

高次스펙트럼을 利用한 非線型 시스템의 解析에 關한 研究

李珉湖, 李煥瑞*, 金鳳珏(明知大學校 大學院 機械工學科)

李源平(仁德專門大學 機械工學科), 車京玉(明知大學校 機械工學科)

A Study on the Analysis of Non linear system using Higher order spectrum

M.H.Lee, J.S.Lee*, B.G.Kim, W.P.Lee, K.O.Cha

ABSTRACT

This thesis is concerned with the development of useful engineering techniques to detect and analyze nonlinearities in mechanical systems. The methods developed are based on the concepts of higher order spectra, in particular the bispectrum and trispectrum, and the Volterra series. The study of higher order statistics has been dominated by work on the bispectrum. The bispectrum can be viewed as a decomposition of the third moment(skewness) of a signal over frequency and as such is blind to symmetric nonlinearities.

1. 서론

자연계에서 발생하는 현상을 해석하는데 있어서 전통적으로 사용되어온 파워스펙트럼을 이용한 선형 전달함수만으로는 설명할 수 없는 현상들이 많이 있다. 이와 같은 현상을 보다 정확하게 해석하기 위해서는 해석하고자 하는 시스템의 비선형성을 파악하고 예측할 수 있는 비선형 전달함수를 이용하여야 한다. 이러한 비선형 전달함수는 구하는 과정이 매우 복잡하고,

많은 시간을 필요로 하지만 공학의 여러 분야에서 유용하게 활용될 수 있을 것이다. 이러한 비선형적인 문제를 다루기 위한 가장 널리 쓰이는 방법 중의 하나는 이것을 선형화 하는 것이다. 입력과 출력의 관계가 비선형인데도 불구하고 선형화하여 해석하는 이유는 비교적 간단히 시스템의 특성을 알아볼 수 있기 때문이다. 하지만 보다 정확하고 엄격한 검사를 요하는 입·출력 관계를 해석하기에는 이러한 방법이 충분하지 않고, 나아가서 비선형 문제에서 생기는 여러 가지 새로운 현상들을 설명할 수 없을 것이다. 또한, 시스템의 비선형성이 무시할 수 없을 정도로 크면 선형화 기법을 적용하는 데에는 무리가 있다. 따라서, 이러한 경우에는 시스템의 비선형성을 확인하고 적당한 방법으로 비선형 시스템을 모델화(modelling)하여야 한다. 본 연구의 목적은 기계적 시스템에 있어서 비선형성을 발견하고 이것을 해석할 수 있는 공학적 기법(고차스펙트럼)의 개발과 응용에 있다.

2. 고차스펙트럼 개요

파워스펙트럼, 바이스펙트럼은 폴리스펙트럼

(polyspectrum)^[1]의 일반화된 개념에 대하여 특수한 경우들이다. 파워스펙트럼은 주파수에 대한 단지 파워의 분해만을 제공할 수 있다. 주파수에 대한 비대칭도와 첨도의 분해를 얻기 위하여 고차스펙트럼을 사용하게 된다. 따라서 신호의 고차 통계에 관하여 더 많은 정보를 얻을 수 있다. 2차의 폴리스펙트럼은 신호처리 분야에서 전통적으로 사용되어져 온 파워스펙트럼으로 신호 해석의 중요한 도구이다. 그리고 상당한 연구성과가 파워스펙트럼의 사용, 성질과 관련하여^[2] 발표되어졌다. 그것은 가장 낮은 차수의 폴리스펙트럼으로 가장 보편화되어 사용되어졌다. 파워스펙트럼의 가장 큰 특징은 각 주파수 성분을 서로에 대하여 비종속 관계로 취급하고 각 주파수에 대한 파워를 측정한다는 것이다. 따라서 위상(phase)에 대한 어떠한 정보도 포함하고 있지 않다. 이것을 '위상 눈가림(phase blind)'이라고 한다. 에너지 스펙트럼을 구하기 위하여 신호의 에너지를 분해하는 것과 같이 3차 신호에 대한 유사한 해석을 수행할 수 있다.

