

내부크랙을 가지며 비틀림모멘트를 받는 중공축의 응력해석

Stress Analysis of Hollow Cylinder with Inner Cracks Subjected to Torsion Moment

이종선(대전대학교), 하영민*(국민대학교), 김세환(천안공전), 김엽래(경민전문대)

Abstract

In fracture problems, stress intensity factors obtained theoretically and experimentally have been effectively utilized in the analytical evaluation of the cracks effect. The effect of surface crack of a cylindrical and a hollow cylindrical bar is investigated, as well as the effect of the thickness of a hollow cylindrical bar and inclined crack of a hollow cylinder subjected to torsion moment.

In this study, stress intensity factor K_{III} of mode III which expresses the stress state in the neighborhood of a crack tip is used. Stress analysis was conducted on the inside of a hollow cylinder in the axial direction of three dimensional crack tip subjected to torsion moment by combining the caustics method and the stress freezing method.

Key words : Stress Intensity Factor(응력확대계수), Experimental Stress Analysis(실험 응력해석), Caustics Method(코스틱스법), Stress Freezing Method(응력동결법)

1. 서론

구조물의 부재중에는 제조과정에서 미소한 초기크랙을 포함하거나 사용중에 크랙이 발생하는 경우가 많다. 크랙이 발생하면 파괴는 크랙선단 부근의 응력이나 변형률의 분포 상태에 지배되어 재료역학적 변수는 적용할 수 없으므로 크랙선단 근방의 응력과 변형률의 분포 상태를 나타내는 응력확대계수나 에너지 해방률을 변수로 사용한다. 기계나 구조물의 파괴방지를 목적으로 크랙을 가진 부재의 강도를 취급할 필요성이 크기 때문이다. 이 요구에 대응하여 이론면에서는 각종 형상의 크랙을 가진 2차원 및 3차원 물체에 대하여 응력확대계수를 이론 해석으로 구하는 연구가 많이 실행되었다. 또한 실험면에서는 크랙을 포함하고 있어도 간단하게 파괴되지않는 재료를 선별하는 실험법을 실용화하여, 재료의 개선 및 개발에 기여할 수 있게 되었다. 따라서 각종 크랙을 가진 부재의

파괴역학적인 해석은 매우 중요하다.

본 연구에서는 광학계의 Caustics법과 응력동결법을 병용하여, 비틀림 모멘트를 받는 중공축¹⁻³⁾의 내부에 원호크랙을 축방향에 넣어 크랙선단의 응력해석을 실시하였으며 내부크랙의 영향 및 파괴거동을 규명하였다.

2. 시험편

본 실험에 사용한 재료는 Epoxy CT-200에 경화제 HT903을 중량비 100 : 30으로 혼합하여 사용하였다. 중공축의 길이는 200mm, 직경 55mm, 중공경 14mm의 시험편을 준비하여 축방향으로 둘로 절단하여, 두께 0.5mm, 직경 100mm의 Cutter로 중공축 내부에 수직으로 크랙을 넣었다. 예리한 크랙선단을 얻기 위하여 중공축을 로에 넣고 125℃까지 온도를 올려 2시간 후 크랙선단을 가공하고, 절단된 2개의 시험편을 같은 중량비로 혼합한 Epoxy수지로 결합하여 선반으

로 가공하여 길이 200mm, 직경 52mm, 중공경 16mm의 시험편을 제작하였다. 크랙깊이는 내부 원호크랙의 경우 8mm, 내부 축방향 크랙의 경우 3mm, 6.8mm, 8.5mm이며 시험편의 잔류응력을 제거하기 위하여 어닐링하였다. 본 실험에 사용한 Epoxy수지의 재료 특성은 Young률 17.13 Mpa, 포아송비 0.484이다. 또한, Table 1에 시험편의 제원을 나타내었다. 여기서 원호크랙의 길이는 54mm~55mm이고, 축방향의 크랙길이는 140mm, D는 직경, r은 내경, a는 크랙깊이, R은 반경, T는 비틀림모멘트, α 는 광탄성감도이다.

