

# Gamma 분포공정에 대한 비정규공정능력의 평가

김홍준

대구산업정보대학 산업안전과

김진수

대전산업대학교 산업공학과

송서일

동아대학교 산업공학과

## Evaluation of Non-Normal Process Capability for Gamma Distribution Process

Hong Jun Kim

Dept. of Industrial Safety, Taegu polytechnic college

Jin Soo Kim

Dept. of Industrial Engineering, Taejon National University of Technology

Suh Ill Song

Dept. of Industrial Engineering, Dong-A University

### Abstract

This paper is a brief review of the different procedures that are available for fitting theoretical distributions to data. The use of each technique is illustrated by reference to a distribution system which including the Pearson, Poission approximation of Gamma distribution and Burr functions. These functions can be used to calculate percent out of specification .

Therefore, in this paper a new methods for estimating a measure of non-normal process capability for Gamma distributed variable data proposed using the percentage nonconforming. Process capability indices combines with the percentage nonconforming information can be used to evaluate more accurately process capability.

### 1. 서론

비정규공정에 대한 공정능력지수는 Pearson System의 경우 Clements(1989)에 의해 고안 되었으며, 그후 Pearn과 Kotz(1994-1995)에 의하여 연구되어왔다. Pearson system의 대안으로 개발된 Jonson system의 경우는 Farnum(1996-1997)에 의해 제안되었다. 최근에 Lovelace (1994)에 의하여 비음수 값을 갖는 공정에 대한 공정능력지수  $C_{pb}$ 가 개발되었고, 그후 Wright(1995)에 의해  $C_s$ 가 개발 되었다. 일반적으로 비정규성에 관한 논의는 2가지 주요부

분으로 나누어 볼 수 있다.

첫번째는 특성치 X의 분포가 특정한 비정규분포를 할 때 지수들과 그것의 추정량의 성질을 조사하는 것이다.

두번째는 비정규성에 강건하도록 만들어진 새로운 공정능력지수의 사용을 고려하고, 비정규성에 관한 방법의 개발을 허용하는 것이다. 그러나 McCoy(1991)는 정규분포만이 모집단 분포의 정확한 추정치를 잘 반영시키고 있다고 말한다.

따라서 본 연구에서는 공정이 감마분포를 하는 비정규공정에 대한 공정능력의 평가를 Pearson system, Gamma 분포의 포아송근사 및 Burr분포의 3가지 분포를 사용하여 규격을 벗어나는 불량률의 척도를 사용함으로써 비정규공정의 공정능력에 대해 보다 합리적인 의사 결정을 내릴 수 있는 새로운 공정능력의 척도를 제시하고자 한다.

## 2. 비정규공정능력의 새로운 척도

비정규 분포를 하는 공정에 대한 공정능력을 평가하는 방법으로서 공정능력지수와 불량률을 사용할 수 있으나, 비정규분포에 대한 공정능력의 척도로 분위수를 사용하여 Pearson 시스템을 이용한 공정능력지수로 나타내는 방법의 결점은 불량률을 추정하는데 어려움이 있다. 따라서 실무에 있어서 빈번히 사용되고 있는 불량률의 관점에서 비정규 공정의 공정능력의 새로운 척도를 제시하고자 한다.

본 연구에서는 Pearson, Gamma 분포의 포아송근사 및 Burr의 3가지 분포를 사용하여 불량률의 척도로 공정능력을 평가하기로 한다.

### 2.1 Pearson system

Pearson system은 식(2.1)의 미분방정식을 만족시키는  $y = f(x)$ 의 분포들이다.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x - c_0)y}{c_1 + c_2x + c_3x^2} \quad (2.1)$$

Pearson system에서 핵심역할은 적률을 이용해서 모수를 결정하고 적절한 곡선형태의 선정의 기준을 제시해준다.

