

# 스폰지층의 흡수 효율 비교

문용주<sup>1)</sup>, 이선호<sup>2)</sup>, 김효섭<sup>3)</sup>

## 1. 서론

최근 연안개발과 해안구조물의 건설이 활발해지면서 해안에서 발생하는 여러 가지 현상을 예측하는 것이 중요시 되고 있다. 특히 해안 지역으로 전파되는 파랑의 변형을 예측하는 것은 구조물 설계·유지 보수에 기본이 되며 중요하다 할 것이다.

이러한 파랑 변형에 대한 연구는 실험실에서의 모형실험과 컴퓨터를 이용한 수치모형 실험을 통해 연구되고 있다. 실험실에서의 모형실험은 준비과정이 복잡하고 비용이 많이 소요되나, 컴퓨터를 이용한 수치 모형실험은 상대적으로 경제적인 경우가 많다. 수치 모형실험중 한 방법은 유한 차분법이며, 수치 모형실험은 경계면 처리 방법에 따라 정확도 및 계산시간에 있어서 상당한 차이가 있을 수 있다.

본 논문에서는 Copeland(1985)의 시간 의존 환경사 방정식을 푸는 가정에서 개방 경계면에서 스폰지층을 이용하여 반사파를 최소화 시키는 방법을 비교 하기로 한다. 비교대상은 기존의 Larsen & Dancy(1983)방법과 새로운 함수를 적용하는 스폰지층 3종으로 선정하였다. 적용 결과 흡수효율은 큰차이가 없으나 Larsen & Dancy(1983) 함수를 이용하는 스폰지층의 효율이 가장 큰 것으로 나타났다.

## 2. 본론

### 2.1 기본방정식

Copeland의 시간의존형 환경사 방정식은 first-order 식을 이용하여 쌍곡선형 방정식으로 반사파를 고려한 방정식 이고, 유한 차분식하기가 쉬우며, 계산 시간이 단축되는 장점이 있다. 시간 의존형 환경사 방정식은 Booij의 포물형 환경사 방정식으로부터 유도되었다. Borhkoff의 타원형 환경사 방정식은 선형파 이론에서 수심 경사  $\nabla h$ 는 수심에 비해 상대적으로 매우 작다 ( $\Delta h \ll h$ )아, 수심경사의 곱은 ( $\nabla h \cdot \nabla h \ll 1$ ) 무시할 수가 있다는 가정하에 다음과 같은 타원형 환경사 방정식을 유도하였다.

$$\nabla \cdot (C C_g \nabla \Psi) + w^2 \frac{C_g}{C} \Psi = 0 \quad \text{식.1}$$

Boij의 포물형 환경사 방정식은 Borhkoff의 타원형 환경사 방정식에 시간에 대한 항( $\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$ )을 추가하여 유도된 식으로 다음과 같다.

1) 국민대학교 토목환경공학과 석사졸업  
2) 국민대학교 토목환경공학과 석사과정  
3) 국민대학교 토목환경공학과 교수

$$\nabla(cc_g \nabla \eta) + (k^2 cc_g - \omega^2)\eta - \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0 \quad \text{식.2}$$

여기서,  $\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = -\omega^2 \eta$ 이므로, 이 식을 식.2에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\nabla(cc_g \nabla \eta) + \frac{c_g}{c} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0 \quad \text{식.3}$$

위의 식.3은 쌍곡선형 방정식으로 Ito and Tanimoto(1972)의 선유량  $Q$ 를 이용하면 최종적으로 다음과 같은 Copeland(1985)의 쌍곡선형 시간의존 환경사 방정식 얻을 수 있다.

$$\nabla Q + C_g \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 \quad \text{식.4}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + CC_g \nabla \eta = 0 \quad \text{식.5}$$

## 2.2 수치모형 실험

2절에서 유도한 환경사방정식은 시간에 대한 항을 추가한 first-order 방정식으로 Ito & Tanimoto(1972) 및 Tanimoto(1975)에 의해 양해법으로 차분화 되었다.

### 1) 유한 차분식

기본 방정식인 식.4 및 식.5를 그림.1과 같은 격자망을 사용하여, Ito 와 Tanimoto(1972)가 사용한 양해법으로 차분화(Fine difference scheme)하면 다음과 같다.

