비정규 공정 데이터에 대한 공정능력의 측도 및 평가

김홍준
대구산업정보대학 산업안전과
송서일
동아대학교 산업공학과

Measure and Assessment of Process Capability for Nonnormal Process Data

Hong Jun Kim
Dept. of Industrial Safety Taegu polytechnic college
Suh Ill Song
Dept. of Industrial Engineering Dong-A University

Abstract

In this dissertation, a new process capability index C_{psk} is introduced for non-normal process. The Pearson curve and the Johnson curve are selected for capability index calculation and data modeling the normal-based index C_{psk} is used as the model for non-normal process.

A significant result of this research find that the ranking of the seven indices, C_p, C_{pk}, C_{pm}, C^*_{pm}, C_{pmk}, C_s, C_{psk} in terms of sensitivity to departure of the process median from the target value $T = M$ from the most sensitive one up to the least sensitive are C_{psk}, C_s, C_{pmk}, C^*_{pm}, C_{pm}, C_{pk}, C_p. i.e. By the criteria adopted for evaluation of PCI's C_{psk} is the most sensitive to the departure of the process median from target and C_p is least

1. 서론

공정능력지수 사용의 주목적은 미리 설정된 규격과 공정의 제품이 얼마나 잘 일치하는가를 결정하는 것이다. Boyles(1991) 에 따르면 공정능력지수(PCI)는 "공정의 성과를 정량화하기 위해서 쉽게 이해 시킬 수 있는 공통적으로 제공하는 수단"이라고 말하고 있다.

공정능력지수는 공정에 부가된 요구사항에 통계적으로 관리된 공정의 성질을 빠르게 비교할 목적으로 개발되어, 공정의 잠재력과 성능을 보여주는 단위 없는 측도로 널리 사용되고

있다. 이러한 공정능력지수들은 계산이 용이하고 이해하기 쉬운 형태로 발전되어가기 때문에 매우 빠른 속도로 전 제조업에 폭넓게 사용되어지고 있다.

공정능력을 나타내는데 공정능력지수를 사용하는 것은 품질목표의 설정과 정보소통을 훨씬 단순하게 하기 때문이며, 따라서 이것의 사용빈도는 계속 증가될 것이다. 그러나 공정능력지수를 사용할 때 주의해야 할 것은 공정은 공정능력이 평가되기 전에 통계적 관리상태라야 한다.

공정이 정규분포를 따른다는 가정하에서 개발되어온 현 공정능력지수들은 표본표준편차 s에 의해 추정되며, 이 s의 분포는 비정규분포에 대해서는 강건하지 못하다는 성질이 잘 알려져 있다.

따라서 현 공정능력지수들은 비정규공정에 대해서는 정확한 공정능력을 반영시키지 못하는 약점을 지니기 때문에 이러한 비정규분포의 공정능력을 반영시킬 수 있는 공정능력지수의 개발이 필요하다.

기업체에서 사용되고 있는 공정능력지수들은 전통적 6σ개념을 기초로 한다. 이러한 지수들은 C_p, C_{pk}는 Kane(1986), C_{pm} 과 C_{pm}^* 은 Chan et al.(1988) 으로부터 정의되었고, Pearn, Kotz, and Johnson(1992) 은 C_{pmk}를 제안하였으며, C_{pmk}는 Choi and Owen(1990)에 의해 제안된 C_{pm}과 동일하다. 그 후 C_{psk}가 Benson(1994)에 의해 개발되었다. 그리고 비정규공정에 대한 공정능력지수는 Pearson System의 경우 Clements(1989) 에 의해 적용하여 왔으며, 그 후 Pearn 과 Kotz(1994-1995) 에 의해 연구되어 왔다. Pearson System의 대안으로 개발된 Johnson System의 경우는 Farnum(1996-1997) 에 의해 제안되어 졌다.

최근에 Lovelace(1994)에 의하여 비음수값을 갖는 공정에 대한 공정능력지수 C_{pb}가 개발되었고, 그 후 Wright(1995)에 의해 C_s가 개발 되었다. 비정규공정 데이터의 일반적인 데이터 변환에 대한 이론적 분포는 최근 문헌에서 소개되고 있는데, Lognormal, Gamma, Weibull 및 Johnson 시스템 분포들이 그 예이다.

본 연구에서는 비정규공정 데이터를 나타내는데 가장 보편적으로 사용되고 있는 Pearson System을 이용하여 비정규공정의 특성을 보다 잘 반영할 수 있는 새로운 공정능력지수의 측도인 C_{psk}를 제안하고, 비정규공정의 사례에 적용시켜, 보다 비정규공정에 우수한 공정능력지수임을 제시하려고 한다.

