

새로운 L^1 -웨이브릿을 이용한 신호해석과 그 응용

허영대*, 안주원**, 문광석**, 정희태***, 권기룡***

* 포항전문대학 전산정보처리과, ** 부경대학교 전자공학과

*** 부산외국어대학교 전자공학과

A New L^1 -Wavelets Using Signal Analysis and Their Applications

Yeong-Dae Heo*, Kwang-Seok Moon**, Hyeon-Tae Jeong***, Ki-Ryong Kwon***

* Dept. of Computer Science & Info., Pohang College

** Dept. of Elec. Eng., Pukyong National Univ.

*** Dept. of Elec. Eng., Pusan Univ. of Foreign Studies

요 약

웨이브릿 해석에서 CWT(continuous wavelet transform)에서는 Plancherel 형태의 복원 정리가 성립하고, 웨이브릿 급수는 frame 이론과 다해상도 이론(multiresolution analysis)을 활용한 이산복원정리가 성립한다. 복원정리가 만들어짐에 따라 이에 상응하는 웨이브릿이 생성되는데, CWT에서는 허용조건(admissibility condition)을 만족하는 basic wavelet이고, 웨이브릿 급수에서는 MRA를 이용한 Daubechies 웨이브릿, frame 이론을 이용한 Meyer 웨이브릿 등을 생각할 수 있다.

본 연구에서는 CWT에서 사용한 허용조건을 자연스럽게 확장함으로써 기존의 것보다 간편하고 활용도가 우수한 이산복원정리를 발견하고, 이에 상응하는 보다 만들기 쉬운 새로운 형태의 L^1 웨이브릿군을 개발함을 목적으로 한다. 본 연구에 개발한 새로운 웨이브릿을 사용하여 시간-주파수에서의 신호 복원 및 분석에 응용한다.

1. 서 론

정상상태(stationary)의 신호에 대한 분석은 푸리에 변환을 통해서 이루어지고 있다. 이것은 신호의 불규칙한 정도는 알 수 있지만, 전 공간영역 상에서 적분을 하므로 공간적으로 국부적인 특성을 만족하지 않는다. 따라서 신호가 고주파일때는 푸리에 변환에서 커널(kernel)의 주파수 성분이 심한 발진(oscillation)으로 인해 신호의 강약에 상관 없이 주파수 스펙트럼은 0으로 접근해서 우리가 원하는 스펙트럼 정보는 얻지 못하는 단점이 있다[1].

이런 단점을 보완하기 위하여 1946년 Gabor는 시간 분해능(time localization)을 원할하게 하는 윈도우 함수를 이용한 윈도우 푸리에 변환(windowed Fourier

transform)을 제시하였다. Allen 등[2]은 분석을 하고자 하는 신호가 비정상상태(nonstationary)인 경우에 신호가 시변-스펙트럼 특성을 갖기 때문에 짧은 시간 동안 정상적인 신호로 가정하고 STFT (short time Fourier transform) 기법을 이용하여 신호를 분석 및 합성하는 기법을 제안하였다. 이와같은 STFT 기법은 시간해상도가 주파수에 상관없이 항상 일정한 시간대에 옮겨지므로 보다 정교한 신호분석이나 비정상상태의 신호해석을 하는데는 적절하지 못하다. 보다 나은 신호해석을 위해서는 어떠한 신호가 들어오더라도 적절한 time-frequency window에서 스펙트럴 성분을 고려할 수 있어야 한다.

웨이브릿은 1910년 Haar가 처음으로 고조파 해석

(harmonic analysis)을 위하여 푸리에 스펙트럼을 옥타브 밴드로 나눈 직교 웨이브릿을 만들었다. Daubechies[3,4]는 유한한 길이(compactly support)의 스케일링 함수 및 웨이브릿을 발생시킬 수 있는 Daubechies 웨이브릿을 제안하였고, Mallat 등[5,6]이 다해상도(multiresolution) 이론을 발표한 후 웨이브릿 변환 이론은 크게 발전 및 응용이 되어지고 있다.

웨이브릿 변환은 시간 및 주파수에 대하여 국부성(localization)을 가짐으로 이의 변환은 통계적 특성을 모르거나 시간적으로 예측할 수 없는 불확정신호를 처리하는데 효과적으로 사용된다[7].