$f(x)$ 의 그래프의 형상을 결정하는 모수  $c_0, c_1, c_2, c_3$ 은 식(2.2)~식(2.5)와 같이 적률의 함수로서 구해진다.

$$\begin{aligned} c_0 &= -\mu_3(\mu_4 + 3\mu_2^2) / A \\ &= -\sqrt{\mu_2 \beta_1}(\beta_2 + 3) / A \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} c_1 &= -\mu_2(4\mu_2\mu_4 - 3\mu_3^2) / A \\ &= -\mu_2(4\beta_2 - 3\beta_1) / A \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$c_2 = c_0 \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} c_3 &= -(2\mu_2\mu_4 - 3\mu_3^2 - 6\mu_2^2) / A \\ &= -(2\beta_2 - 3\beta_1 - 6) / A' \end{aligned} \quad (2.5)$$

여기서

$$\begin{aligned} A &= 10\mu_2\mu_4 - 18\mu_2^3 - 12\mu_3^2 \\ A' &= 10\beta_2 - 18 - 12\beta_1 \\ \sqrt{\beta_1} &= \mu_3 / \sigma^3 = \text{Skewness} = S_K \\ \beta_2 &= \mu_4 / \sigma^4 = \text{Kurtosis} = K_U \end{aligned}$$

이 값들은 식(2.6)의 2차 방정식의 해에 따라 다양하게 변할 수 있다.

$$c_1 + c_2x + c_3x^2 = 0 \quad (2.6)$$

식(2.6)의 해를 구하면 식(2.7)이 된다.

$$x = \frac{-c_2 \pm \sqrt{c_2^2 - 4c_1c_3}}{2c_1} \quad (2.7)$$

식(2.7)을 이용하여 분포의 형태를 정하기 위한 기준으로 다음의 K값을 설정한다.

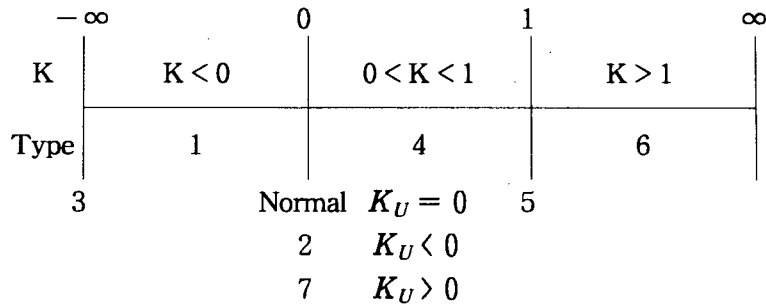
$$K = c_2^2 / 4c_1c_3$$

여기에 식(2.2)~식(2.5)를 대입하면 다음과 같이 된다.

$$K = \frac{\beta_1(\beta_2 + 3)^2}{4(2\beta_2 - 3\beta_1 - 6)(4\beta_2 - 3\beta_1)}$$

이것이 Pearson곡선의 형태를 결정하는 기준이 된다.

<Fig 1>은 K값에 해당하는 Pearson 곡선의 상이한 형태간의 관계를 보여준다.



<Fig. 1> Relationship between different type Pearson curve and their corresponding K-value

Pearson 곡선중 잘 알려진 곡선을 선정하여 나타내면 <Table 2>와 같다.

<Table 2.> Distribution Name and type of well known Pearson curve

Name	Type
Beta	1
Uniform	2 ( $K_U = -1.2$ )
Gamma, Chi-square	3
Normal	7 ( $c_2 = c_3 = 0$ )
$t$	7
Exponential	10

본 연구에서는 Gamma분포의 경우 일반적인 불량률을 추정하는 절차는 다음과 같다.

- (1) 표본으로부터  $\bar{X}$ ,  $s$ ,  $S_K$ ,  $K_U$ 의 통계량을 구한다.
- (2)  $S_K$ ,  $K_U$ 로부터 K값을 구하여 분포를 확인한다.
- (3)  $S_K$ ,  $K_U$ 의 통계량에 해당(또는 근접)하는 Pearson 곡선의 표준화된 분위수에 일치하는 값을 Gruska et al.(1989)의 표에서 구한다.
- (4) 규격을 벗어나는 불량률을 구한다.

## 2.2 Gamma 분포의 포아송근사

공정의 품질특성이 감마분포를 할 때, 그 확률밀도함수는 식(2.8)과 같다.

$$f(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, \quad x > 0 \quad (2.8)$$

여기서  $\alpha$ 는 형상모수이고,  $\beta$ 는 척도모수이다.