2. 정규공정에 대한 공정능력의 측도

Benson(1994)에 의해 <Fig. 2.1>과 같이 현재까지 제안된 공정능력지수들을 요약해서 나타내면 식(2.1)~식(2.6)과 같다.

$$C_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma} \tag{2.1}$$

$$C_{pk} = \min\left(\frac{USL-\mu}{3\sigma}, \frac{\mu - LSL}{3\sigma}\right) = \min(C_{pu}, C_{pl}) \tag{2.2}$$

$$C_{pm} = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} \tag{2.3}$$

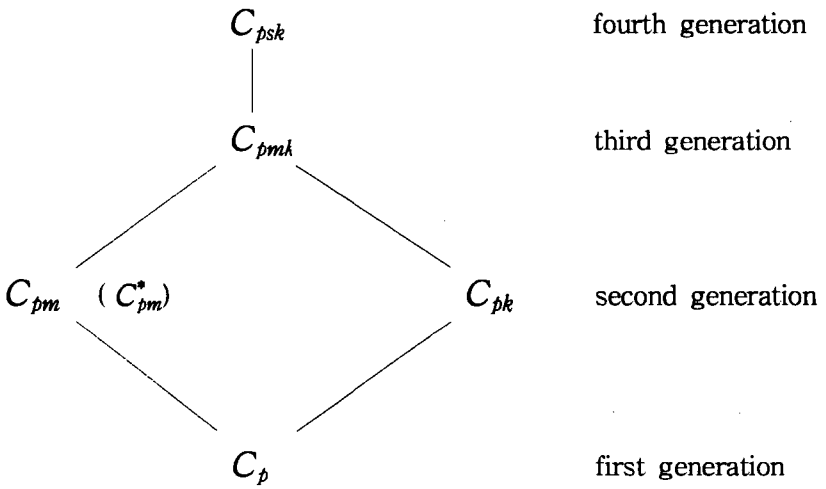
$$C^*_{pm} = \frac{\min(USL - T, T - LSL)}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} \tag{2.4}$$

$$C_{pmk} = \frac{\min(USL - \mu, \mu - LSL)}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} \tag{2.5}$$

$$C_{psk} = \frac{\min(USL - \mu - |\mu - T|, \mu - LSL - |\mu - T|)}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} \tag{2.6}$$

여기서 μ는 공정의 평균, σ^2은 공정의 분산, USL, LSL및 T는 각각 공정의 규격 상한치, 규격 하한치 및 목표치를 나타낸다.

Benson(1994)에 의해 제 4세대 공정능력 지수인 C_{psk}가 도입된 동기는 $T \neq M$인 경우 공정이 목표치로 부터 변화할 때 방향에 관계없이 실행 될 수 있기 때문이다.



<Fig. 2.1.> Hierarchical relationship between the indices studied

식(2.1)~식(2.6)을 단순화 시킨 형태로 나타내면, 식(2.7)~식(2.12)와 같다.

$$C_p = \frac{d}{3\sigma} \tag{2.7}$$

$$C_{pk} = \frac{d-|\mu-M|}{3\sigma} \tag{2.8}$$

$$C_{pm} = \frac{d}{3\sqrt{\sigma^2+(\mu-T)^2}} \tag{2.9}$$

$$C_{pm}^{*} = \frac{d-|T-M|}{3\sqrt{\sigma^2+(\mu-T)^2}} \tag{2.10}$$

$$C_{pmk} = \frac{d-|\mu-M|}{3\sqrt{\sigma^2+(\mu-T)^2}} \tag{2.11}$$

$$C_{psk} = \frac{d-|\mu-T|-|M-\mu|}{3\sqrt{\sigma^2+(\mu-T)^2}} \tag{2.12}$$

여기서 $d = (USL - LSL)/2$, $M = (USL + LSL)/2$

그리고 Benson(1994)은 제1, 2, 3, 4세대 공정능력 지수인 C_p, C_{pm}, C_{pk}, C_{pmk}, C_{psk}를 모두 통합시켜 단일 공정능력지수 형태로 나타내기 위해 V'annman(1993)에 의해 제안된 분류를 확장시켜 $C_{psk}(U, V, W)$ 를 식(2.13)와 같이 나타냈다.

$$C_{psk}(U, V, W) = \frac{d-U|\mu-M| - W|\mu-T|}{3\sqrt{\sigma^2+V(\mu-T)^2}} \tag{2.13}$$

여기서, $U \geq 0$, $V \geq 0$, $W \geq 0$ 이며 V와 W는 공정의 평균이 목표치로부터 벗어남의 크기와 양을 나타내는 모수이고, U는 공정의 평균이 규격의 중심으로부터 벗어남을 나타내는 모수이다. 식(2.13)으로부터 U, V, W 가중치에 따른 공정능력지수와의 관계를 나타내면 식(2.14)~식(2.18)과 같다.

$$C_{psk}(0,0,0) = C_p = \frac{d}{3\sigma} \tag{2.14}$$

$$C_{psk}(1,0,0) = C_{pk} = \frac{d-|\mu-M|}{3\sigma} \tag{2.15}$$

$$C_{psk}(0,1,0) = C_{pm} = \frac{d}{3\sqrt{d^2+(\mu-T)^2}} \tag{2.16}$$

$$C_{psk}(1,1,0) = C_{pmk} = \frac{d-|\mu-M|}{3\sqrt{\sigma^2+(\mu-T)^2}} \tag{2.17}$$

$$C_{psk}(1,1,1) = C_{pmk} = \frac{d-|\mu-M|-|\mu-T|}{3\sqrt{\sigma^2+(\mu-T)^2}} \tag{2.18}$$

3. 비정규공정에 대한 공정능력의 측도

3.1 비음수값을 갖는 비정규 공정의 공정능력지수: C_{pb}

Lovelace(1994)는 비음수 값을 갖는 공정에 대한 공정능력지수를 한쪽규격의 C_p지수인 C_p^*의 대수정규 수정으로 개발되어지는 C_{pb}로 정의한다.

