gamma(B_{\xi\xi}\xi + B_{\xi\eta}\eta + B_{\xi\delta}\delta + B_{\xi\chi}\chi)$$

$$F_\eta = K_{\eta\xi}\xi + K_{\eta\eta}\eta + K_{\eta\delta}\delta + K_{\eta\chi}\chi + j\gamma(B_{\eta\xi}\xi + B_{\eta\eta}\eta + B_{\eta\delta}\delta + B_{\eta\chi}\chi) \quad (11)$$

$$F_x = K_{x\xi}\xi + K_{x\eta}\eta + K_{x\delta}\delta + K_{x\chi}\chi + j\gamma(B_{x\xi}\xi + B_{x\eta}\eta + B_{x\delta}\delta + B_{x\chi}\chi)$$

$$M = K_{\delta\xi}\xi + K_{\delta\eta}\eta + K_{\delta\delta}\delta + K_{\delta\chi}\chi + j\gamma(B_{\delta\xi}\xi + B_{\delta\eta}\eta + B_{\delta\delta}\delta + B_{\delta\chi}\chi)$$

식(11)을 정리하면

$$K_{\xi\xi} = K_{\xi\xi} - [\rho(K_{\xi\xi}K_{\delta\xi} - \gamma^2 B_{\xi\xi}B_{\delta\xi}) + q\gamma(K_{\xi\xi}B_{\delta\xi} + K_{\delta\xi}B_{\xi\xi})]$$

$$K_{\xi\eta} = K_{\xi\eta} - [\rho(K_{\xi\xi}K_{\delta\eta} - \gamma^2 B_{\xi\xi}B_{\delta\eta}) + q\gamma(K_{\xi\xi}B_{\delta\eta} + K_{\delta\eta}B_{\xi\xi})]$$

$$K_{\xi\chi} = K_{\xi\chi} - [\rho(K_{\xi\xi}K_{\delta\chi} - \gamma^2 B_{\xi\xi}B_{\delta\chi}) + q\gamma(K_{\xi\xi}B_{\delta\chi} + K_{\delta\chi}B_{\xi\xi})]$$

$$K_{\eta\xi} = K_{\eta\xi} - [\rho(K_{\eta\eta}K_{\delta\xi} - \gamma^2 B_{\eta\eta}B_{\delta\xi}) + q\gamma(K_{\eta\eta}B_{\delta\xi} + K_{\delta\xi}B_{\eta\eta})]$$

$$K_{\eta\eta} = K_{\eta\eta} - [\rho(K_{\eta\eta}K_{\delta\eta} - \gamma^2 B_{\eta\eta}B_{\delta\eta}) + q\gamma(K_{\eta\eta}B_{\delta\eta} + K_{\delta\eta}B_{\eta\eta})]$$

$$K_{\eta\chi} = K_{\eta\chi} - [\rho(K_{\eta\eta}K_{\delta\chi} - \gamma^2 B_{\eta\eta}B_{\delta\chi}) + q\gamma(K_{\eta\eta}B_{\delta\chi} + K_{\delta\chi}B_{\eta\eta})]$$

$$K_{x\xi} = K_{x\xi} - [\rho(K_{x\chi}K_{\delta\xi} - \gamma^2 B_{x\chi}B_{\delta\xi}) + q\gamma(K_{x\chi}B_{\delta\xi} + K_{\delta\xi}B_{x\chi})]$$

$$K_{x\eta} = K_{x\eta} - [\rho(K_{x\chi}K_{\delta\eta} - \gamma^2 B_{x\chi}B_{\delta\eta}) + q\gamma(K_{x\chi}B_{\delta\eta} + K_{\delta\eta}B_{x\chi})]$$

$$K_{x\chi} = K_{x\chi} - [\rho(K_{x\chi}K_{\delta\chi} - \gamma^2 B_{x\chi}B_{\delta\chi}) + q\gamma(K_{x\chi}B_{\delta\chi} + K_{\delta\chi}B_{x\chi})]$$