3. 실험방법

본 실험에서는 비틀림 시험기를 사용하였으며 시험편이 축방향의 응력을 받지 않도록 좌단을 고정하고 우단의 축방향은 자유로 하여, 우단에 비틀림모멘트를 가하였다. 응력동결은 시험편이 균일온도가 되도록 로의 온도를 125°C까지 도달시켜 5시간 후에 하중을 작용시켰으며 8시간 유지한 후, 2.5°C/h의 온도 강하에 의해 25°C~30°C까지 서냉하였다. Fig. 1~2와 같이 내부크랙을 가지며 비틀림모멘트를 받는 중공축의 크랙 선단부근에 대하여 수직 방향으로 평균 5mm의 두께로 Fig. 3과 같이 절취(slice)하였다. 절편의 표면을 연마하고 응력동결시와 동일 사이클로 어닐링하여 응력을 해방하면, 크랙표면에는 동결전의 비틀림모멘트에 대응한 변형이 생긴다. 이를 Fig. 4와 같은 Caustics상 형성장치를 사용하여 면외전단형의 응력확대계수 및 무차원화한 응력확대계수의 값을 구하고, 중공축의 내부크랙의 영향을 조사하였다.

본 실험의 Caustics장치는 반사형의 발산광을 사용하였으며 광원으로는 발진출력 5mw의 He-Ne레이저를 사용하였다.

4. 응력확대계수 K_{III} 의 산정⁴⁻⁵⁾

응력확대계수의 측정에는 Caustics법과 응력동결법을 병용하여, 3차원 내부크랙에 대

하여 실험적으로 해석하기 어려운 면외전단형의 응력확대계수 K_{III} 를 구하였다. 비틀림 응력을 동결한 3차원 크랙을 가진 중공축을 절취하여 동결된 응력을 해방하면, 절편상의 크랙선단 근방에 변형이 생겨 입사광의 경로가 변화하며 그 결과 스크린에 Caustics상이 형성된다.

크랙선단의 좌표계를 Fig. 5와 같이 정하면, 모드 III에서 크랙 근방의 z방향 변위 w는 다음과 같다.

$$w = \frac{2rK_{III}}{G(2\pi r)^{1/2}} \sin \theta / 2 \quad (1)$$

여기서 G는 횡탄성계수이며 r, θ 는 극좌표에서의 동경과 편각이다.

Caustics법을 이용하여 응력확대계수 K_{III} 를 측정할 경우 Fig. 6과 같이 시험편위의 일점 P(x, y)에서 반사하는 발산광의 경로에 대하여 스크린위에서 X, Y축의 광의 위치는 다음 식과 같다.

$$\begin{aligned} X &= \lambda x - 2Z_o \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \\ Y &= \lambda y - 2Z_o \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 λ 는 발산광의 투영배율로 다음 식으로 정의된다.

$$\lambda = (Z_o + Z_i) / Z_i \quad (3)$$

여기서 Z_o 는 시험편과 스크린의 거리, Z_i 는 발산광의 집점위치와 시험편과의 거리이다. 식 (1)을 미분하면 식 (4)와 같이 된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ &= -\frac{K_{III}}{(2\pi r)^{1/2} G} \sin \theta / 2 \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ &= -\frac{K_{III}}{(2\pi r)^{1/2} G} \cos \theta / 2 \end{aligned} \quad (4)$$

식 (2)의 x, y를 극좌표 r, θ 에 변환하여 식 (4)를 식 (2)에 대입하면 X, Y는 다음과 같다.

$$X = \lambda r \cos \theta + 2Z_0 \frac{K_{\text{III}}}{(2\pi r)^{1/2} G} \sin \theta / 2$$

$$Y = \lambda r \cos \theta - 2Z_0 \frac{K_{\text{III}}}{(2\pi r)^{1/2} G} \cos \theta / 2 \quad (5)$$

스크린위에서 물체와 광은 1대 1의 대응이 아니라, 수학적으로는 특이점의 존재와 대응하고 있어 그와 같은 상태가 존재하기 위해서는 Jacobian 행렬식이 영이다.

$$J = \frac{\partial(X, Y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial r} & \frac{\partial X}{\partial \theta} \\ \frac{\partial Y}{\partial r} & \frac{\partial Y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

$$= r\lambda^2 - r^{-2} Z_0^2 \frac{K_{\text{III}}^2}{2\pi G^2} = 0 \quad (6)$$

식 (6)을 r 에 대해서 풀면 다음과 같다.

$$r = \left(\frac{Z_0 K_{\text{III}}}{\sqrt{2\pi} \lambda G} \right)^{2/3} \equiv r_0 \quad (7)$$

여기서 r_0 는 초기곡선이다.