상한 C_p^* 지수는 정규인 경우 식(3.1)와 같이 정의된다.

$$C_p^* = \frac{USL - T}{3\sigma} \tag{3.1}$$

C_{pb}는 상기 지수를 대수 정규화시켜 식(3.2)와 같이 나타낸다.

$$C_{pb} = \frac{USL - T}{e^{\mu_Y + 3\sigma_Y} - e^{\mu_Y}} \tag{3.2}$$

3.2 왜도에 민감한 공정능력지수 : C_s

Wright(1995)는 구멍가공 공정과 같은 공정에 발생하기 쉬운 왜도에 민감한 새로운 지수인 C_s를 개발하였다. 그는 왜도의 측도로 3차 중심적률 $\mu_3 = E(X-\mu)^3$를 사용하여 식(3.3)과 같은 공정능력 지수를 정의하였다.

$$C_s = \frac{\min(USL-\mu,\ \mu-LSL)}{3\sqrt{\sigma^2+(\mu-T)^2+|\mu_3/\sigma|}}$$

$$= \frac{d-|\mu-T|}{3\sqrt{\sigma^2+(\mu-T)^2+|\mu_3/\sigma|}} \tag{3.3}$$

여기서 μ_3는 비대칭항을 신뢰하기 위하여 분모에 있는 다른 항과 동일한 단위가 되도록 σ로 나누며, 절대값은 음의 비대칭을 신뢰시키고 또한 지수에 손실을 부과시킨다. 그리고 C_s의 각 항을 σ로 나누면 식(3.4)와 같이 된다.

$$C_s = \frac{d/\sigma - |(\mu-T)/\sigma|}{3\sqrt{1+\{(\mu-T)/\sigma\}^2+|\beta_1^{1/2}|}} \tag{3.4}$$

여기서 $\sqrt{\beta_1} = \mu_3/\sigma^3$은 왜도의 전통적 표준화된 측도이다.

3.3 Pearson 시스템에 의한 공정능력지수

C_p지수값을 추정하기 위해서 Clements(1989)는 6σ 대신 $U_a - L_a$로 교체하여 식(3.5)와 같이 나타낸다.

$$C_p = \frac{USL - LSL}{U_a - L_a} \tag{3.5}$$

여기서 U_a는 99.865 백분위수이고, L_a는 0.135 백분위수인 점의 값을 나타낸다. 이 값은 추정되는 왜도(S_K) 및 첨도(K_U)의 특정값이 주어지는 경우 Gruska et al.(1989)에 의해 제시된 표에서 구해진다. 식(3.5)에서 $U_a - L_a$를 취하는 이론적 근거는 공정이 $C_p = 1$인 때의 정규분포를 가정하면 평균으로 부터 $\pm 3\sigma$를 벗어날 확률은 0.27%라는 것이다. 따라서 C_p는 식(3.6)과 같은 분위수로 나타낼 수 있다.

$$C_p = \frac{USL - LSL}{X_{0.99865} - X_{0.00135}} \tag{3.6}$$

여기서 $X_{0.99865}$와 $X_{0.00135}$는 각각 U_a와 L_a를 나타낸다.

C_{pk}도 동일한 접근으로 USL $-\mu$ 대신에 USL $- M_e$로, $\mu -$LSL대신에 $M_e -$ LSL로 변경되며, 3σ도 각각 $U_a - M_e$, $M_e - L_a$로 되어 식(3.7)과 같다.

$$\begin{aligned} C_{pk} &= \min\left[\frac{USL - M_e}{U_a - M_e}, \frac{M_e - LSL}{M_e - L_a}\right] \\ &= \min(C_{pu}, C_{pl}) \end{aligned} \tag{3.7}$$

μ대신에 메디안 M_e을 취하는 이유는 메디안이 비정규분포의 중심을 잘 표현하기 때문이다.

같은 방법으로 적용하면 식(3.8)~식(3.11)과 같이 된다.

$$C_{pm} = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{\left(\frac{U_a - L_a}{6}\right)^2 + (M_e - T)^2}} \tag{3.8}$$

$$C_{pm}^{*} = \frac{\min[USL - T, T - LSL]}{3\sqrt{\left(\frac{U_a - L_a}{6}\right)^2 + (M_e - T)^2}} \tag{3.9}$$

$$C_{pmk} = \min\left[\frac{USL - M_e}{3\sqrt{\left(\frac{U_a - M_e}{3}\right)^2 + (M_e - T)^2}}, \frac{M_e - LSL}{3\sqrt{\left(\frac{M_e - L_a}{3}\right)^2 + (M_e - T)^2}}\right] \tag{3.10}$$

$$C_{pmk} = \min\left[\frac{USL - M_e - |M_e - T|}{3\sqrt{\left(\frac{U_a - M_e}{3}\right)^2 + (M_e - T)^2}}, \frac{M_e - LSL - |M_e - T|}{3\sqrt{\left(\frac{M_e - L_a}{3}\right)^2 + (M_e - T)^2}}\right] \tag{3.11}$$

3.4 Johnson 시스템에 의한 공정능력지수

Johnson(1949)에 의해 제시된 Johnson 시스템은 비정규분포를 모형화 하는데 Pearson 시스템의 대안으로 제시되었다. Johnson 곡선을 공정능력지수계산에 적용하게 된 배경은 Johnson 곡선은 Pearson 시스템 보다 나은 장점을 지니고 있기 때문이다. 즉 Johnson 곡선은 주어진 데이터 집합에 가장 좋은 Johnson 곡선을 선택하는데 단순한 구조를 보여주고, 표본의 적률에 기초한 방법보다 더욱 신뢰할 수 있는 절차이고, 일반적으로 쉽다고 Farnum(1996-1997)은 지적하였다.