$$\overline{x^3(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x^3(t) dt \quad (1)$$

식(1)에 $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df$ 를 대입하면, 다음식이 된다.

$$\begin{aligned} \overline{x^3(t)} &= \int \int \int \int_{-\infty}^{\infty} X(f_1)X(f_2)X(f_3)e^{j2\pi(f_1+f_2+f_3)t} df_1 df_2 df_3 \\ &= \int \int \int_{-\infty}^{\infty} X(f_1)X(f_2)X(f_3)\delta(f_1+f_2+f_3)df_1 df_2 df_3 \\ &= \int \int_{-\infty}^{\infty} X(f_1)X(f_2)x(-f_1-f_2)df_1 df_2 \end{aligned} \quad (2)$$

식(2)로부터 결정적 신호의 바이스펙트럼은 다음과 같이 정의된다.

$$E_{xxx}(f_1, f_2) = X(f_1)X(f_2)X(-f_1-f_2) \quad (3)$$

확률적 과정에 있어서 파워스펙트럼에서 처럼 같은 방법을 사용하면 바이스펙트럼은 다음과 같이 정의된다.

$$S_{xxx}(f_1, f_2, f_3) = E[X(f_1)X(f_2)X(f_3)] \quad (4)$$

만약, 그 과정이 정상과정이라면 $S_{xxx}(f_1, f_2, f_3)$ 는 평면 $f_3 = -f_1 - f_2$ 를 제외하고는 제로이다.^[3] 그러므로, 정상확률과정의 바이스펙트럼은 다음과 같다.

$$S_{xx}(f_1, f_2) = E[X(f_1)X(f_2)X^*(f_1+f_2)] \quad (5)$$

파워스펙트럼이 신호의 파워 또는 2차 모멘트와 관련된 것처럼 바이스펙트럼은 비대칭도(skewness) 또는, 3차 모멘트와 관련되어 있다. 파워스펙트럼이 독립적으로 각 주파수 성분을 고려하는 반면 바이스펙트럼은 f_1 과 f_2 두 주파수 변수의 함수이다. 그리고 바이스펙트럼은 f_1, f_2 그리고 f_1+f_2 주파수 성분 사이의 주파수 상호작용(interactions)을 해석한다. 그것은 실수부와 허수부를 포함하는 복소수 양이다. 그러나 본 논문에서는 단지 바이스펙트럼의 크기(magnitude)만을 고려하였다. 두 가지 간단한 보기를 보이기 위하여 사인파를 사용하였다. 사인파는 정상랜덤신호라는 가정을 따르지는 않지만 결과를 쉽게 이해할 수 있기 때문에 하나의 보기로 양의 주파수 성분과 음의 주파수 성분사이의 원하지 않는 교차항을 없애기 위하여 주파수가 f_1 인 복소 사인파를 사용하였다.

$$x(t) = e^{j2\pi f_1 t} \quad (6)$$

이것을 푸리에 변환한다.

$$X(f) = \delta(f - f_1) \quad (7)$$

여기서, δ 는 디랙델타함수(Dirac delta function)를 나타낸다. Fig.1에 이것을 나타내었다. 만약 식(7)의 $X(f)$ 를 식(3)에 대입한다면, 바이스펙트럼은 다음과 같다.

$$E_{xxx}(f_1, f_2) = \delta(f_1 - f_1)\delta(f_2 - f_1)\delta(f_1 + f_2 - f_1) \quad (8)$$