반사광이 스크린위에 형성하는 상은 식 (5), (7)로부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$X = \lambda r_0 (\cos \theta + 2 \sin \theta / 2)$$

$$Y = \lambda r_0 (\sin \theta - 2 \cos \theta / 2) \quad (8)$$

Fig. 8은 $-\pi \leq \theta \leq \pi$ 의 범위에 대하여 식 (8)로부터 구한 모드 III의 Caustics상이다. 크랙선에 대하여 수직방향 Caustics상⁶⁾의 최대길이를 구하면 다음과 같다.

$$Y_{\text{max}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \lambda r_0 \quad (9)$$

따라서 초기곡선 r_0 는 식 (9)로부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$r_0 = \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{Y_{\text{max}}}{\lambda} \quad (10)$$

응력확대계수 K_{III} 는 식 (7), (10)로부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$K_{\text{III}} = 0.5986 \frac{G Y_{\text{max}}^{3/2}}{Z_0 \lambda^{1/2}} \quad (11)$$

따라서 Caustics상의 최대길이를 측정하면 K_{III} 값을 구할 수 있다.

면외전단형의 무차원화한 응력확대계수는 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$F_{\text{III}} = \frac{K_{\text{III}}}{K_0}$$

$$K_0 = \frac{2TR_2}{(R_2^4 - R_1^4)} \sqrt{\frac{a}{\pi}}$$

$$F_{\text{III}} = \frac{K_{\text{III}}(R_2^4 - R_1^4)}{2TR_2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (12)$$

여기서 a 는 크랙깊이, T 는 비틀림모멘트, R_1, R_2 는 중공축의 내경과 외경이다. Fig. 7에 모드 III의 크랙선단 근방의 응력성분을 나타낸다.

5. 실험결과 및 고찰

Fig. 9는 중공축의 절편을 Caustics상 형성 장치로 촬영한 결과를 나타낸다. 내부원호크랙을 가진 중공축의 비틀림모멘트를 받을 경우 크랙선단 및 크랙형상에 따라서 측정 가능한 등색선 호는 나타나지 않지만, 너무 작아서 측정 불가능인 등색선은 나타난다. 이로부터 내부원호크랙을 가진 중공축이 비틀림모멘트를 받으면 개구형의 응력확대계수 K_{I} 은 영이고, 면내전단형의 응력확대계수 K_{II} 는 존재하지만 거의 영에 가깝다. 또한 Fig. 7과 같이 크랙선단 근방에 τ_{xz}, τ_{yz} 에 대응한 변형인 표면변형은 나타나지 않지만 크랙선단 근방의 응력성분으로 τ_{xz} 와 τ_{yz} 는 존재한다. 즉, 면외전단형의 응력확대계수 K_{III} 는 존재한다. 따라서 K_{III} 의 값을 구하기 위하여 응력을 해방시키면 절편이 동결전의 상태로 회복하면서 표면변형이 생기어 크랙선단 근방의 판 두께 변화 및 광의 굴절률의 변화가 생긴다. 입사한 광의 경로가 변화하여 방향이 구부러지면 그 결과로 스크린위에 Fig. 9와 같은 Caustics상이 형성된다. Caustics장치로 K_{III} 의 값을 구한 결과 내부축방향크랙의 경우는 크랙의 깊이가 증가하면 K_{III} 의 값은 커지며 내부원호크랙의 경우는 크랙의 최심점에서 K_{III} 의 값이 가장 크고 중심에 가까워질수록 감소한다.

이는 원호내면크랙을 가진 중공축의 비틀림에 의한 K_{III} 값의 영향과 잘 일치한다. 이로부터 내부크랙을 가진 중공축의 비틀림에 의한 파괴거동을 명확하게 알 수 있다. 즉, 시험편이 파괴될 경우 최심점에서 크랙이 발생하여 외측으로 확대되어 파괴된다. Fig. 10에 크랙 선단부근을 따라서 응력확대계수 K_{III} 의 분포를 나타낸다.