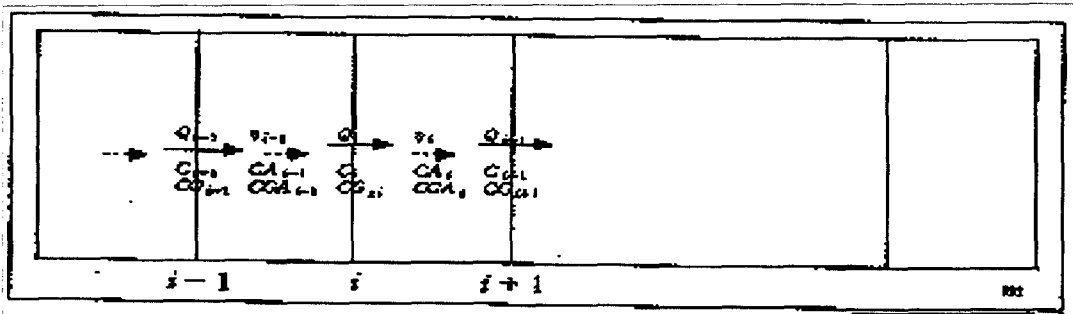


그림.1 수치모형 격자망도

$$\eta_i^{t+\Delta t/2} = \eta_i^{t-\Delta t/2} - \left(\frac{C}{C_g}\right) [Q'_{xi+1} - Q'_{xi}] \Delta t / \Delta x \quad \text{식.6}$$

$$Q'_{xi}{}^{t+\Delta t} = Q'_{xi}{}^t - (CC_g) [\eta_i^{t+\Delta t/2} - \eta_{i-1}^{t+\Delta t/2}] \Delta t / \Delta x \quad \text{식.7}$$

여기서 전자  $i$ 는  $x$ 방향의 증가분을 나타내며,  $t$ 는 시간에 대한 증가분을 뜻한다. 그림.1에서  $CA$ ,  $CGA$ 는 파의 위상속도 및 군속도를 수심 평균한 값이다.

### 2)경계조건

경계면에서의 파의반사를 처리하는 방법은 크게 두 가지로 나눌수 있는데 첫째는 방사조건(radiation condition)과 스폰지층(sponge layer)을 두어 나가는 파를 흡수하는 방법이 있을 수 있다.

먼저 방사조건(radiation condition)은 개방 경계면에서 반사되어 나오는파가 다시 반사되는 것이

아니라, 외해로 유출되도록 하는 것이다. 방사조건에서는

$$\eta_1^- = a \times \cos(\omega t), \eta_2^+ = a \times \cos(\omega(t - \Delta x/C)), \eta_2^- = \eta_2 - \eta_2^+$$

여기서  $\eta^+$ ,  $\eta^-$  는 각각 경계면에서 들어가는 파랑과 나오는 파랑이다.

다음으로 스폰지층에 의한 흡수에 의한 absorbing boundary condition은 Bjorn Engquist & Andrew Majda(1977) 및 Larsen and Dancy(1983)등에 의해 연구되었으며, 국내에서는 정원무 & 박우선(1993) 및 이장훈 & 서경덕(1997)등에 의해 연구되었다.

Larsen and Dancy(1983)는 경계면에 다음 식 8, 9 와같은 감쇄 계수를 이용하여 에너지 소모과정을 계산하였다.

$$\gamma = [ik - (\mu^2 - 1)/C, \Delta x]/\nu \tag{식.8}$$

$$\nu = 1 - \frac{1}{\mu} + \mu^2 \tag{식.9}$$

여기서,  $\gamma$ 는 감쇄 계수로 각 계산된 매 시간단계에서  $\eta$ ,  $Q$ 에 곱하면 된다.

또한  $\mu(x)$ 는  $\Delta x$ ,  $x_s$ ,  $\bar{x}$ 로 이루어진 함수로 다음 식과 같다.

$$\mu(\bar{x}) = \begin{cases} \exp[(2^{-\bar{x}/\Delta x} - 2^{-x_s/\Delta x}) \ln a] & \text{for } 0 \leq x \leq x_s \\ 1 & \text{for } x_s < x \end{cases} \tag{식.10}$$

여기서  $\bar{x}$ 는 스폰지 내부 점에서의 위치이며,  $x_s$ 는 스폰지 층의 두께,  $\Delta x$ 는 격자간격이다.

그러나 Larsen and Dancy(1983)의 스폰지층은 계산과정이 복잡하여, 방정식이 바뀔 때 마다 다시 계산해야 하는 불편함이 있다. 이에 sine, gaussian 정규분포함수, 선형함수등 3가지 함수를 감쇄 계수로 사용하여 흡수층에 대한 실험을 실시 하였다.

### 3. 비교고찰

본 논문에서 연구한 수치모형 실험은 Copeland(1985)의 쌍곡선형 시간 의존형 환경사 방정식을 이용하였으며, 경계조건의 처리는 Larsen & Dancy(1983)의 논문에서 처리한 식을 재현하고, 3가지의 감쇄함수에 대해서 스폰지층(Sponge Layer) 두께에 의한 반사율 비교를 통해 경제적인 스폰지층을 개발하였다. 결과의 순서로는 먼저 완전 반사조건에서의 수면의 변위를 계산하고, Larsen & Dancy(1983)의 스폰지 이론을 재현하였으며, 다음으로 정규분포 곡선인 Gaussian 함수를 사용하여 반사율을 계산하고, sine함수 및 선형적으로 줄어드는 경우에 대해서 반사율을 계산하였다.