$$B_{\xi\xi} = B_{\xi\xi} - [\rho(K_{\xi\xi}B_{\delta\xi} + K_{\delta\xi}B_{\xi\xi}) + q\gamma(B_{\xi\xi}B_{\delta\xi} - K_{\xi\xi}K_{\delta\xi}/\gamma^2)]$$

$$B_{\xi\eta} = B_{\xi\eta} - [\rho(K_{\xi\xi}B_{\delta\eta} + K_{\delta\eta}B_{\xi\xi}) + q\gamma(B_{\xi\xi}B_{\delta\eta} - K_{\xi\xi}K_{\delta\eta}/\gamma^2)]$$

$$B_{\xi\chi} = B_{\xi\chi} - [\rho(K_{\xi\xi}B_{\delta\chi} + K_{\delta\chi}B_{\xi\xi}) + q\gamma(B_{\xi\xi}B_{\delta\chi} - K_{\xi\xi}K_{\delta\chi}/\gamma^2)]$$

$$B_{\eta\xi} = B_{\eta\xi} - [\rho(K_{\eta\eta}B_{\delta\xi} + K_{\delta\xi}B_{\eta\eta}) + q\gamma(B_{\eta\eta}B_{\delta\xi} - K_{\eta\eta}K_{\delta\xi}/\gamma^2)]$$

$$B_{\eta\eta} = B_{\eta\eta} - [\rho(K_{\eta\eta}B_{\delta\eta} + K_{\delta\eta}B_{\eta\eta}) + q\gamma(B_{\eta\eta}B_{\delta\eta} - K_{\eta\eta}K_{\delta\eta}/\gamma^2)]$$

$$B_{\eta\chi} = B_{\eta\chi} - [\rho(K_{\eta\eta}B_{\delta\chi} + K_{\delta\chi}B_{\eta\eta}) + q\gamma(B_{\eta\eta}B_{\delta\chi} - K_{\eta\eta}K_{\delta\chi}/\gamma^2)]$$

$$B_{x\xi} = B_{x\xi} - [\rho(K_{x\chi}B_{\delta\xi} + K_{\delta\xi}B_{x\chi}) + q\gamma(B_{x\chi}B_{\delta\xi} - K_{x\chi}K_{\delta\xi}/\gamma^2)]$$

$$B_{x\eta} = B_{x\eta} - [\rho(K_{x\chi}B_{\delta\eta} + K_{\delta\eta}B_{x\chi}) + q\gamma(B_{x\chi}B_{\delta\eta} - K_{x\chi}K_{\delta\eta}/\gamma^2)]$$

$$B_{x\chi} = B_{x\chi} - [\rho(K_{x\chi}B_{\delta\chi} + K_{\delta\chi}B_{x\chi}) + q\gamma(B_{x\chi}B_{\delta\chi} - K_{x\chi}K_{\delta\chi}/\gamma^2)]$$

$$\rho = \frac{K_{rr} - \gamma^2 I}{(K_{rr} - \gamma^2 I)^2 + (\gamma B_{rr})^2}, \quad q = \frac{\gamma B_{rr}}{(K_{rr} - \gamma^2 I)^2 + (\gamma B_{rr})^2} \quad (12)$$

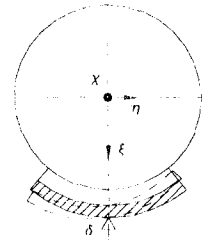


Fig. 2 Coordinates of the single tilting pad bearing

이를 좌표변환에 의하여 XYZ좌표계로 나타내면 다음과 같이 9개의 강성계수가 얻어진다.