웨이브릿 변환은 주어진 시간함수를 실수의 2차원 평면 $L^2(R)$ 에서 직교기저함수(orthogonal basis function)들의 집합을 형성하고 있는 웨이브릿 평면으로 투사하여 서로 다른 분해능을 갖는 신호들을 변환시킴으로서 주어진 시간함수의 신호를 각각 다른 분해능에서 해석할 수 있는 변환이다. 웨이브릿 변환에서의 기저함수들은 원형 웨이브릿을 천이(translation) 및 확장/수축(dilation)을 시킴으로서 만들어진다.

본 논문에서는 수학적으로 증명하여 개발한 L^1 -함수 공간에서 성립하는 새로운 웨이브릿 변환을 사용하여 시간-주파수에서의 신호 복원 및 분석에 응용한다. 제안한 방법은 L^1 -함수 공간에서 허용조건을 만족하고, 복원조건이 성립하는 새로운 웨이브릿을 개발한다. 제안한 웨이브릿 형태는 Mexican Hat과 비슷하다. 새로운 웨이브릿 변환을 사용한 시간-주파수에서의 분석 및 복원한 신호는 고주파의 합성신호인 구형파 및 비정상상태의 신호인 음성신호를 이용하여 복원됨을 확인하였다.

2. 웨이브릿 변환 이론

1. 푸리에 변환 및 Gabor 변환

기존의 푸리에 해석은 L^2 공간에서 자승적분 가능한 신호를 유한구간 $(0, 2\pi)$ 에서 푸리에 급수로 분석한 것이다. 푸리에 변환은

$$(Ff)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (1)$$

이다. 여기에서 $(Ff)(\omega)$ 가 고주파수 일때는 $e^{-i\omega t}$ 의 심한 발진으로 신호의 강약에 상관없이 0의 값으로 접근해서 원하는 스펙트럼 정보를 주지 못한 것이 단점이다.

이런 결점을 보완하기 위하여 D. Gabor는 1946년에 시간 분해능을 원할하게 하는 윈도우 함수 $g(t-b)$ 를 활용해 다음과 같은 윈도우 푸리에 변환을 소개하였다. 이 윈도우 푸리에변환은 주파수 ω 에

$$(T^{win}f)(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x-t)e^{-i\omega x} dx \quad (2)$$

관련없이 $e^{-i\omega t}g(t-b)$ 와 똑같은 포락선(envelope) 함수 g 로 적정한 시간대에 옮겨지기 때문에 포락선의 폭이 일정하므로 보다 정교한 신호를 분석하는데는 적절하지 못하다.

그러나 Gabor 변환은 Heisenburg의 'uncertainty principle'에 의해서 가장 작은 시간-주파수 창을 형성하는 STFT 임이 이미 알려져 있다. 여기서 윈도우 함수의 폭과 중심은 아래와 같이 정의되며 $\Delta_\omega \Delta_x \geq \frac{1}{2}$ 임은 의미한다.

$$\text{중심 } t^* = \frac{1}{\|a\|_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} x |a(x)|^2 dx \quad (3)$$

$$\text{폭 } \Delta_\omega = \frac{1}{\|a\|_2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (x-t^*)^2 |a(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

보다 나은 신호분석을 위해서는 어떠한 신호가 들어오더라도 우리는 적절한 시간-주파수 창에서 스펙트럴 성분을 고려할 수 있어야 한다.

2. 웨이브릿 변환

웨이브릿 변환에서 복원정리는 CWT와 웨이브릿 급수의 중심이론으로 알려지고 있다. CWT는 Plancherel 형태의 복원 정리가 성립하고[8], 웨이브릿 급수는 frame 이론과 다해상도 이론을 활용한 이산복원정리가 성립한다[5,6]. 복원정리가 만들어짐에 따라 이에 상응하는 웨이브릿이 생성되는데, CWT에서는 허용조건(admissibility condition)을 만족하는 basic wavelet이고[7], 웨이브릿 급수에서는 MRA를 이용한 Daubechies 웨이브릿[3,4], frame 이론을 이용한 Meyer 웨이브릿 등[9]을 생각할 수 있다. 그림 1은 복원정리와 웨이브릿과의 관계를 나타낸 것이다.