이것은 $\delta(f_1 - p_1)\delta(f_2 - p_1)\delta(f_1 + f_2 - p_1)$ 를 포함하고 있다. 위에서 세 개의 항이 모두 제로가 아닐 때, 바이스펙트럼에 있어서 단지 제로가 아닌 한 지점만이 있을 것이다. (f_1, f_2) 평면에 세 개의 항을 도시하면 Fig.2에서 보여지는 것처럼 $f_1 = p_1$ 과 $f_2 = p_1$, 그리고 $f_1 + f_2 = p_1$ 인 세 개의 직선이 될 것이다. $p_1 \neq 0$ 에 대해서 세 직선의 어떠한 상호작용점도 없다. 그러므로 복수 사이파의 바이스펙트럼은 제로이다. 다음에는 주파수 p_1 과 p_2 의 두 개의 복수 사인파를 갖는 신호를 고려하였다. 이 신호의 푸리에 변환은 다음과 같다.

$$X(f) = \delta(f - p_1) + \delta(f - p_2) \quad (9)$$

Fig.3에 이것을 나타내었다. 결정적 바이스펙트럼은 다음과 같다.

$$E_{xx}(f_1, f_2) = \frac{(\delta(f_1 - p_1) + \delta(f_1 - p_2))(\delta(f_2 - p_1) + \delta(f_2 - p_2))}{\{\delta(f_1 + f_2 - p_1) + \delta(f_1 + f_2 - p_2)\}} \quad (10)$$

이것은 각각 3승인 8개의 항으로 구성된다고 볼 수 있다. 만약, 이것들이 (f_1, f_2) 평면에 도시되어진다면 Fig.4에서 보여지는 것처럼 $f_1 = p_1, f_2 = p_1, f_1 = p_2, f_2 = p_2, f_1 + f_2 = p_1$, 그리고 $f_1 + f_2 = p_2$ 인 여섯 개의 직선으로 나타난다. 만약, $p_2 = 2p_1$ 이면, 세 직선에 대한 하나의 교점이 있을 것이다. 그 교점은 Fig.4에서 점으로 표시된 (p_1, p_1) 에서 생길 것이다.

3. 비선형 해석(2차위상결합)

3.1 바이스펙트럼과 바이코헤런스^{[4]-[7]}

바이스펙트럼은 정상확률과정에 대하여 파워스

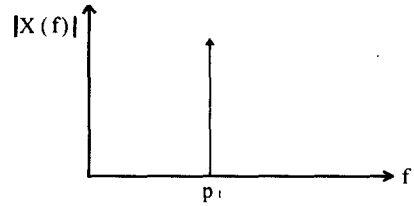


Fig.1 Fourier transform of sine wave

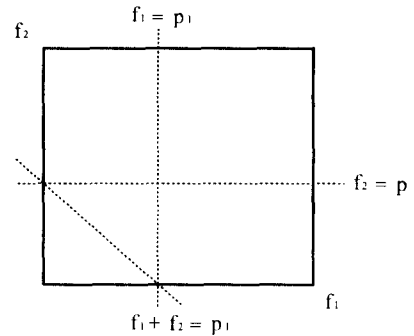


Fig.2 Bispectrum of sine wave

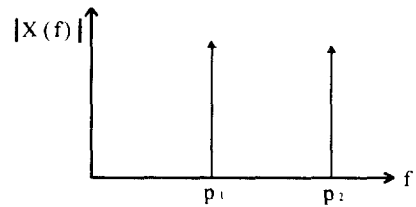


Fig.3 Fourier transform of two sine waves ($p_2 = 2p_1$)

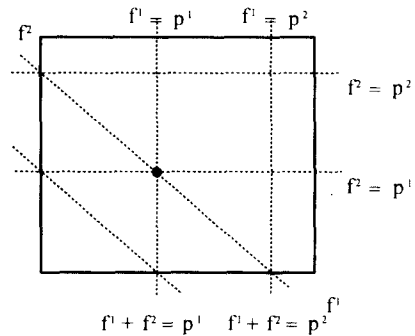


Fig.4 Bispectrum of two sine waves ($p_2 = 2p_1$)

펙트럼을 얻기 위하여 전통적으로 사용하여 왔던 유사한 방법을 사용하여 정의할 수 있다.