$$\begin{aligned}
 K_{xx} &= K_{\xi\xi} C^2 + K_{\eta\eta} S^2 - K_{\xi\eta} CS - K_{\xi\eta} CS \\
 K_{yy} &= K_{\xi\xi} C^2 - K_{\eta\eta} S^2 + K_{\xi\eta} CS - K_{\eta\xi} CS \\
 K_{xz} &= K_{\xi\xi} C - K_{\eta\eta} S \\
 K_{yx} &= K_{\xi\xi} C^2 - K_{\eta\eta} S^2 + K_{\xi\eta} CS - K_{\eta\xi} CS \\
 K_{xy} &= K_{\eta\eta} C^2 + K_{\xi\xi} S^2 + K_{\xi\eta} CS + K_{\eta\xi} CS \\
 K_{yz} &= K_{\xi\xi} C + K_{\eta\eta} S \\
 K_{zx} &= K_{\xi\xi} C - K_{\eta\eta} S \\
 K_{zy} &= K_{\xi\xi} C + K_{\eta\eta} S \\
 K_{zz} &= K_{zz}
 \end{aligned} \tag{13}$$

여기서, C는 $\cos \theta_p$, S는 $\sin \theta_p$ 함수이다.

앞에서와 같은 방법으로 9개의 감쇠계수를 구할 수 있다.

3. 해석

베어링패드의 격자는 40×12 으로 나누었다. 틸팅각은 Newton-Rapson법을 사용하여 계산하였으며 해석대상의 베어링은 패드수가 각각 3패드, 4패드, 5패드, 6패드이고 $\phi_s=45^\circ$, $\phi_e=90^\circ$ 인 구면틸팅패드베어링이다. 편심양과 예압양을 달리하여 계산을 하였으며 하중방향이 패드사이인 경우(LBP)와 패드위(LOP)인 경우에 대하여 해석을 하였다. 해석순서는 다음과 같다.

- ① 필요한 데이터를 입력한다.
- ② 레이놀즈방정식 (2)를 푼다.
- ③ 압력 수렴조건과 모멘트균형을 이루는 틸팅각을 만족할 때까지 ②→③을 반복한다.
- ④ 부하능력과 마찰력을 계산한다.

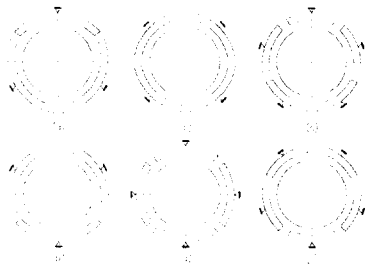


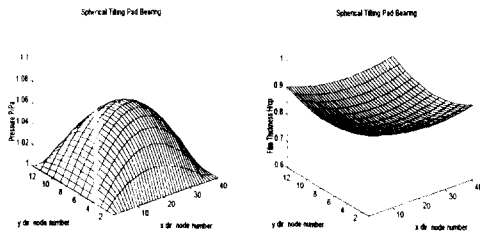
Fig. 3 Bearing types

압력의 수렴조건은 다음의 조건을 따른다.

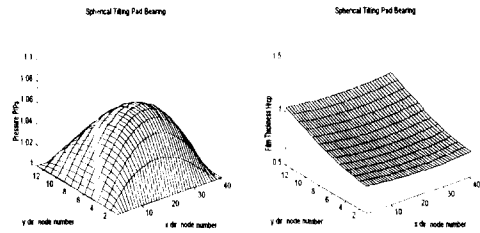
$$\sum_{j=0}^N \sum_{i=0}^N |P_{ij}^n - P_{ij}^{n-1}| / \sum_{j=0}^N \sum_{i=0}^N |P_{ij}^n| \leq 10^{-6} \tag{14}$$

Fig. 3에서(a),(c),(e)는 LBP, (b),(d),(f)는 LOP의 경우이다.

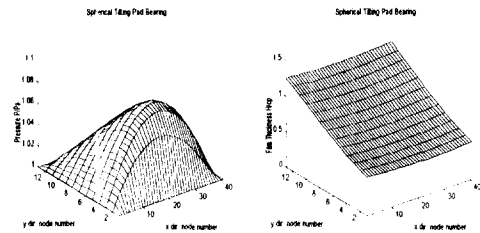
4. 해석결과 및 고찰



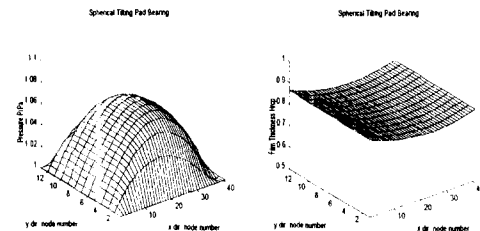
(a) $\epsilon_p=0.0$, $\epsilon_e=0.0$, $\lambda=10$, $m=0.2$, 4pads,