6. 결론

실험적으로 응력확대계수를 구하는 Caustics법과 응력동결법을 병용하여 비틀림 모멘트를 받는 내부크랙을 가진 중공축의 응력해석을 실행하고, 무차원화한 응력확대계수를 구하여 내부크랙의 영향 및 파괴거동을 검토하였다. 이 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 내부원호크랙을 가진 중공축이 비틀림 모멘트를 받을 경우 크랙선단 및 크랙형상을 따라서 측정 가능한 등색선 호는 나타나지 않지만, 너무 작아서 측정 불가능한 등색선은 나타난다. 이는 K_{III} 가 주로 존재함을 알 수 있다.
- (2) 내부축방향 크랙의 경우 크랙의 깊이가 깊어지면 K_{III} 의 값이 증가한다.
- (3) 내부원호크랙의 경우 크랙의 최심점에서 K_{III} 의 값은 가장 크고, 중공축의 중심에 가까워질수록 K_{III} 의 값은 감소한다.
- (4) 내부크랙을 가진 중공축의 비틀림에 의한 파괴는 크랙의 최심점에서 발생하여 외측으로 확대되어 파괴에 도달한다.

참고문헌

- (1)吳 大方, 高橋 賞, 江角 務, "Caustics법에 의한 3차원 크랙의 응력확대계수 K_{III} 값의 실험적 연구", 일본기계학회논문집, Vol.56, No.527, pp53-58, 1990.
- (2)吳 大方, 高橋 賞, "3차원 크랙에 대한 혼

합모드의 응력확대계수", 일본기계학회논문집, Vol.58, No.546, pp.353-360, 1992.

- (3)河 榮旻, 高橋 賞, 江角 務, "크랙을 가진 중공원통의 응력확대계수 (K_{II} , K_{III})의 산정", 일본기계학회논문집, Vol.61, No.585, pp.869-875, 1995.
- (4)P.S.Theocaris and H.G.Georgiadis, "Mode III Stress-intensity Factors in Cracked Orthotropic Plates - An Analogy with Propagating Cracks in Isotropic Media", Experimental Mechanics, Vol.21, No.9, pp.177-183, 1984.
- (5)靑水, 高橋, "초기곡선 및 광학계가 Caustics법과 정도에 미치는 영향", 일본 비파괴검사 협회, Vol.31, No.4, pp.253-257, 1982.
- (6) J.F.Kalthoff, "The Shadow Optical Method of Caustis", (Edit. Lagarde, A., Static and Dynamic Photoelasticity and Caustics), Springer-Verlag, pp.443-460, 1987.
- (7)靑水, 島田, "Caustics법에 의한 응력확대계수의 측정", 일본 비파괴검사 협회, Vol.27, No.7, pp.399-406, 1982.

Table 1 Dimensions of test specimens

(Inside arc crack)

No	D mm	r mm	a mm	a/R	T N·m	α mm/N
1	52	16	7.91	0.3	3.6	3.94
2	52	16	7.87	0.3	3.6	3.92
3	52	16	7.93	0.3	3.6	3.85

(Inside axial directional crack)

No	D mm	r mm	a mm	a/R	T N·m	α mm/N
1	52	16	3	0.192	3.6	3.94
2	52	16	6.8	0.285	3.6	3.92
3	52	16	8.5	0.380	3.6	3.85

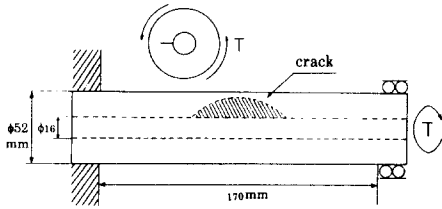


Fig. 1 Test specimen with inside arc crack

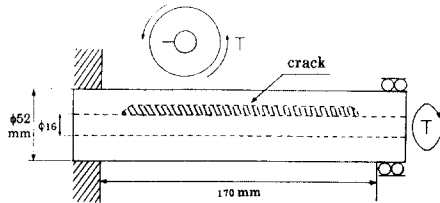


Fig. 2 Test specimen with inside axial directional crack

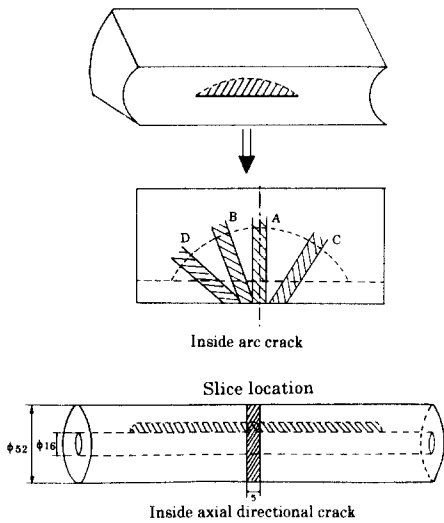


Fig. 3 Slice location

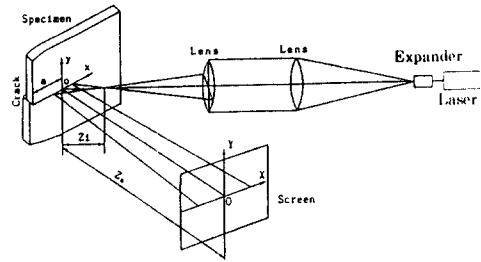


Fig. 4 Optical setup for experiment using reflected caustics with divergent light