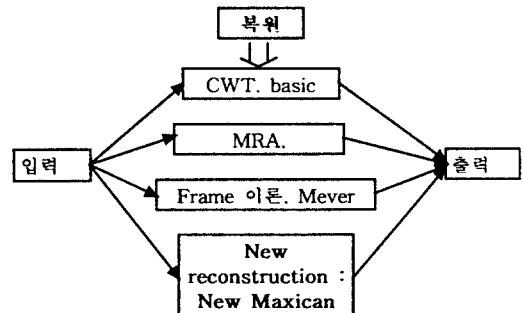


그림 1. 복원정리와 웨이브릿과의 관계

웨이브릿 함수는 vanishing moment를 갖게 진동하며, 평균값이 0인 유한 에너지함수라고 할 수 있다. 특정한 하나의 원형 웨이브릿 함수(mother wavelet)으로부터 발생되는 웨이브릿 함수들의 집합은 임의의 함수를 근사화 하는데 사용될 수 있다. 웨이브릿은 신

호분석을 다양한 시간-주파수영역의 창을 활성화 하기 위하여 주어진 원형 웨이브릿 함수를 그림 2와 같이 binary dilation과 dyadic translation으로 이산화함으로써 각 주어진 윈도우에서 $L^2(R)$ 공간에 있는 모든 신호를 서로 다른 분해능을 갖는 다양한 주파수를 가진 파형으로서 분해하려는 것에 목적을 두고 있다. 따라서 웨이브릿 변환은 그 공간에 있는 시간함수의 신호를 각각 다른 분해능에서 해석하기 위하여 웨이브릿 급수로 표현하는데 목적이 있다.

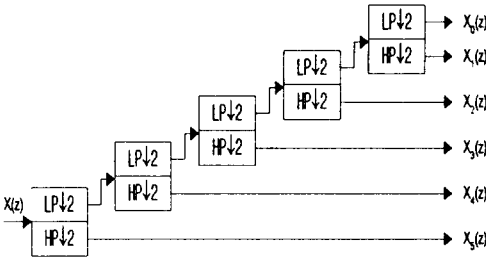


그림 2. 옥타브 필터뱅크를 사용한 이산 웨이브릿 변환

웨이브릿 변환에서 기저함수들은 원형 웨이브릿을 천이 및 확장/수축을 시킴으로써 만들어진다. 이에 대한 웨이브릿 기저함수들의 선형결합은

$$\phi_{m,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad b \in R, a \neq 0 \quad (5)$$

이다. 여기서 a 는 원형 웨이브릿을 확장/수축시키는 스케일 변수이고, b 는 천이를 나타내는 천이변수이다. 어떤 신호 $f(t)$ 에 대한 웨이브릿 변환은

$$Wf(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dx \quad (6)$$

로 정의된다. 여기서 매개변수 a, b 가 정수일 때 이산 웨이브릿 변환(DWT: discrete wavelet transform)이라고 한다. 특히 $a=2^m, b=n2^m$ 일때 정규직교기저를 구성할 수 있고, 기저함수는

$$\phi_{m,n}(t) = 2^{-m/2} \psi(2^{-m}t - n) \quad (7)$$

가 된다.

신호를 다해상도로 분할하기 위하여 그림 3과 같이 V_m 을 $\phi_{m,n}(t)$ 에 의해 구성되는 벡터공간이라 하면 $\phi_{m,n}(t)$ 는 V_{m-1} 에서 V_m 의 직교보수(orthogonal complement) 공간 W_m 의 직교기저를 이룬다.

$$V_{m-1} = V_m \oplus W_m \quad V_{m-1} \perp W_m \quad (8)$$

여기서 $\phi_{m,n}(t) = 2^{-m/2} \psi(2^{-m}t - n)$ 는 스케일링 함수 $\phi(t)$ 를 신축·이동하여 만들어진 정규직교기저이다. 이때 스케일링 함수 $\phi(t)$ 와 웨이브릿 함수 $\varphi(t)$ 는

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_n h_0(n) \phi(2t - n) \quad (9)$$

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_n h_1(n) \phi(2t - n) \quad (10)$$

이다. 여기서 $h_0(n)$ 및 $h_1(n)$ 는 스케일링 및 웨이브릿 함수의 필터계수이다.