(b) $\epsilon_p=0.0$, $\epsilon_e=0.2$, $\lambda=10$, $m=0.2$, 4pads,



(c) $\epsilon_p=0.0$, $\epsilon_e=0.5$, $\lambda=10$, $m=0.2$, 4pads,



(d) $\epsilon_p=0.0$, $\lambda=10$, $m=0.2$, 4pads,

Fig. 4 Pressure and film thickness

Fig. 4는 베어링수가 10이고 예압이 0.2인 4패드틸팅패드베어링의 유막두께와 압력으로 (d)의 원통형 틸팅패드베어링과 비교해 보면 축방향 편심이 커질수록 슬라이드모양의 유막두께를 가지며, 압력은 편심이 되는 방향으로 최대 압력이 발생하는 위치가 이동함을 알 수 있다. 부하능력은 유막두께가 원통형의 틸팅패드베어링에 비해 큼으로 인해 원통형보다는 떨어지지만 Z 방향 편심으로 인해 양방향으로 부하지지 능력이 생김을 알 수 있다.

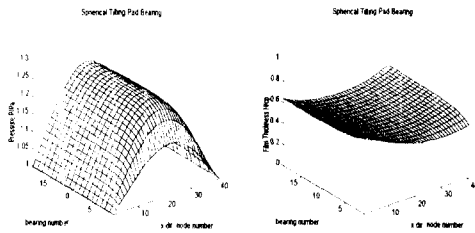
Fig. 5 (a)는 편심이 없고 예압이 0.5인 4패드베어링의 중심에서의 유막두께와 압력으로 베어링수가 증가하여도 유막두께와 압력의 변화가 점차 줄어드는 것을 알 수 있다. 이는 (b)의 원통형 틸팅패드베어링에서의 결과와 동일한 경향이며 틸팅패드베어링의 특성상 베어링수가 증가하여도 모멘트균형에 의해 유막두께가 계속 변하기 때문이다.

Fig. 6은 축방향과 원주방향으로의 편심이 없는 경우 예압양을 달리하면서 패드수에 따른 마찰력의 변화를 구한 것이다. 구

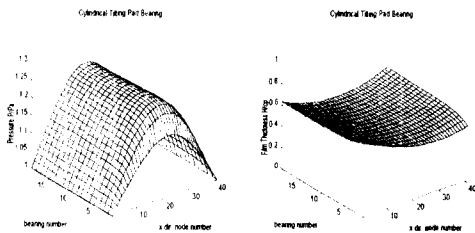
면틸팅패드베어링에 있어 마찰력은 패드수보다는 유막두께에 의해 결정됨을 알 수 있다.

Fig. 7은 베어링수와 축방향편심을 변화시켜가면서 마찰력과 축방향의 마찰력과 부하능력을 계산한 것이다. 축방향변위가 커질수록 마찰력이 증가함을 볼 수 있는데 이는 최대압력발생영역의 유막두께가 작아짐으로 인해 마찰력이 증가하는 것이다. 또한 패드수가 많아질수록 축방향의 부하능력이 감소하는데 패드각의 크기가 작아짐으로 인해 발생압력도 작아짐을 보이고 있다. 또한 패드의 ϕ 각이 커질수록 동일한 패드각에 대하여 축방향부하능력은 증가하게 된다. 베어링수가 증가하여도 축방향부하능력은 일정값이상으로 증가하지 않는 데 이는 베어링의 틸팅작용으로 인해 발생압력이 베어링수가 증가하여도 커지지 않기 때문이다.

