Mach-Zehnder 간섭계의 광자분포

Photon Distrubutions of a Mach-Zehnder Interferometer

신종태, 하 양, 김헌오, 박구동, 김태수
울산대학교 물리학과
tskim@uou.ulsan.ac.kr

세기분할 간섭계인 Mach-Zehnder 간섭계는 간섭계의 두 팔에서 미세한 경로차를 측정할 수 있어서 경로상에 삽입된 광학물질의 굴절률 변화나 매질의 온도차 등과 같은 것을 측정하는데 널리 사용되어 왔다. 간섭계를 통하여 양자수준의 정밀한 위상측정이 가능하다면, 유일하게 측정이 되지 않고 있는 중력파의 존재를 검증할 수 있다고 알려져 있다[1]. 현재 중력파 측정을 위해 건설중이거나, 사용중인 간섭계는 초대형 Michelson 간섭계이다.

1986년 Yurke등은 Mach-Zehnder 간섭계가 유니타리 행렬 SU(2)의 특성이 있으며, Mach-Zehnder 간섭계가 각운동량 연산자로 설명될 수 있다는 것을 보임으로서 간섭계의 이론적 분석을 한 단계 높였다[2]. 특히 이들이 연구한 Mach-Zehnder 간섭계는 Michelson 간섭계가 입사구와 출사구가 1개씩인데 반해 2개씩으로 더욱 다양한 실험이 가능한 장점이 있어서 최근에는 Michelson 간섭계 대신에 주로 Mach-Zehnder 간섭계에 대한 연구가 집중되고 있다. 1993년 Holland와 Burnett는 만약 동일 광자수를 갖는 쌍둥이 광자 수-상태(twin Fock state, 또는 twin number state)의 빛을 Mach-Zehnder 간섭계에 입사시키면, 양자수준의 위상측정을 할 수 있음을 보였다[3].

Mach-Zehnder 간섭계는 두 개의 거울과 두 개의 빔가르개로 구성되어 있다. 만약 이러한 50/50 빔가르개가 흡수를 전혀 하지 않은 경우, 간섭계에서의 손실을 무시할 수 있으므로 입사된 모든 광자수가 출사구에 나타난다고 가정하면, 두 개의 입사구 모드(1, 2)를 나타내는 광의 연산자를 각각 $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$라 할 때, 첫 번째 빔가르개(BS1)를 통과한 후의 두 모드 소멸연산자는 $\hat{a}_3$, $\hat{a}_4$이고, 두 경로의 위상을 각각 θ_3, θ_4로 한다면, 두 번째 빔가르개(BS2)를 통과한 후의 두 출사구 모드(5, 6)에 대한 소멸연산자는 $\hat{a}_5$, $\hat{a}_6$이다. 그리고 측정장치 D_1, D_2에서의 광자수 연산자는 각각 $\hat{n}_5 = \hat{a}_5^\dagger \hat{a}_5$, $\hat{n}_6 = \hat{a}_6^\dagger \hat{a}_6$이다. 두 측정장치 D_1과 D_2에서의 광자수의 차는

$$\hat{n}_6 - \hat{n}_5 = \frac{1}{2}(\hat{n}_2 - \hat{n}_1)\cos\theta + \frac{1}{2}(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger)\sin\theta$$

가 된다. 여기서 θ는 두 경로의 위상차 $(\theta_4 - \theta_3)$에 해당하고 $\hat{n}_1$과 $\hat{n}_2$는 각각 입력모드에 대한 광자수 연산자이다. 만약 한 측정장치 D_1의 광자수 측정을 통하여 위상차 θ를 구하려고 한다면 $\hat{n}_5$의 기대치는 $\langle \hat{n}_5 \rangle = \langle \phi_1, \phi_2 | \hat{n}_5 | \phi_1, \phi_2 \rangle$이고, 가변도(variance)를 구한 다음 위상차의 불확정도의 관계식으로 구할 수 있다. 여기서 $|\phi_1 \phi_2\rangle$는 입사광의 양자상태를 나타낸다.

D_1, D_2에서의 광자수 차의 반을 나타내는 연산자를 $\hat{J}_{z,out}$이라 하면

$$\hat{J}_{z,out} = \frac{1}{2}(\hat{n}_6 - \hat{n}_5) = -\sin\theta \hat{J}_x + \cos\theta \hat{J}_z$$

로 나타낼 수 있다. 이것은 입사구에서의 광자수 차를 나타내는 $\hat{J}_z$ 연산자가 Mach-Zehnder 간섭계를 통과한 후 어떻게 연산자가 바뀌는가를 나타낸다. 연산자는 고정되고 상태가 바뀌는 Schrödinger picture에서 이를 분석해보면, 잘 알려진 바와 같이 $\hat{J}^2$과 $\hat{J}_z$는 가환이므로 $[\hat{J}^2, \hat{J}_z] = 0$이고, 두 연