또한 Johnson 접근의 가장 현저한 특징 중의 하나는 표준정규곡선으로 변환하여 사용하는 확률계산이다. 이러한 Johnson 시스템은 식(3.12)의 변환식과 식(3.13)~식(3.15)인 3가지 분포족을 갖는다.

$$Z = \gamma + \eta K_i(x, \lambda, \varepsilon) \quad i = 1,2,3 \tag{3.12}$$

$$K_1(\chi, \lambda, \varepsilon) = \sin h^{-1}\left(\frac{\chi - \varepsilon}{\lambda}\right) \tag{3.13}$$

$$K_2(\chi, \lambda, \varepsilon) = \ln\left(\frac{\chi - \varepsilon}{\lambda + \varepsilon - \chi}\right) \tag{3.14}$$

$$K_3(\chi, \lambda, \varepsilon) = \ln\left(\frac{\chi - \varepsilon}{\lambda}\right) \tag{3.15}$$

식(3.13)~식(3.15)는 $\eta, \gamma, \lambda, \varepsilon$의 적절한 모수선택에 의해 Z분포로 변환시킬 수 있고 ε, γ는 위치모수이며, λ, η는 척도모수이다.

식(3.13)은 S_U곡선으로 정의역은 전 실직선이 되며, 식(3.14)는 개구간 $(\varepsilon, \varepsilon+\lambda)$에 대해

정의되는 S_B 곡선을 나타낸다. 식(3.15)는 S_L(대수정규)곡선을 나타낸다. S_L곡선은 모수 λ를 소거함으로써 단순화시켜 $Z = r^* + \eta \ln(\chi - \varepsilon)$로 나타낼 수 있다.

Johnson 곡선은 종전의 Pearson 곡선과 같이 적률법으로 추정되었지만, Slifker 와 Shapiro(1980)의 표본 백분위수에 기초한 보다 신뢰할 만한 추정 방법과 주어진 데이터 집합의 Johnson 곡선의 분포족 형태를 결정하는 식 (3.16)과 같은 판별 함수를 제시하였다.

$$\begin{aligned} &① \ \frac{mn}{p^2} > 1 \ : \ S_U \text{ 곡선} \\ &② \ \frac{mn}{p^2} < 1 \ : \ S_B \text{곡선} \\ &③ \ \frac{mn}{p^2} = 1 : S_L \text{ 곡선} \end{aligned} \tag{3.16}$$

여기서 $m = x_{3z} - x_z$

$n = x_{-z} - x_{-3z}$

$p = x_z - x_{-z}$

이고, x_z는 누적확률인 P_z에 해당하는 x의 값을 의미하며, 나머지 x_{-3z}, x_{-z}, x_{3z}의 경우도 해당 누적확률인 P_{-3z}, P_{-z}, P_{3z}에 해당하는 x의 값을 의미한다. Slifker-Shapiro 방법은 적절한 Z값을 택해서 표준정규표로 부터 -3z, -z ,z , 3z와 누적확률인 P_{-3z}, P_{-z}, P_z, P_{3z} 를 찾는다. Slifker-Shapiro에 의해 추천되는 값은 0.524이다.

그리고 Johnson곡선에 대한 확률계산을 위하여 3가지 분포족에 관해 <Table 3.1>과 같이 같이 z를 x로 나타내어 표준정규분포와 동일한 계산을 할 수 있다.

비정규 공정에 대한 공정능력지수의 정의를 일반화시킬 때의 C_p지수는 식(3.5)와 동일한 방법으로 식(3.17)로 나타낸다.

<Table 3.1> Johnson curve and equation for x

Johnson curve type	equation for x in terms of z	note
(1) S_U	$x = \varepsilon - \lambda \ \text{Sin h}\left(\frac{r-z}{n}\right)$	$\text{Sin h}\,(u) = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$
(2) S_B	$x = \varepsilon + \frac{\lambda}{1+\exp\left(\frac{\gamma - z}{\eta}\right)}$	—
(3) S_L	$x = \varepsilon + \lambda \exp\left(\frac{z-\gamma}{\eta}\right)$ $= \varepsilon + \exp\left(\frac{z-\gamma^*}{\eta}\right)$	$r^* = \eta \ln\left[\frac{\frac{n}{p} - 1}{p\left(\frac{m}{p}\right)^{1/2}}\right]$

$$C_p = \frac{USL - LSL}{U_{\alpha_2} - L_{\alpha_1}} \tag{3.17}$$

정규분포에 대해서는 $L_{\alpha_1} = \mu - 3\sigma$, $U_{\alpha_2} = \mu + 3\sigma$가 되며, Johnson곡선에 의한 비정규분포에 대한 L_{α_1}와 U_{α_2}는 <Table 3.1>에서 α_1은 $z = -3$ 과 α_2는 $z = 3$으로 치환하여 사용한다. 예를 들면 S_U곡선, S_B곡선을 사용할 때, L_{α_1}, U_{α_2}값은 각각 식(3.18) 및 식(3.19)와 같다.