Fig. 8은 축방향편심이 없고 예압이 0.5인 경우에 베어링수와 원주방향의 편심양을 변화시키는 경우 LBP와 LOP에 대한 마찰력과 부하능력이다. 패드수가 3인 경우 LBP의 부하능력이 LOP의 부하능력보

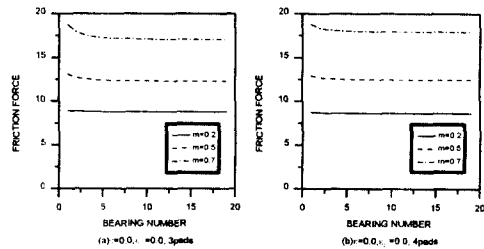


(a) $\epsilon_p=0.0$, $\epsilon_z=0.0$, $m=0.5$, 4pads.

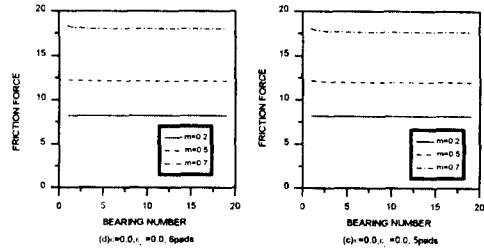


(b) $\epsilon_p=0.0$, $m=0.5$, 4pads.

Fig. 5 Maximum pressure and film thickness



(a) $\epsilon_p=0.0$, $\epsilon_z=0.0$, 4pads



(b) $\epsilon_p=0.0$, $\epsilon_z=0.0$, 4pads

Fig. 6 Friction force versus bearing

다 크지만 패드수가 4인 경우 반대로 LOP의 부하능력이 LBP인 경우보다 커짐을 알 수 있다. 이러한 경향은 패드수가 3, 5인 경우와 4, 6인 경우 같은 경향을 보이고 있다. 이는 각 패드의 압력발생의 차이에도 원인이 있지만 패드의 피봇위치로 인한 영향이 더 큰 것으로 생각된다.

5. 결 론

1. 공기윤활구면틸팅패드베어링을 제안하였으며 정특성과 동특성을 구하기 위한 식을 유도하였다.
2. 축방향편심이 있는 경우 최대 압력발생 위치가 축 중심에서 벗어남을 확인하였으며 이로 인해 축방향 부하능력이 발생함을 알 수 있다.
3. 부하능력은 베어링수가 증가하여도 일정값 이상으로 증가하지 않으며 하중의 방