산자는 공통의 고유상태(eigenstate)는 $\hat{J}^2|j\mu\rangle = j(j+1)|j\mu\rangle$, $\hat{J}_z|j\mu\rangle = \mu|j\mu\rangle$ 이다. 여기서 $|j\mu\rangle$ 는 $|j\mu\rangle = |j+\mu\rangle_1\,|j-\mu\rangle_2$ 를 나타내는 두 모드 Fock state이다. 간섭계의 50/50 손실없는 빔가르개와 위상차 연산자는 $\hat{B}_\pm = e^{\pm\frac{i\pi}{2}\hat{J}_x}$, $\hat{P}(\theta) = e^{i\theta\hat{J}_z}$ 으로 각각 나타낼 수 있다[4]. 여기서 $\pm$ 기호는 간섭계의 첫 번째와 두 번째 빔가르개의 위상변화 $\pm\pi/2$ 를 나타내며 첫 번째 빔가르개(BS1)를 $+$ 로 두 번째(BS2)를 $-$ 로 가정할 때 전체 상태변화를 나타내는 변환은 $\hat{I}(\theta) = \hat{B}_-\hat{P}(\theta)\hat{B}_+$ 가 되고, Campbell-Baker-Hausdorff 정리에 의해 $\hat{I}(\theta) = e^{-i\theta\hat{J}_y}$ 로 간단히 표현된다.

입사광의 양자수 상태를 j, μ 라 할 때 j는 입사광의 평균치이고, μ는 그 차의 평균에 해당한다. Mach-Zehnder 간섭계에 위상차 θ로 주어졌을 때, j와 ν로 나타내는 출력상태에 대한 행렬요소는

$$d^j_{\nu\mu}(\theta) \equiv \langle j\,\nu|\, e^{-i\theta\hat{J}_y}|j\,\mu\rangle$$

이다. 이것은 바로 2μ개의 광자수 차가 나타날 확률에 관계된다. 행렬요소

$$d^j_{\nu\mu}(\theta) = \left[\frac{(j+\mu)!\,(j+\mu)!}{(j+\nu)!\,(j-\nu)!}\right]^{1/2}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{\mu-\nu}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\mu+\nu}\times\ P_{j-\nu}^{(\mu-\nu,\,\mu+\nu)}(\cos\theta)$$

이고, 여기서 $P_{j-\nu}^{(\mu-\nu,\,\mu+\nu)}(\cos\theta)$는 Jacobi 다항식이다[4]. 따라서 이러한 조건에서 출사구의 광자수 분포 확률은 $P = |d^j_{\mu\nu}(\theta)|^2$ 이므로,

$$\begin{aligned} P(\nu|\theta, j) &= \left[d^j_{\mu}(\theta)\right]^2 \\ &= \frac{(j-\nu)}{(j+\nu)}\left[P^{\nu}_{j}(\cos\theta)\right]^2 \end{aligned}$$

이다. 만약 입사광의 광자수가 동일한 특별한 경우, 즉 $|j\,0\rangle$ 에 대한 행렬요소는

$$d^j_{\nu}(\theta) = (-1)^{\nu}\left[\frac{(j-\nu)!}{(j+\nu)!}\right]^{1/2} P^{\nu}_{j}(\cos\theta)$$

이 된다. 여기서 $P^{\nu}_{j}(\cos\theta)$는 부 Legendre 다항식(associated Legendre polynomial)이다.

TA

본 연구에서는 Mach-Zehnder 간섭계의 두 경로상의 상대적인 위상차를 고정한 상태에서 두 입사구의 광자수를 변화시켜 가면서 측정장치에서의 광자수 분포를 조사하였고, 또한 두 입사구의 광자수가 고정된 상태에서 경로에 따른 위상차를 변화시켜가면서 광자수 분포를 조사하였다. 특히 위상차 $\theta = \pi/2$ rad 일 때는 간섭계가 한 개의 빔가르개와 같은 효과를 나타낸다. 그것은 첫 번째 흡수없는 50/50의 빔가르개에서 반사광과 투과광 사이에 $-\pi/2$ rad 의 위상차가 존재하고, 두 번째 50/50의 빔가르개에서 반사광과 투과광 사이에 $+\pi/2$ rad 의 위상차가 있으므로 간섭계의 전체 위상차는 $+\pi/2$ rad 이고, 그것은 50/50의 빔가르개 하나를 통과한 후의 광자의 확률분포로 해석할 수 있다[5]. 따라서 빔가르개의 기능을 갖는 위상각(θ)이 $\pi/2$ rad 일 때, 광자수가 항상 홀수개로 검출될 확률은 0이고, 짝수개로 검출될 확률만 나타났다. 이러한 측정장치의 확률분포로 볼 때 광자 수-상태의 광자들 사이에는 서로 상관관계가 있음을 확인하였다.

1. K. S. Thorne, Rev. Mod. Phys, 52, 285 (1980).
2. B. Yurke, S. L. McCall, and J. R. Klauder, Phys. Rev. A 33, 4033 (1986).
3. M. J. Holland and K. Burnett, Phys. Rev. Lett. 71, 1355 (1993).
4. B. C. Sanders and G. J. Milburn, Phys. Rev. Lett. 75, 2944 (1995).
5. T. Kim, O. Pfister, J. Noh, M. Holland, and J. Hall, Phys. Rev. A 57, 4004 (1998).