$$\begin{aligned} L_{\alpha_1} &= \varepsilon - \lambda \sin h(\frac{\gamma + 3}{\eta}) \\ U_{\alpha_2} &= \varepsilon - \lambda \sin h(\frac{\gamma - 3}{\eta}) \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned} L_{\alpha_1} &= \varepsilon + \lambda\left[1 + \exp(\frac{\gamma + 3}{\eta})\right]^{-1} \\ U_{\alpha_2} &= \varepsilon + \lambda\left[1 + \exp(\frac{\gamma - 3}{\eta})\right]^{-1} \end{aligned} \tag{3.19}$$

C_{pk}지수인 경우의 일반화는 Johnson변환을 통하여 Z_L과 Z_U 값으로 치환하여 식(3.20)과 같이 나타낸다.

$$C_{pk} = \min(-\frac{Z_L}{3}, \frac{Z_U}{3}) \tag{3.20}$$

4. 공정능력측도의 추정절차

4.1 Pearson시스템(Clement방법)에 의한 공정능력지수의 계산

Pearson 방법에 의한 공정능력지수의 계산은 다음과 같은 절차에 의해 실시한다.

[단계 1] 표본통계량 $\bar{x}$, s, S_K, K_U 를 구한다.

[단계 2] L_α'값에 대해 양수의 왜도값과 음수의 왜도값은 Grusk et al.(1989) 의 표를 사용하여 표준화된 0.135 분위수를 찾는다.

[단계 3] U_α'값으로 양수의 왜도값과 음수의 왜도값은 Grusk et al.(1989) 의 표를 사용하여 표준화된 99.865 분위수를 찾는다.

[단계 4] M'값으로 Grusk et al.(1989) 의 표에 의하여 표준화된 메디안의 값이 양수의 왜도값일 때는 - 부호를 갖고, 음수의 왜도값일 때는 그대로 둔다.

[단계 5] 0.135분위수 L_α를 식(4.1)에 의해 추정한다.

$$\hat{L}_\alpha = \overline{X} - sL_\alpha' \tag{4.1}$$

[단계 6] 99.865 분위수 U_α를 식(4.2)에 의해 추정한다.

$$\hat{U}_\alpha = \overline{X} - sU_\alpha' \tag{4.2}$$

[단계 7] 메디안 M_e를 식(4.3)에 의해 추정한다.

$$\hat{M}_e = \overline{X} + sM' \tag{4.3}$$

[단계 8] $\hat{L}_\alpha$, $\hat{U}_\alpha$, $\hat{M}_e$ 를 사용하여 C_p, C_{pk}, C_{pm}, C_{pm}^*, C_{pmk}, C_{psk} 의 추정치를 식(4.4)~식(4.9)과 같이 계산한다.

① $$\hat{C}_P = \frac{USL - LSL}{\hat{U}_\alpha - \hat{L}_\alpha} \tag{4.4}$$

② $$\hat{C}_{pk} = \min\left[\frac{USL - \hat{M}_e}{\hat{U}_\alpha - \hat{M}_e}, \frac{\hat{M}_e - LSL}{\hat{M}_e - \hat{L}_\alpha}\right]$$

$$= \min(\hat{C}_{pu}, \hat{C}_{pl}) \tag{4.5}$$

③ $$\hat{C}_{pm} = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{\left(\frac{\hat{U}_\alpha - \hat{L}_\alpha}{6}\right)^2 + (\hat{M}_e - T)^2}} \tag{4.6}$$

④ $$\hat{C}^*_{pm} = \frac{\min[USL - T, T - LSL]}{3\sqrt{\left(\frac{\hat{U}_\alpha - \hat{L}_\alpha}{3}\right)^2 + (\hat{M}_e - T)^2}} \tag{4.7}$$

⑤ $$\hat{C}_{pmk} = \min\left[\frac{USL - \hat{M}_e}{3\sqrt{\left(\frac{\hat{U}_\alpha - \hat{M}_e}{3}\right)^2 + (\hat{M}_e - T)^2}}, \right.$$

$$\left. \frac{\hat{M}_e - LSL}{3\sqrt{\left(\frac{\hat{M}_e - \hat{L}_\alpha}{3}\right)^2 + (\hat{M}_e - T)^2}}\right] \tag{4.8}$$

⑥ $$\hat{C}_{pmk} = \min\left[\frac{USL - \hat{M}_e - |\hat{M}_e - T|}{3\sqrt{\left(\frac{\hat{U}_\alpha - \hat{M}_e}{3}\right)^2 + (\hat{M}_e - T)^2}}, \right.$$

$$\left. \frac{\hat{M}_e - LSL - |\hat{M}_e - T|}{3\sqrt{\left(\frac{\hat{M}_e - \hat{L}_\alpha}{3}\right)^2 + (\hat{M}_e - T)^2}}\right] \tag{4.9}$$

4.2 Johnson system에 의한 공정능력지수의 계산

Johnson system에 의한 공정능력지수의 계산은 다음과 같은 절차에 의해 실시한다.