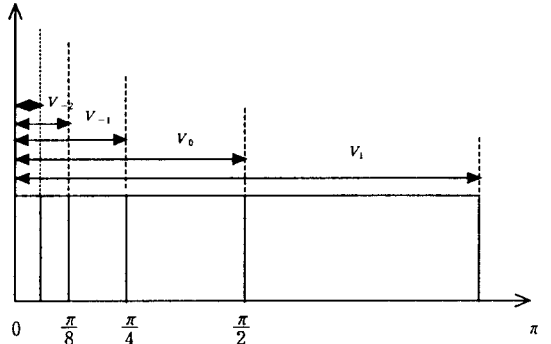


그림 3. 다해상도 이론

3. 제한한 새로운 L¹-웨이브릿

먼저 $f \in L^1(R)$ 라 두면 푸리에 변환 \hat{f} 을

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-itx} dx, \quad t \in R \quad (11)$$

으로 정의한다.

$$g_{a,b}(x) = |a|^{-1/2} g\left(\frac{x-b}{a}\right), \quad (a,b) \in R^* \times R \quad (12)$$

로 정의하면 $g, \dots, g_{a,b}$ 는 $L^2(R)$ 상에서 unitary operator이다. 웨이브릿은 허용조건 (admissibility condition)을 만족하는 단 하나의 함수 $g \in L^2(R)$ 에서 이동 및 확장/수축으로 만들어진 $\{g_{a,b}\}$ 군으로 구성된다.

허용조건이라 함은 $g \in L^2(R)$ 이 다음을 만족할 때이다 :

$$0 < C_g = \int_0^{\infty} \frac{|\hat{g}(x)|^2}{x} dx < \infty \quad (13)$$

이러한 g 를 basic wavelet이라 부른다. 각 basic wavelet g 에 대하여,

$$(\mathcal{O}_g f)(a,b) = \int_R f(x) \overline{g_{a,b}(x)} dx \quad (14)$$

를 연속 웨이브릿 변환으로 정의한다. 그러면 다음의 Plancherel 형태의 공식과 복원정리가 성립한다.

A. g 가 허용조건을 만족하고 $f \in L^2(R)$ 일때,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} |\mathcal{O}_g f(a, b)|^2 \frac{da}{a^2} db = C_g \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \quad (15)$$

가 성립한다.

B. ϕ 가 CWT $\mathcal{O}_\phi f$ 를 정의하는 basic wavelet이라 하면, $f \in L^2(R)$ 가 $x \in R$ 에서 연속일때

$$f(x) = \frac{1}{C_\phi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} [\mathcal{O}_\phi f(a, b)] \psi_{a,b}(x) \frac{da}{a^2} db \quad (16)$$

로 복원된다.

위의 정리에 의해 $f \in L^2(R)$ 이 $\mathcal{O}_\phi f$ 로 복원됨을 알 수 있고, 위의 사실을 이용해 다음과 같은 이산복원정리를 생각할 수 있다. $\sigma > 1, r > 0$ 로 두고 $a_n = \sigma^n, b_{mn} = r m a_n, n, m \in Z$ 라 하자.

그러면 $a_{n+1} - a_n = (\sigma - 1)\sigma^n, b_{m+1,n} - b_{m,n} = r\sigma^n$ 로 된다. 그러므로 $\frac{da db}{a^2} \approx (\sigma - 1)r$ 이다.

그러면

$$f(t) = \frac{1}{C_\phi} \sum_n \sum_m \int_{a_n}^{a_{n+1}} \int_{b_{m,n}}^{b_{m+1,n}} \mathcal{O}_\phi f(a, b) \psi_{a,b}(t) \frac{da db}{a^2} \approx \frac{(\sigma - 1)r}{C_\phi} \sum_{n,m} \mathcal{O}_\phi f(a_n, b_{mn}) \psi_{a_n, b_{mn}}(t) \quad (17)$$

로 접근된다. 만약에

$$\psi_{nm}(t) = \psi_{a_n, b_{mn}}(t) = \sigma^{-\frac{n}{2}} \psi(\sigma^{-n} t - r m) \quad (18)$$

로 두고, $(f, \psi_{nm}) = \mathcal{O}_\phi f(a_n, b_{mn})$ 일 때

$$f(t) \approx \hat{f}(t) = \frac{(\sigma - 1)r}{C_\phi} \sum_{n,m} (f, \psi_{nm}) \psi_{nm}(t) \quad (19)$$

로 쓸 수 있다.