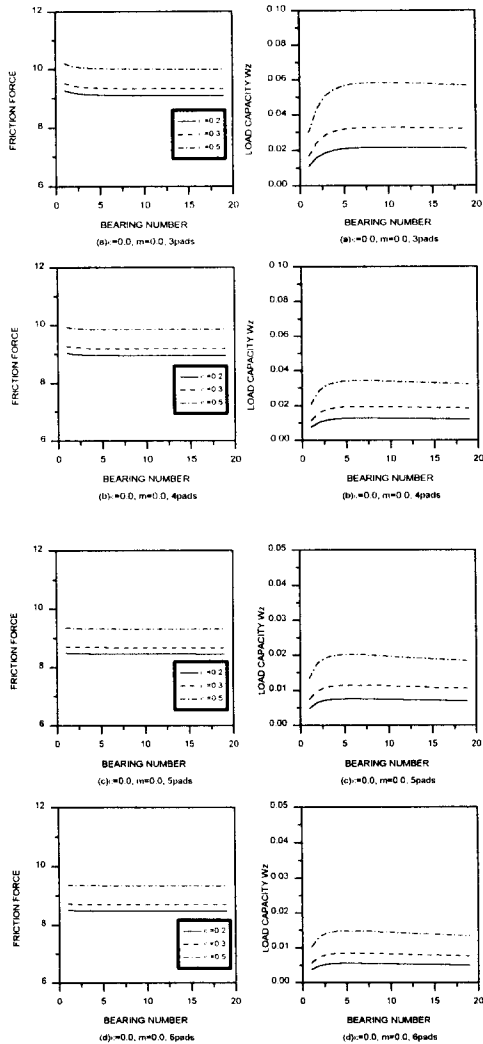


Fig. 7 Friction force and load capacity versus bearing number

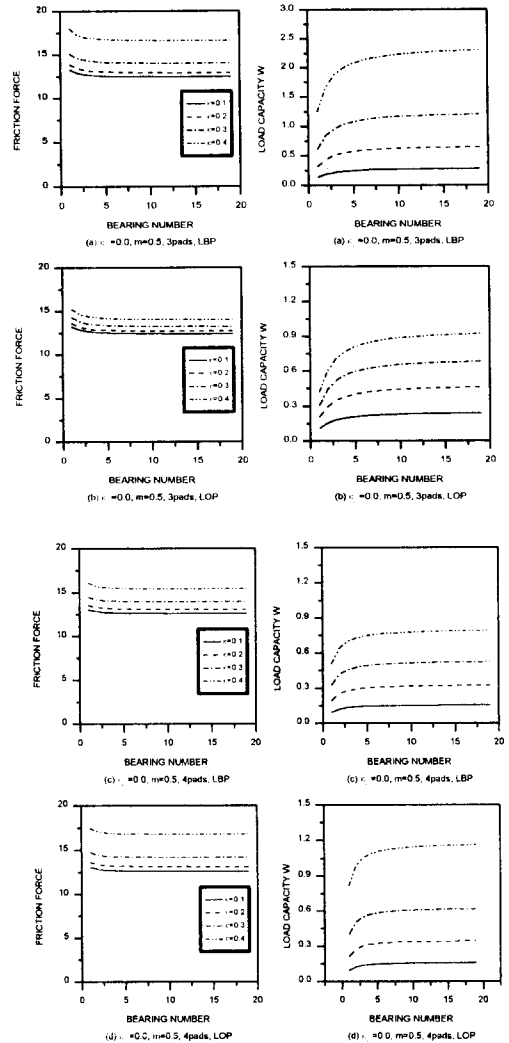


Fig. 8 Friction force and load capacity versus bearing number

향과 패드수에 따라 차이가 크다.

4. 해석결과로부터 공기유향틸팅패드베어링의 실제 적용 가능성을 확인하였다.

기호 및 약어 설명

c_p	bearing clearance
F_f	dimensionless friction force
h	film thickness
H	dimensionless film thickness
m	amount of preloading
P	dimensionless pressure
p_a	atmosphere pressure
R	bearing radius
x	coordinate of x direction
y	coordinate of y direction
Λ	bearing number
ε_p	eccentricity ratio
ε_z	eccentricity ratio with z direction
δ	tilting angle
$\bar{\delta}$	dimensionless tilting angle
θ	coordinate of circumferential direction
θ_e	direction of eccentricity
θ_p	angle of pivot
ϕ	coordinate of meridian direction
ϕ_s	start angle of meridian direction
ϕ_e	end angle of meridian direction
ρ	lubricant density
μ	lubricant viscosity
ω	rotating speed
ν	whirl ratio

참 고 문 헌

1. P. S. Leung, I. A. Craighead, T. S. Wilkinson, "An Analysis of the Steady State and Dynamic Characteristics of a Spherical Hydrodynamic Journal Bearing," J. of Tribology, Vol. 111, 1989, pp. 459-467
2. N. M. Sela, J. J. Blech, "Performance and Stability of a Hybrid Spherical Gas Gyrobearing," J. of Tribology, Vol. 113, 1991, pp. 458-463
3. A. L. GU, J.A. Walowit, D. F. Wilcock, "A Hero-Jet Driven Porous Spherical Hydrostatic Gas Bearing Gyro," J. of Lub.