[단계1] 적절한 z값을 사용하여 P_{-3z}, P_{-z}, P_z, P_{3z} 에 일치하는 데이터의 분위수인 x_{-3z}, x_{-z}, x_z, x_{3z}을 추정한다.(추정된 분위수에서 치우침를 줄이기 위해 각 확률치에 $(i-1/2)N$과 같은 표준절차를 사용하여 분류된 데이터에서 i번째 값을 추정한다.)

[단계2] 판별력을 계산하고 곡선형태를 선택한다.

[단계3] 곡선 모수들을 추정한다.(모수들의 추정식은 참고문헌 7, 15 참조)

[단계4] 히스토그램으로 분포모양을 알아본다.

[단계5] 규격을 벗어난 비율을 계산한다.([단계 3]으로 부터 추정된 모수를 사용하여 LSL과 USL에 해당하는 $\hat{Z}_L$과 $\hat{Z}_U$값을 구하여 계산한다.)

[단계6] [단계 3]에서 추정된 모수들로 부터 $\hat{L}_{\alpha_1}$과 $\hat{U}_{\alpha_2}$값을 구하여 공정능력지수들의 추정치를 식(4.10)~식(4.16)과 같이 계산한다

① $$\hat{C}_P=\frac{USL-LSL}{\hat{U}_{\alpha_2}-\hat{L}_{\alpha_1}} \tag{4.10}$$

② $$\hat{C}_{pk}=\min\left[\frac{USL-\hat{M}_e}{\hat{U}_{\alpha_2}-\hat{M}_e},\frac{\hat{M}_e-LSL}{\hat{M}_e-\hat{L}_{\alpha_1}}\right]=\min(\hat{C}_{pu},\hat{C}_{pl}) \tag{4.11}$$

③ $$\hat{C}_{pk}=\min\left(-\frac{\hat{Z}_L}{3},\frac{\hat{Z}_U}{3}\right) \tag{4.12}$$

④ $$\hat{C}_{pm}=\frac{USL-LSL}{6\sqrt{\left(\frac{\hat{U}_{\alpha_2}-\hat{L}_{\alpha_1}}{6}\right)^2+(\hat{M}_e-T)^2}} \tag{4.13}$$

⑤ $$\hat{C}^*_{pm}=\frac{\min[USL-T,T-LSL]}{6\sqrt{\left(\frac{\hat{U}_{\alpha_2}-\hat{L}_{\alpha_1}}{6}\right)^2+(\hat{M}_e-T)^2}} \tag{4.14}$$

⑥ $$\hat{C}_{pmk}=\min\left[\frac{USL-\hat{M}_e}{3\sqrt{\left(\frac{\hat{U}_{\alpha_2}-\hat{M}_e}{3}\right)^2+(\hat{M}_e-T)^2}},\ \frac{\hat{M}_e-LSL}{3\sqrt{\left(\frac{\hat{M}_e-\hat{L}_{\alpha_1}}{3}\right)^2+(\hat{M}_e-T)^2}}\right] \tag{4.15}$$

$$⑦\ \hat{C}_{psk}=\min\left[\frac{USL-\hat{M}_e-|\hat{M}_e-T|}{3\sqrt{\left(\frac{\hat{U}_{\alpha_2}-\hat{M}_e}{3}\right)^2+(\hat{M}_e-T)^2}},\right.$$

$$\left.\frac{\hat{M}_e-LSL-|\hat{M}_e-T|}{3\sqrt{\left(\frac{\hat{M}_e-\hat{L}_{\alpha_1}}{3}\right)^2+(\hat{M}_e-T)^2}}\right] \qquad (4.16)$$

5. 공정능력측도의 평가

5.1 목표치가 규격의 중심에 위치할 때

비정규공정의 경우, Pearson시스템(Clements방법)과 Johnson방법과의 비정규 공정능력지수를 비교하기 위하여 Pearn과 Kotz(1994-1995)의 예제를 인용하여 분석하기로 한다.

예제로 부터 신규생산라인의 품질개선을 하기 위해 고무전단 무게에 대한 100개의 측정데이터를 얻은 결과는 <Table 5.1>과 같다. 목표치 T는 8.7g이며, $USL=8.96$, $LSL=8.44$이다.

<Table 5.1> Process measurements (N=100 sorted)

8.84,	8.84,	8.85,	8.85,	8.85,	8.85,	8.85,	8.86,	8.86,	8.86
8.86,	8.86,	8.86,	8.86,	8.87,	8.87,	8.87,	8.87,	8.87,	8.87
8.87,	8.87,	8.87,	8.87,	8.88,	8.88,	8.88,	8.88,	8.88,	8.88
8.88,	8.88,	8.88,	8.88,	8.88,	8.88,	8.89,	8.89,	8.89,	8.89
8.89,	8.89,	8.89,	8.89,	8.89,	8.89,	8.89,	8.89,	8.89,	8.89
8.89,	8.89,	8.89,	8.89,	8.89,	8.90,	8.90,	8.90,	8.90,	8.90
8.90,	8.90,	8.90,	8.90,	8.90,	8.90,	8.90,	8.90,	8.90,	8.90
8.90,	8.90,	8.90,	8.91,	8.91,	8.91,	8.91,	8.91,	8.91,	8.91
8.91,	8.91,	8.91,	8.91,	8.91,	8.91,	8.91,	8.91,	8.92,	8.92
8.92,	8.92,	8.92,	8.92,	8.92,	8.92,	8.93,	8.93,	8.93,	8.93

상기 예제의 정규공정능력지수와 Pearson system과 Johnson system에 의한 비정규공정능력지수의 계산 결과는 <Table 5.2>와 같다 [1].