Frame 이론이나 MRA를 이용하여도 이동과 확장/수축의 중복급수(double series)로 위와 유사한 웨이블릿들의 이산집합 $\{\psi_{nm}\}$ 으로 복원정리를 구성할 수 있다

ϕ 를 $L^1(R^n)$ 에 속하는 것으로 bounded radial 함수라 하면 ϕ 가

$$\int_0^{\infty} \frac{|\hat{\phi}(s)|}{s} ds < \infty \quad (20)$$

일 때 ϕ 는 허용조건을 만족한다라고 정의한다. 식 (21)은 $\phi \in L^2(R)$ 일때의 허용조건인

$$\int_0^{\infty} \frac{|\hat{\phi}(s)|^2}{s} ds < \infty \quad (21)$$

과는 다름을 알 수 있다. 그리고

$$\mathcal{O}(x) = \int_1^2 s^{-n-1} \phi(sx) ds \quad (22)$$

을 L^1 -웨이블릿이라 부른다.

$$\mathcal{O}_k(x) = \frac{1}{2^{kn}} \mathcal{O}\left(\frac{x}{2^k}\right) \quad (23)$$

를 웨이블릿 \mathcal{O} 의 dyadic 확장/수축하면 각각의 \mathcal{O}_k 에 대하여

$$W_\phi f(k, b) = f * \mathcal{O}_k(b) \quad (24)$$

라는 L^1 -웨이블릿 변환을 정의한다. 여기에서 $f \in L^1(R^n) \cap L^2(R^n)$ 이고

$$f * \mathcal{O}_k(b) = \int_{R^n} f(b-y) \mathcal{O}_k(y) dy \quad (25)$$

는 f 와 \mathcal{O}_k 의 convolution이다. 그러면 다음과 같은 중요한 이산복원정리를 유도할 수 있다.

정리 1. $f \in L^1(R^n) \cap L^2(R^n)$ 이고 ϕ 가 허용조건을 만족하는 bounded radial 함수일 때

$$C_\phi = \int_0^{\infty} \frac{\hat{\phi}(s)}{s} ds \quad (26)$$

라 하면 아래의 복원정리가 성립한다:

$$C_\phi f(b) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f * \mathcal{O}_k(b) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_\phi f(k, b), \quad b \in R^n \quad (27)$$

정리 2. $\phi \in L^1(R)$ 가 bounded이고,

$$\int_0^{\infty} \frac{|\hat{\phi}(s)|}{s} ds < \infty, \int_0^{\infty} \frac{|\hat{\phi}(-s)|}{s} ds < \infty \quad (28)$$

일때,

$$\frac{1}{2} C_\phi = \int_0^{\infty} \hat{\phi}(s) \frac{ds}{s} = \int_0^{\infty} \hat{\phi}(-s) \frac{ds}{s} \quad (29)$$

라고 하면 아래의 복원정리가 성립한다:

$f \in L^1(R) \cap L^2(R)$ 에 대해서

$$\frac{1}{2} C_\phi f(b) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_\phi f(k, b), \quad b \in R \quad (30)$$

이다. 위의 정리들을 이용한 다채롭고 강력한 응용들은 연구내용 응용부분을 참조하고, 다차원 공간에서도 신호 f 를 복원할 수 있음을 정리 1은 시사하고 있다.

위의 정리를 이용하여 본 논문에서는 L^1 -웨이블릿을 만들고, 임펄스성 신호를 복원할 것이다. L^1 -웨이블릿을 만들기 위해

$$\phi(x) = \cos x \chi_{[-\pi, \pi]}(x) \quad (31)$$

라 두면 compact support를 갖는 제안한 L^1 -웨이블릿은

$$\phi(x) = \int_1^2 \phi(sx) ds \quad (32)$$

이 된다. 이의 파형은 Mexican Hat과 비슷하다. 제안한 새로운 Mother 웨이브릿은 그림 4와 같다. 제안한 웨이브릿의 면적은 0 로서 웨이브릿이 되기 위한 조건에 합당함을 알 수 있다.