반사율의 계산은 Larsen & Dancy(1983)에서 사용한 다음 식.11과 같이 계산하였다.

$$|R| = \frac{H_{\max} - H_{\min}}{H_{\max} + H_{\min}} \tag{식.11}$$

또한 본 논문에서 사용한 파랑의 파고 ( $H$ )는 0.5 m, 주기는 ( $T$ )는 3 sec, 1차원 수로의 수심은 12 m로 파의 진행에 따른 친수(shoaling), 쇄파(breaking)가 발생하지 않은 만큼의 충분한 수심을 사용하였으며, 격자간격 및 시간 간격은 각각  $\Delta x = 1.5 m$ ,  $\Delta t = 0.2 sec$  이다.

#### 1) 완전 반사조건에서의 계산 결과

완전 반사조건에서의 계산방법은 다음 그림.2와 같이 육지 경계면에서 선 유량 ( $Q$ )를 0.0으로 하여 파랑이 경계면에 도달하면서 반사되는 경우를 말한다. 이러한 조건에서 수면의 계산된 시간과 공간에 따른 변화는 그림.3과 같다.

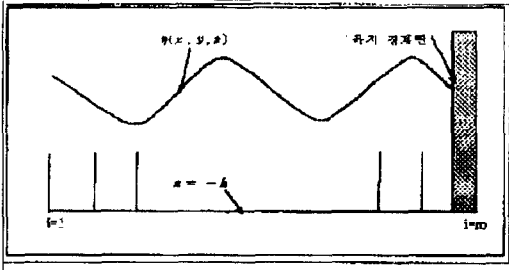


그림2 완전반사조건의 수치모형 개략도

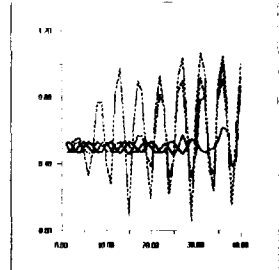


그림3 완전 반사조건에서의 시간에 따른 파고(H) 변화

## 2) Larsen & Dancy(1983)의 스폰지층을 이용한 계산

Larsen & Dancy(1983)의 논문에서 사용한 스폰지층은 식 8, 9, 10을 이용하여 매 시간단계마다 계산을 하는 것이다. Larsen & Dancy(1983)의 스폰지층에 대한 계산은 Larsen & Dancy(1983)의 수면의 변화를 통한 스폰지층의 효과를 그림 4와 같으며, 반사비는 다음 그림 5와 같다.

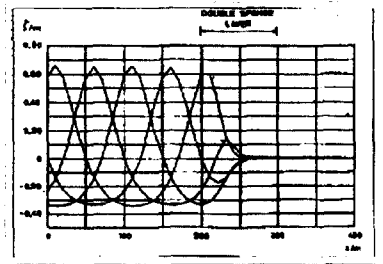


그림4 Larsen & Dancy(1983)의 스폰지층에 의한 수면 변화

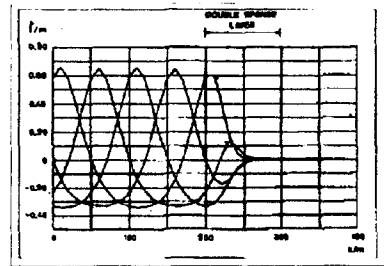


그림5 Larsen & Dancy(1983)의 스폰지층에 의한 파의 반사율

## 3) Gaussain 함수를 사용한 스폰지층의 반사율 계산

경계면에서의 스폰지층은 층내부로 들어온 파를 소모시키므로 외해경계를 따라 설치하면 계산 영역 내부에서 발생한 반사파의 재반사를 방지해주며, 파 에너지의 소모과정은 매 시간단계에서 구해진  $\eta$ ,  $Q$ 에 다음식과 같은 일정한 소모율  $fd(\bar{x})$ 을 곱해줌으로 가능하다. 소모율  $fd(\bar{x})$ 는 다음과 같은 정규 분포함수를 사용하였다.

$$fd(\bar{x}) = \frac{2.5}{2\pi} e^{-((\bar{x}^2 \times \frac{\Delta x}{x_s})/2)} + 1 \tag{식.12}$$

식.12를 이용한 수면의 변위는 다음 그림 6과 같다.

## 4) sinc 함수를 이용한 스폰지층의 반사율 계산

기본 적인 방법은 앞서와 같다. 소모율  $fd(\bar{x})$ 는 다음과 같이 sine함수를 사용하였다.

$$fd(\bar{x}) = \cos(\pi \bar{x} / \Delta x / x_s) / 2 + 0.5 \tag{식.13}$$

식.13을 이용한 수면의 변위는 다음 그림 7과 같다.