<Table 5.2> Computation of normal and non-normal process capability indice

process capability indices / population type		$\hat{C}_p$	$\hat{C}_{pk}$		$\hat{C}_{pm}$	$\hat{C}^*_{pm}$	$\hat{C}_{pmk}$	$\hat{C}_s$	$\hat{C}_{psk}$
			$\hat{C}_{pl}$	$\hat{C}_{pu}$					
Normal		4.03	6.98	(1.09)	0.45	0.45	0.12	0.12	0
Non-Normal	Pearson (Clements)	3.25	5	(1)	0.45	0.45	0.12	0.12	0
	Johnson	2.48	1.60 3.46	(0.95) (0.88)	0.45	0.45	0.12	0.12	0

<Table 5.1>에 의하여 이 공정은 규격을 벗어나는 불량은 없으나, 공정이 목표치를 매우 벗어나고 있어 품질개선이 요구되며, 이러한 내용을 반영시켜주는 $\hat{C}_{psk}$의 값이 모두 0인 것을 알 수 있다. <Table 5.2>에서 알 수 있듯이 목표치로부터 공정 메디안이 벗어남을 감지하는 감도는 Pearn 과 Kotz가 지적한 것과 같이 (1) C_p, (2) C_{pk}, (3) C_{pm}, C^*_{pm}, (4) C_{pmk} 순으로 일치하고 있다.

본 논문에 있어 비정규 공정에 대한 새로운 공정능력지수로 개발된 C_s와 C_{psk}까지 고려하면, (1) C_p, (2) C_{pk}, (3) C_{pm}, C^*_{pm}, (4) C_{pmk}, C_s, (5) C_{psk} 순으로 되어 C_{psk} 지수가 목표치로부터 공정 메디안이 벗어남을 감지하는 가장 우수한 것임을 알 수 있다. 그리고 Pearson 방법과 Johnson 방법간의 차는 거의 없다고 판단된다.

5.2 목표치가 규격의 중심을 벗어날 때

본 연구에서 제안하는 비정규 공정의 공정능력지수인 C_{psk}의 우수함을 입증하기 위하여 Pearson시스템 곡선의 대안으로 개발된 Johnson시스템의 S_B곡선의 경우의 공정능력지수와 왜도에 민감하게 개발된 C_s 및 현 공정능력지수를 비교 분석한다. 수치 예제는 Hahn 과 Shapiro(1967)가 제시한 예제를 인용한다.

<Table 5.3>은 $LSL=0.4$, $USL=0.9$ 인 공정으로부터 $T=0.5\Omega$ 저항을 500개 측정한 데이터를 도수분포표로 정리하여 나타내었다.

<Table 5.3> Resistances of 500 for 0.5ohm resistors

N0	central value	actual observations	S_B
1	0.4미만	4	6.5
2	0.425	33	36.1
3	0.475	78	74.1
4	0.525	99	93.8
5	0.575	87	90.4
6	0.625	76	73.0
7	0.675	51	52.0
8	0.725	32	33.7
9	0.775	21	19.9
10	0.825	7	10.9
11	0.875	5	5.5
12	0.9초과	7	4.1
total		500	500.0
value of χ^2			3.64

상기 예제의 정규공정능력지수와 Pearson system과 Johnson system에 의한 비정규 공정능력지수의 계산 결과는 <Table 5.4>와 같다.

<Table 5.4> Computation of normal and non-normal process capability indices

process capability indices / population type		$\hat{C}_p$	$\hat{C}_{pk}$		$\hat{C}_{pm}$	$\hat{C}^*_{pm}$	$\hat{C}_{pmk}$	$\hat{C}_s$	$\hat{C}_{psk}$
			$\hat{C}_{pl}$	$\hat{C}_{pu}$					
Normal		0.79	(0.60)	0.98	0.60	0.24	0.46	0.38	0.24
Non-Normal	Pearson (Clements)	0.63	(0.56)	0.67	0.54	0.21	0.45	0.38	0.25
	Johnson	0.80	(0.74)	0.80	0.64	0.25	0.48	0.38	0.31
			(0.24)	0.80					

<Table 5.3>에 의하면 이 공정은 규격을 벗어나고 있고, 또한 공정의 평균과 메디안이 각각 목표치를 약간 벗어나고 있어 지속적인 품질개선이 요구된다. 이러한 내용을 반영 시켜주는 $\hat{C}_{psk}$의 값은 정규공정일 때, 0.24, 비정규 공정의 Pearson시스템인 경우 0.25, Johnson시스템의 경우 0.31로 나타났다.

<Table 5.4>에서 알 수 있듯이 공정메디안이 목표치를 벗어남을 감지하는 감도의 우수성은 제 3세대 공정능력지수인 C_{pmk}의 정보결핍의 대안으로 제안된 왜도에 민감한 공정능력지수인 C_s보다 C_{psk}지수가 우수함을 알 수 있다.

따라서 비정규공정에 대한 새로운 공정능력지수로 개발된 C_{psk}는 C^*_{pm}보다는 감도가 조금 떨어지나, 특히 왜도에 민감하는 새롭게 개발된 C_s 지수보다도 우수함을 보여주어 비정규공정의 공정능력을 올바르게 반영시키고 있음을 알 수 있다.