$$S_{xx}(f_1, f_2) = E[X(f_1)X(-f_2)] \quad (11)$$

정상과정에 있어서 $S_{xx}(f_1, f_2)$ 는 $f_1 = -f_2$ 를 제외하고는 영이 된다. 이러한 결과는 정상확률과정의 파워스펙트럼에 대한 정의를 다음과 같이

더 일반적인 형태로 만든다.

$$S_{xx}(f) = E[X(f)X^*(f)] \quad (12)$$

여기서, *는 공액복소수를 나타낸다. 파워스펙트럼의 가장 큰 특징은 각 주파수 성분을 서로에 대하여 비종속 관계로 취급하고 각 주파수에 대한 파워를 측정한다는 것이다. 따라서 위상(phase)에 대한 어떠한 정보도 포함하고 있지 않다. 이것을 '위상 눈가림(phase blind)'이라고 한다. 3차 신호에 대한 유사한 해석을 수행할 수 있다.

$$\overline{x^3(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x^3(t) dt \quad (13)$$

식(13)에 $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df$ 를 대입하면, 다음 식이 된다.

$$\begin{aligned} \overline{x^3(t)} &= \iiint \int_{-\infty}^{\infty} X(f_1)X(f_2)X(f_3)e^{j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t} dt df_1 df_2 df_3 \\ &= \iiint \int_{-\infty}^{\infty} X(f_1)X(f_2)X(f_3)\delta(f_1 + f_2 + f_3) df_1 df_2 df_3 \\ &= \iint \int_{-\infty}^{\infty} X(f_1)X(f_2)X(-f_1 - f_2) df_1 df_2 \end{aligned} \quad (14)$$

식(14)로부터 결정적 신호의 바이스펙트럼은 다음과 같이 정의된다.

$$E_{xxx}(f_1, f_2) = X(f_1)X(f_2)X(-f_1 - f_2) \quad (15)$$

확률적 과정에 있어서 파워스펙트럼에서 처럼 같은 방법을 사용하면 바이스펙트럼은 다음과 같이 정의된다.

$$S_{xxx}(f_1, f_2, f_3) = E[X(f_1)X(f_2)X(f_3)] \quad (16)$$

만약, 그 과정이 정상과정이라면 $S_{xxx}(f_1, f_2, f_3)$ 는 평면 $f_3 = -f_1 - f_2$ 를 제외하고는 제로이다. 그러므로, 정상확률과정의 바이스펙트럼은 다음과 같다.

$$S_{xxx}(f_1, f_2) = E[X(f_1)X(f_2)X^*(f_1 + f_2)] \quad (17)$$

파워스펙트럼이 신호의 파워 또는 2차 모멘트와 관련된 것처럼 바이스펙트럼은 비대칭도(skewness) 또는, 3차 모멘트와 관련되어 있다. 파워스펙트럼이 독립적으로 각 주파수 성분을 고려하는 반면 바이스펙트럼은 f_1 과 f_2 두 주파수 변수의 함수이다. 그리고 바이스펙트럼은 f_1, f_2 그리고 $f_1 + f_2$ 주파수 성분 사이의 주파수 상호작용을 해석한다. 바이스펙트럼을 정규화시키는 방법으로 일반적으로 사용되는 방법이 바이코헤런스이다. 바이코헤런스는 다음과 같이 정의한다.

$$b^2(f_1, f_2) = \frac{|S_{xxx}(f_1, f_2)|^2}{E[|X(f_1)X(f_2)|^2]E[|X(f_1 + f_2)|^2]} \quad (18)$$