Technology, Vol. 112, 1973, pp.490-498

APPENDIX

$$\begin{aligned}
 K_{\xi\xi} &= \iint P_{re} \sin^2 \phi \cos(\theta - \theta_p) d\theta d\phi \\
 K_{\xi\eta} &= \iint P_{re} \sin^2 \phi \cos(\theta - \theta_p) d\theta d\phi \\
 K_{\xi\delta} &= \iint P_{re} \sin^2 \phi \cos(\theta - \theta_p) d\theta d\phi \\
 K_{\xi x} &= \iint P_{re} \sin^2 \phi \cos(\theta - \theta_p) d\theta d\phi \\
 K_{\eta\xi} &= \iint P_{re} \sin^2 \phi \sin(\theta - \theta_p) d\theta d\phi \\
 K_{\eta\eta} &= \iint P_{re} \sin^2 \phi \sin(\theta - \theta_p) d\theta d\phi \\
 K_{\eta\delta} &= \iint P_{re} \sin^2 \phi \sin(\theta - \theta_p) d\theta d\phi \\
 K_{\eta x} &= \iint P_{re} \sin^2 \phi \sin(\theta - \theta_p) d\theta d\phi \\
 K_{\delta\xi} &= \iint P_{re} \sin^2 \phi \sin(\theta - \theta_p) d\theta d\phi \\
 K_{\delta\eta} &= \iint P_{re} \sin^2 \phi \sin(\theta - \theta_p) d\theta d\phi \\
 K_{\delta\delta} &= \iint P_{re} \sin^2 \phi \sin(\theta - \theta_p) d\theta d\phi \\
 K_{\delta x} &= \iint P_{re} \sin^2 \phi \sin(\theta - \theta_p) d\theta d\phi \\
 B_{\xi\xi} &= \iint P_{im} \sin^2 \phi \cos(\theta - \theta_p) d\theta d\phi \\
 B_{\xi\eta} &= \iint P_{im} \sin^2 \phi \cos(\theta - \theta_p) d\theta d\phi \\
 B_{\xi\delta} &= \iint P_{im} \sin^2 \phi \cos(\theta - \theta_p) d\theta d\phi \\
 B_{\xi x} &= \iint P_{im} \sin^2 \phi \cos(\theta - \theta_p) d\theta d\phi \\
 B_{\eta\xi} &= \iint P_{im} \sin^2 \phi \sin(\theta - \theta_p) d\theta d\phi \\
 B_{\eta\eta} &= \iint P_{im} \sin^2 \phi \sin(\theta - \theta_p) d\theta d\phi \\
 B_{\eta\delta} &= \iint P_{im} \sin^2 \phi \sin(\theta - \theta_p) d\theta d\phi \\
 B_{\eta x} &= \iint P_{im} \sin^2 \phi \sin(\theta - \theta_p) d\theta d\phi \\
 B_{\delta\xi} &= \iint P_{im} \sin^2 \phi \sin(\theta - \theta_p) d\theta d\phi \\
 B_{\delta\eta} &= \iint P_{im} \sin^2 \phi \sin(\theta - \theta_p) d\theta d\phi \\
 B_{\delta\delta} &= \iint P_{im} \sin^2 \phi \sin(\theta - \theta_p) d\theta d\phi \\
 B_{\delta x} &= \iint P_{im} \sin^2 \phi \sin(\theta - \theta_p) d\theta d\phi \\
 B_{x\xi} &= \iint P_{im} \sin \phi \cos \phi d\theta d\phi \\
 B_{x\eta} &= \iint P_{im} \sin \phi \cos \phi d\theta d\phi \\
 B_{x\delta} &= \iint P_{im} \sin \phi \cos \phi d\theta d\phi \\
 B_{xx} &= \iint P_{im} \sin \phi \cos \phi d\theta d\phi \\
 B_{x\xi} &= \iint P_{im} \sin^2 \phi \sin(\theta - \theta_p) d\theta d\phi \\
 B_{x\eta} &= \iint P_{im} \sin^2 \phi \sin(\theta - \theta_p) d\theta d\phi \\
 B_{x\delta} &= \iint P_{im} \sin^2 \phi \sin(\theta - \theta_p) d\theta d\phi \\
 B_{x\delta} &= \iint P_{im} \sin^2 \phi \sin(\theta - \theta_p) d\theta d\phi
 \end{aligned}$$