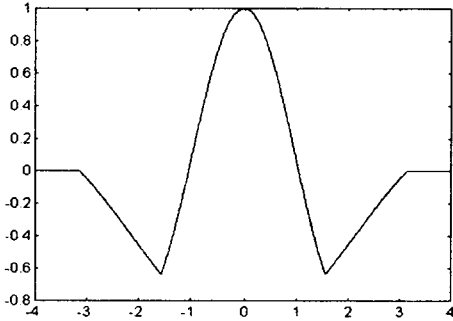


그림 4. 제안한 새로운 Mother 웨이브릿

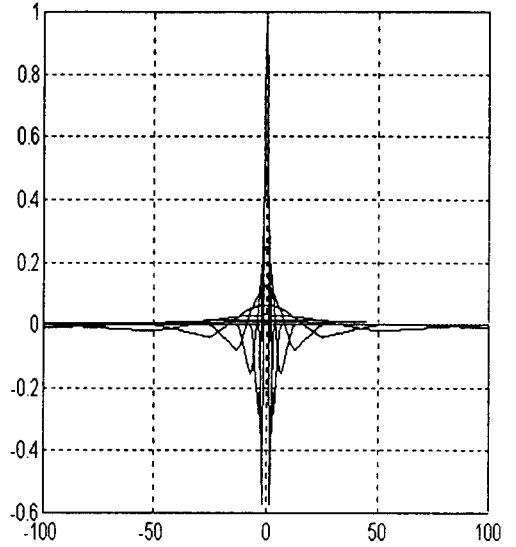


그림 6. k=0에서 5까지 확장시킨 새로운 웨이브릿

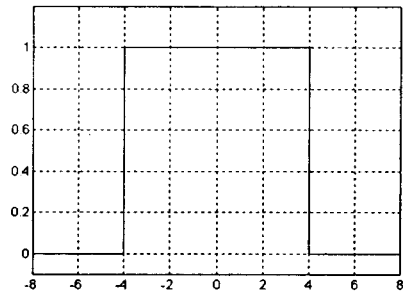
4. 실험 및 결과

본 논문에서는 L^1 -함수 공간에서 성립하는 새로운 웨이브릿 변환을 사용하여 시간-주파수에서의 신호 복원 방법을 제안한다. 새로운 웨이브릿 변환을 사용한 시간-주파수에서의 신호복원 방법으로는 구형파 입력신호로 확인하였고, 실제 응용신호로는 음성신호를 이용하였다.

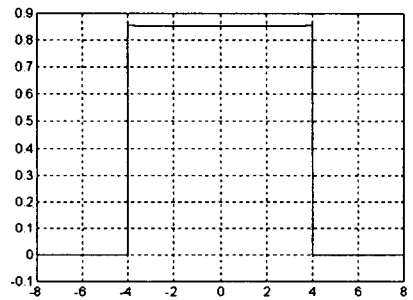
본 논문에서 그림 4의 제안한 새로운 Mother 웨이브릿을 dilation한 것은 그림 5에 나타나 있다. 그림 5에서 확장 계수 k를 0에서 5까지 확장시켰을 때, k가 증가할 수록 진폭은 작아지고 파형의 폭은 확장됨을 알 수 있다.

그림 6은 제안한 새로운 웨이브릿의 복원정리가 성립함을 보인 것으로 그림 6(a)는 진폭이 1이고, 폭이 ±4인 구형파를 입력신호로 하였고, 그림 6(b)는 복원한 신호로서 dilation 계수 $k = \pm 5$ 로 하였을 때 정확히 펄스의 폭이 ±4이고, 고주파부분의 직각인 성분을 찾을 수 있었고, 구형파의 진폭이 1에 가깝게 복원함을 확인할 수 있었다. k의 dilation 계수를 ±로 더욱 확장/수축하면 완전복원신호가 된다.