6. 결론

새로운 공정능력지수 C_s는 공정평균이 규격중심에 위치하지 않고, 공정이 목표치를 벗어날 때, 손실을 부여 하는 것은 물론 왜도에 대한 추가적 손실까지 부여 함으로써 C_{pmk}를 확장시켜 제시한 비대칭에 민감한 공정능력지수로 평가를 받고 있다. 정규공정에 있어서 제 4세대 지수 C_{psk}는 목표치로 부터 공정의 벗어남에 대한 여분의 손실로서 분자에 인자 $|\mu - T|$를 도입함으로써, C_{pmk}로부터 개발되었다. 목표치로부터 동일하게 떨어진 공정이

라하더라도 공정이 규격한계치 이내에 있는 경우와 그렇지 못한 경우를 식별하기 위해서 C_{psk}가 제시되어 대칭인 경우와 비대칭인 경우, 공정이 목표치로부터 변화할 때 방향에 관계없이 실행되는 지수로 C_{psk}는 평가 받고 있다.

현 공정능력지수들은 정규분포의 가정하에 개발되었기 때문에 비정규공정 데이터에 대해서는 적용하기가 힘들다 그래서 이러한 전통적 공정능력지수들을 분위수들을 사용하여 재표현 함으로써 비정규공정에 대한 공정능력지수로 정의하는 것이다.

본 연구에서는 비정규공정에 대하여 Clements방법을 확장시켜 새로운 공정능력지수인 C_{psk}를 제안하였다. Clement의 접근은 매우 작은 표본크기에 대해서는 다소 비신뢰적일지는 모르나 일반적으로 표본의 크기가 $n \geq 20$이면 유용하다고 알려져 있어, 보다 진보된 공정능력지수에까지 확장시킨 것이다. 또한 C_s및 비정규공정 데이터를 모델화하는 유용한 방법인 Johnson 방법의 S_u곡선 및 S_B곡선을 그 대안으로 적용시켜 사례를 통해 살펴본 결과, Pearson방법이 우수하게 나타났다. 따라서 비정규공정에 대한 새로운 공정능력지수로 개발된 C_{psk}는 특히 왜도에 민감하게 새롭게 개발된 C_s지수 보다도 우수함을 보여주어 비정규공정의 공정능력을 올바르게 반영시키고 있음을 알 수 있다

참고문헌

[1] 金弘埈, 宋瑞日, (1998), "非正規工程에 대한 工程能力의 새로운 測度",品質經營學會誌, 제 26권, 제 1호, pp. 48~60.

[2] Benson, E. D., (1994), "Statistical Properties of a System of Fourth-Generation Process Capability Indices C_{psk} U,V,W)", Ph. D. Dissertation. University of Maryland, pp. 6~31.

[3] Boyles, R. A., (1991) "The Taguchi Capability Index", Journal of Quality Technology, 23 (1), pp. 17~26.

[4] Chan, L. K., Cheng, S. W., and Spiring, F. A. (CCS)., (1988), "A New Measure of Process Capability: C_{pm}", Journal of Quality Technology, 20 (3), pp. 62~173.

[5] Choi, B. C., and Owen, D. B., (1990), "A Study of a New Process Capability Index", Communications in Statistics - Theory and Methods, 19 (4), pp. 1231~1245.

[6] Clements, J. A., (1989), "Process Capability Calculations for Non-Normal Distributions", Quality Progress, 22 (9), pp. 95~100.

[7] Farnum, N. R., (1996~1997) ,"Using Johnson Curves to Describe Non-Normal Process Data", Quality Engineering , 9 (2), pp. 329~336.

[8] Gruska, G. F., Lamberson, L. R., and Mirkhani, K., (1989). "Non-Normal Data Analysis", Multiface Publishing Co., Michigan.

[9] Hahn, G. J., and Shapiro, S. S., (1967), "Statistical Models in Engineering", John Wiley & Sons, Inc., New York, pp. 207.

[10] Johnson, N., (1949), "Systems of Frequency Curves Generated by Translation ", Biometrika, 36, pp. 149~176.

[11] Kane, V. E., (1986). "Process Capability Indices", Journal of Quality Technology, 18 (1), pp. 41~52.

[12] Lovelace, C. R., (1994), " The Development of a Process Capability Index Non-Normal Processes Naturally Bound at Zero", Ph. D. Dissertation. University of Alabama in Huntsville.

[13] Pearn, W. L., Kotz, S., and Johnson, N. L., (1992), "Distributional and Inferential Properties of Process Capability Indices", Journal of Quality Technolgy, 24 (4), pp. 216~231.

[14] Pearn, W. L., and Kotz, S., (1994~1995), "Application of Clements' Method for Calculating Second-and-Third-Generation Process Capability Indices Non-Normal Pearsonian Population", Quality Engineering, 7 (1), pp. 139~145.

[15] Slifker, J. F., and Shapiro, S. S., (1980), " The Johnson System: Selection and Parameter Estimation", Technometrics, 22 (2), pp. 239-246.

[16] V'annman, K., (1993), "Unified Approach to Capability Indices", Division of Quality Technology & Statistics, Lulea University Lulea, Sweden.

[17] Wright, P. A., (1995), "A Process Capability Index Sensitive to Skewness", Journal of Statistical Computation & Simulation, 52, pp. 195~203.