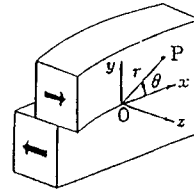


Fig. 5 Coordinate system of crack tip for mode III

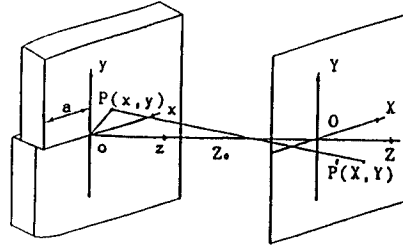


Fig. 6 Light ray deflection for mode III deformation

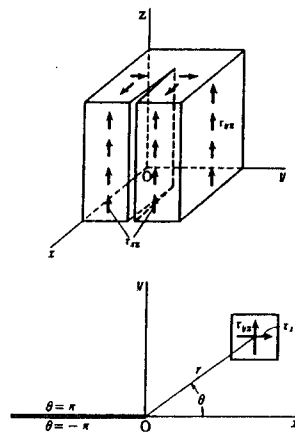


Fig. 7 Stress component of crack tip for mode III

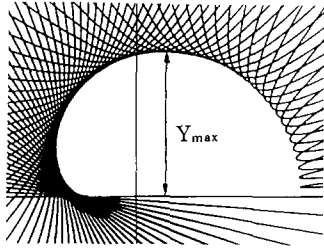
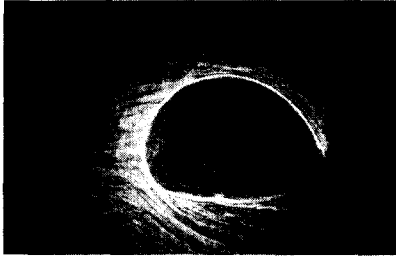


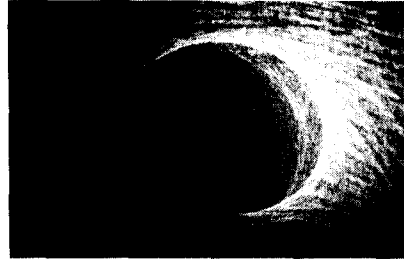
Fig. 8 Theoretical caustic pattern for mode III



(d) $K_{III} = 0.1931$ [MPa·mm^{3/2}], $Y_{max} = 31.6$ mm
 $Z_c = 30$ mm, $Z_0 = 662$ mm, $\lambda = 23.0666$
 (in case of inside axial directional crack)



(a) $K_{III} = 0.3229$ [MPa·mm^{3/2}], $Y_{max} = 44.6$ mm
 $Z_c = 31$ mm, $Z_0 = 671$ mm, $\lambda = 22.6451$



(e) $K_{III} = 0.5107$ [MPa·mm^{3/2}], $Y_{max} = 49.0$ mm
 $Z_c = 75$ mm, $Z_0 = 716$ mm, $\lambda = 19.55$
 (in case of inside arc crack)

Fig. 9 Experimental caustic patterns for mode III



(b) $K_{III} = 0.2763$ [MPa·mm^{3/2}], $Y_{max} = 38.5$ mm
 $Z_c = 37$ mm, $Z_0 = 680$ mm, $\lambda = 19.3783$



(c) $K_{III} = 0.2621$ [MPa·mm^{3/2}], $Y_{max} = 36.45$ mm
 $Z_c = 39$ mm, $Z_0 = 678$ mm, $\lambda = 18.3846$

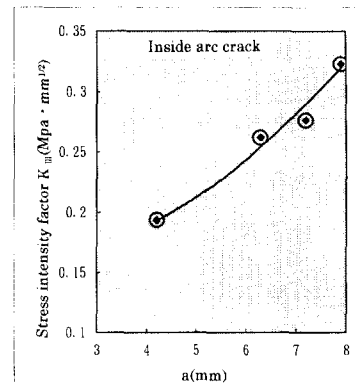


Fig. 10 Distribution of stress intensity factor K_{III} along the crack front