그림 7(a)는 '국방'이라는 실제의 음성신호를 10 kHz로 표본화하고, 16 비트로 A/D 변환시켜 사용하였다. 제안한 방법을 이용하여 k를 -5에서 10까지 확장/수축시켜 복원한 결과는 그림 7(b)에 나타나 있다. 실험 결과 제안한 새로운 웨이브릿은 입력신호와 거의 같은 신호로 복원됨을 알 수 있었다.



(a)



(b)

그림 6. (a) 구형파 입력신호, (b) 복원신호

참고 문헌

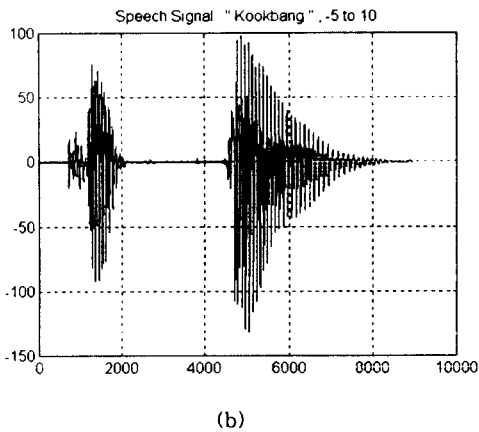
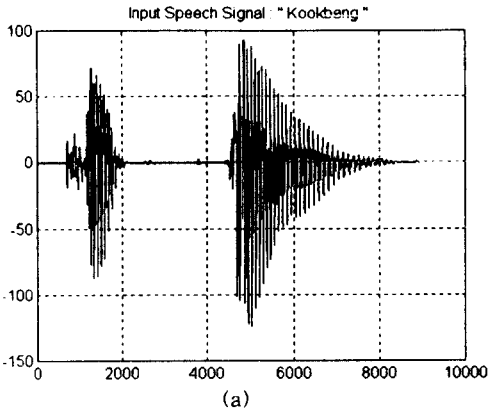


그림 7(a) 입력 음성신호 : '국방', (b) 제안한 방법을 사용한 복원신호.

5. 결 론

본 논문에서는 L^1 -함수 공간에서 성립하는 새로운 웨이브릿을 생성하여 시간-주파수 영역에서 신호 복원 및 분석에 응용하였다. 제안한 방법은 L^1 -함수 공간에서 허용조건을 만족하고, 복원조건이 성립하는 새로운 웨이브릿을 개발하였다.

제안한 웨이브릿은 CWT에서 사용한 허용조건을 자연스럽게 확장함으로써 기존의 것보다 간편하고 활용도가 우수한 새로운 형태의 L^1 -웨이브릿을 개발하였다.

본 연구에 개발한 새로운 웨이브릿을 사용하여 구형파 및 음성신호에 대하여 복원정리틀 적용하여 실험한 결과 우수한 신호복원이 되었음을 확인하였다.

[1] M. H. Ackroyd, "Short-time spectra and time-frequency energy distributions," *Jour. of Acous. Soc. of America*, vol. 50, no. 5, pp. 1229-1231, July 1970.

[2] J. B. Allen and L. R. Rabiner, "A unified approach to short-time Fourier analysis and synthesis," *IEEE Proc.* vol. 65, no. 11, pp. 1558-1564, Nov. 1977.

[3] I. Daubechies, "Orthonormal basis of compactly supported wavelets," *Comm. Pure Applied Math*, vol. 41, no. 7, pp. 909-996, 1988.

[4] I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992.

[5] S. G. Mallat, "A theory for multiresolution signal decomposition : the wavelets representation," *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 11, no. 7, pp. 674-693, July 1989.

[6] Mallat, S., A theory for multiresolution signal decomposition : The wavelet representation, *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.* 11, 674-693, 1989.

[7] C.K. Chui, *An introduction to wavelets*, Academic Press, 1992.

[8] Heil, C.E. and D.F.Walnut, *Continuous and discrete wavelet transforms*, *SIAM Review* 31, 628-666, 1989.

[9] Meyer, Y., *Orthonormal wavelets, in Wavelets*, J. M. Combes, A. Grossmann, and Ph. Tchamitchian (eds.) , Springer, 21-37, 1989.