다음과 같은 식을 만족하기 위하여,

$$E[X(f_1)X(f_2)X(f_1 + f_2)] = S_{xx}(f_1)S_{xx}(f_2)S_{xx}(f_1 + f_2) \text{라고 가정하면,}$$

$$\text{var}(b^2(f_1, f_2)) \approx \frac{1}{M} [1 - b^2(f_1, f_2)] \quad (19)$$

여기서, M 은 계산에 사용된 세분화의 수이다. 파워스펙트럼 효과에 기인된 어떠한 항도 나타나지 않고 있다. 그러므로 바이코헤런스 함수는 단지 신호의 3차 특성에만 종속되어질 수 있다. 바이코헤런스 함수의 유용한 부분은 0과 1사이이다. 이것은 식(18)에 $Z(f_1, f_2) = X(f_1)X(f_2)$ 를 대입하고, 코쉬 부등식(Cauchy inequality)을 사용하여 간단히 증명될 수 있다.

$$b^2(f_1, f_2) = \frac{|E[Z(f_1, f_2)X^*(f_1 + f_2)]|^2}{E[|Z(f_1, f_2)|^2]E[|X(f_1 + f_2)|^2]} \quad (20)$$

식(21)는 코쉬 부등식의 형태이다.

$$|E[Z(f_1, f_2)X^*(f_1 + f_2)]|^2 \leq E[|Z(f_1, f_2)|^2]E[|X(f_1 + f_2)|^2] \quad (21)$$

바이코헤런스는 다음의 값들을 만족한다.

$$0 \leq b^2(f_1, f_2) \leq 1 \quad (22)$$

3.2 이차 위상결합 해석

바이코헤런스는 2차 위상결합(QPC)을 해석하는데 자주 사용된다. 파워스펙트럼을 통해서 위상정보를 알 수 없다. 즉, 위상결합의 존재 여부를 확인할 수 없다. 이러한 현상을 위상 눈가림(phase blind)이라 한다. 그러나, 바이코헤런스의 크기는 f_1 과 f_2 에서 주파수 성분의 위상들 사이의 상관을 나타낼 수 있다. 2차 위상결합은 2차 비선형 성분을 갖는 신호에서 발생하는 것이다. 이러한 바이코헤런스의 유용성을 알아보기 위하여 Fig.5과 같이 가우스성 백색잡음 $x(t)$ 를 주파수 0.1과 0.2사이의 협대역 필터(narrow band filter)로 필터링하여 신호 $z(t)$ 를 구하고, 비선형 형태의 2차의 z^2 으로 통과시켜 $w(t)$ 를 구한다. $w(t)$ 와 유사한 스펙트럼을 갖는 신호 $y(t)$ 를 발생시키기 위하여 두 번째 필터는 $w(t)$ 의 스펙트럼과 같은 특성을 갖도록 한다. 그러나 이 신호는 어떠한 비선형 성분도 포함하고 있지 않다. Fig.6와 Fig.7에서 나타나는 것처럼 두 신호의 파워스펙트럼이 거의 같아 보여도 $w(t)$ 는 2승연산에 의하여 발생한 2차 위상결합된 성분들을 포함하고 있다. Fig.8에서 처럼 신호 $w(t)$ 의 바이코헤런스는 주파수 영역 0.1과 0.2에 걸쳐서 피크를 나타내고 있다. 그러나, 신호 $y(t)$ 는 어떠한 위상결합도 없는 가우스성 잡음을 포함한다. 따라서, Fig.9에서 보여지는 것처럼 신호 $y(t)$ 의 바이코헤런스는 영(zero)이 될 것이다.

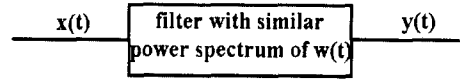
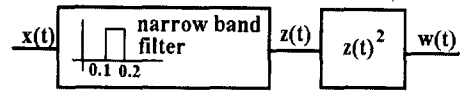