## 5) 선형 함수를 이용한 스폰지층의 반사율 계산

기본 적인 방법은 앞서와 같다. 소모율  $fd(\bar{x})$ 는 다음과 같이 선형함수를 사용하였다.

$$fd(x) = -\bar{x} / (\Delta x/x_s) + 1$$

식.14를 이용한 수면의 변위는 다음 그림.8과 같다.

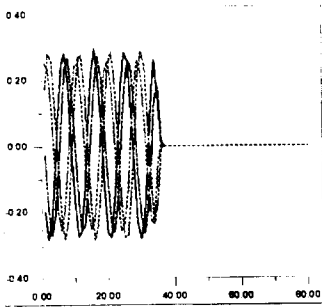


그림.6 Gaussian 정규분포 곡선을 이용한 스폰지조건에서의 수면변화

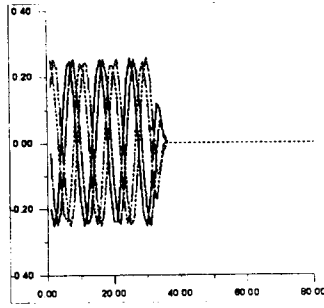


그림.7 sine곡선을 이용한 스폰지조건에서의 수면변화

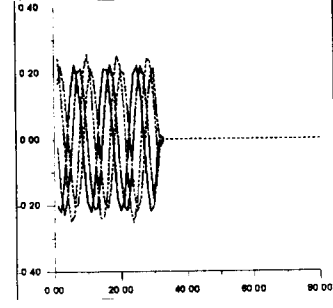


그림.8 선형적으로 감소하는 스폰지 조건에서의 수면 변화

### 4. 결론

이상 3장에서 살펴본 여러 가지 형태의 스폰지층에 의한 파고의 반사율은 다음 표.1과 같다. 반사율은 식.11과 같이 다음 식을 사용하여 구하였다.

$$|R| = \frac{H_{max} - H_{min}}{H_{max} + H_{min}}$$

또한 스폰지층의 두께는 계산영역과 직접적인 연관이 있으므로 3가지 경우로 나누어 비교하였다. Larsen & Dancy(1983)의 스폰지의 경우  $|R| \cong 5\%$  인데 이를 기준으로 가장 적당한 스폰지를 선택한다.

스폰지 형태	스폰지층 두께( $x_s$ )	반사율		비 고
		$ R $	$\frac{H_{max} - H_{min}}{H_{max} + H_{min}}$	
Gaussian 정규 분포 함수	$3\Delta x$		23.9	
$fd(x) = \frac{2.5}{2\pi} e^{-((\bar{x} - \frac{\Delta x}{x_s})/2)^2} + 1$	$5\Delta x$		10.1	
	$10\Delta x$		7.5	
	sine함수	$3\Delta x$		10.6
$fd(x) = \cos(\pi x \cdot \Delta x/x_s)/2 + 0.5$	$5\Delta x$		5.0	
	$10\Delta x$		4.7	
선형함수	$3\Delta x$		24.7	
	$5\Delta x$		14.5	
	$10\Delta x$		9.2	

표.1 각 스폰지 형태별 반사율 비교

위 3 가지 방법을 비교하여 본 결과 표.1 과 같으며, sine함수의 계산시간을 계산해 보았을 때  $5\Delta x$  가 가장 타당한 것으로 사료된다.

## 5. 기호

$a$  : wave amplitude function ( $=H/2$ )

$C$  : wave celerity

$C_g$  : group velocity

$H$  : wave height

$i$  : imaginary unit ( $i^2 = -1$ )

$k$  : local wave number

$T$  : wave period

$\gamma$  : proportionality coefficient

$\nabla$  : 2-D gradient operator

$\eta$  : surface elevation

$\mu$  : shallow water parameter

$\omega$  : wave angular frequency

## 6. 참고문헌

- 1) 이창훈, 서경택, 1996. Application of Time-dependent Wave Equation to Random Wave over Ripple patch, 한국해양 공학회
- 2) Berkhoff, J.C.W., 1972. Computation of combined refraction-diffraction. proc. 13th Coastal Eng. Conf., Vancouver, Vol. 1
- 3) Booij, N., 1993. A note on the accuracy of the mild-slope equation. Coastal Eng.
- 4) Copeland, G.J.M., 1985. A practical alternative to the mild-slope wave equation. Coastal Eng.
- 5) Ito and Katsutoshi Tanimoto, 1972, A Method of numerical analysis of wave propagation, - application to wave diffraction and refraction. proc. Conf. Coastal Eng. 13th
- 6) Larsen J. and Dancy H. 1983, Open boundary iv short wave simulation- A new Approach, Coastal Eng., 7th