Fig.5 The diagram of the generation of signal with QPC

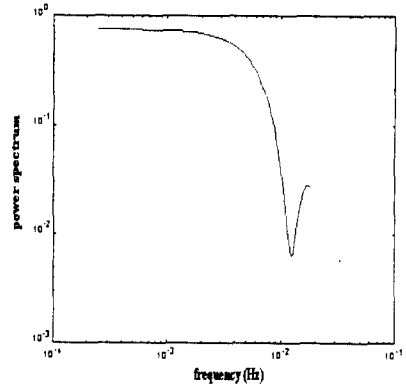


Fig.6 Power spectrum of signal with QPC

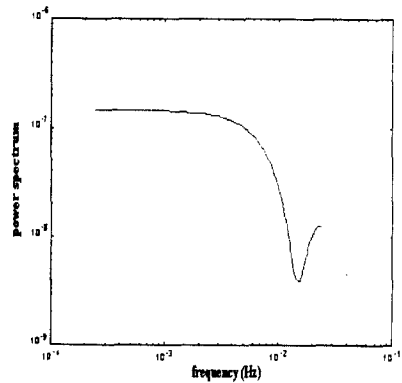


Fig.7 Power spectrum of signal with no QPC

화 하는 하나의 방법이며, 2차 위상결합(quadratic phase coupling)을 측정하는 데에 사용된다.

참고문헌

- [1] J W Tukey, 'The Collected Works of John W. Tukey', Volumes 1 and 2, edited by D R Brillinger, Monterey, California, Wadsworth, (1984)
- [2] M B Priestley, 'Spectral Analysis and Time Series', Academic Press, (1981)
- [3] M L Williams, 'The use of the Bispectrum and Other Higher Order Statistics in the Analysis of One Dimensional Signals', PhD thesis, Dept of Physics, Imperial College, (July 1992)
- [4] Y. C. Kim and E. J. Powers, 'Digital Bispectral Analysis and its Applications to Nonlinear Wave Interactions', IEEE Trans. Plasma Science, Vol. PS-7, No.2, p.120-131, June 1979
- [5] Y. C. Kim, J. M. Beall, E. J. Powers and R. W. Miksad, 'Bispectrum and Nonlinear Wave Coupling', Physics of Fluids, Vol. 23, No.2, p.258-263, Feb. 1980
- [6] D. Choi, J. Chang, R. O. Stearman and E. J. Powers, 'Bispectral Identification of Nonlinear Mode Interactions', 2nd International Modal Analysis Conference, Orlando, Florida, p.602-609, 1984
- [7] 高木茂, 中林任男, 入江良彦, 江崎殖, 'Study on Analysis of Muffler Performance under High Pressure Pulsation Flow' 三菱重工技報 Vol.22 No.1 p.63-68, 1985

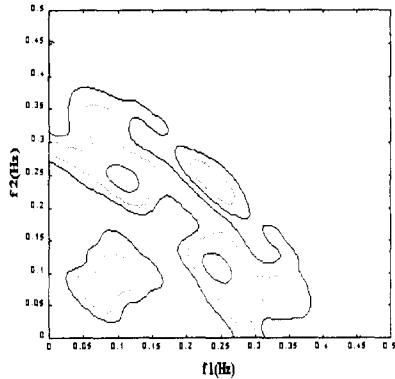


Fig.8 Bicoherence of signal
with no QPC

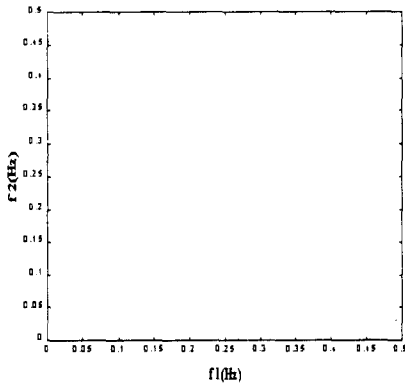


Fig.9 Bicoherence of signal
with no QPC

4. 결론

- (1) 고차스펙트럼 해석법의 하나인 바이스펙트럼은 주파수 성분 상호간의 작용을 평가할 수 있다.
- (2) 바이코헤런스 함수는 바이스펙트럼을 정규화하는 하나의 방법이다.
- (3) 기존의 파워스펙트럼 해석으로는 2차의 비선형 위상결합정보를 확인할 수 없다.
- (4) 바이코헤런스는 바이스펙트럼을 정규