감마분포의 평균과 분산은 식(2.9)와 식(2.10)으로 나타낸다.

$$\mu = a\beta \quad (2.9)$$

$$\sigma^2 = a\beta^2 \quad (2.10)$$

그리고 감마분포의 왜도( $S_K$ )와 첨도( $K_U$ )는 식(2.11) 및 식(2.12)로 나타낸다.

$$S_K = 2/\sqrt{a} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} K_U &= 1.5(S_K)^2 + 3 \\ &= 6/a + 3 \end{aligned} \quad (2.12)$$

감마분포의 누적분포함수는 식(2.13)으로 나타낸다.

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^x (x^{\alpha-1}/\beta^\alpha) \exp(-x/\beta) dx \\ &= \Gamma(x/\beta, a) \quad , \quad x > 0 \\ &= 1 - P(a-1, x/\beta) \end{aligned} \quad (2.13)$$

$\beta$ 가 정수인 경우, 감마분포의 누적분포함수는 식(2.14)로 나타낼 수 있다.

$$F(x) = \Gamma(x/\beta, a) = 1 - P(a-1, x/\beta) \quad (2.14)$$

여기서,  $P(a-1, x/\beta)$ 는 평균  $x/\beta$ 인 포아송분포에 있어 발생하는 개수가  $a-1$  이하인 확률을 나타낸다.

### 2.3 Burr 분포

특성치 집합을 묘사하는 전통적인 접근은 밀도함수를 사용한다. 이 경우 특성치 비교를 위한 이론적 확률을 구하기 위해서 적분을 하여 적절한 분포함수를 구하는데 적분은 성가시고, 대부분의 밀도함수들을 구할 수 없는 현실적인 문제가 발생하게 된다. 그러나 누적분포함수가 직접 구해질 수가 있다면 불량률은 쉽게 추정할 수 있다. 이러한 접근은 Burr(1942)와 Hatke(1949)에 의해 식(2.15)와 같은 미분방정식을 고려함으로써 시도되었다.

$$\frac{dy}{dx} = y(1-y)g(x,y) \quad y = F(x) \quad (2.15)$$

여기서  $g(x,y)$ 는  $0 < y < 1$ 에 관해 양수이고  $F(x)$ 는  $F(-\infty) = 0$ ,  $F(\infty) = 1$ 인 비감소 함수이다.

식(2.15)는 (2.16)과 매우 유사하여  $g(x,y) = (a + bx + cx^2)^{-1}$  일 때, Pearson system의 밀도함수를 발생시킨다.

$$\frac{dy}{dx} = y(m-x)g(x,y) \quad (2.16)$$

$g(x,y) = g(x)$  일 때 식(2.15)의 해는

$$F(x) = \left[ 1 + \exp\left(-\int g(x) dx\right) \right]^{-1}$$

이다. Burr에 의해 상세하게 고려된 한가지 편리한 해는 식(2.17)과 같다. 이것이 Burr 누적 분포이다.

$$\begin{aligned} F(x) &= 1 - (1+x^c)^{-k} & x \geq 0 \\ &= 0 & x < 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

여기서  $C, K$ 는 Gruska et al.(1989)의 Burr 분포의 모수의 표에서 주어지는 실수인 값들이다.

확률밀도함수는 식(2.18)과 같다.

$$F'(x) = f(x) = \frac{KCx^{c-1}}{(1+x^c)^{k+1}} \quad (2.18)$$

식(2.18)의 함수는 일반적인 적률대신에 식(2.19)와 같은 누적적률을 사용한다.

$$M_j = \int_0^{\infty} x^j (1+x^c)^{-k} dx \quad j < CK-1 \quad (2.19)$$

주어진 데이터에 대해 Burr 분포를 적용하는 절차는 다음과 같다.

- (1) 표본으로부터  $\bar{X}, s, S_K, K_U$ 의 통계량을 구한다.
- (2) 구한  $S_K, K_U$  값에 해당(또는 근접)하는 Burr 분포의 모수의 표로부터  $C, K, \hat{\mu}, \hat{\sigma}$ 를 구한다.
- (3)  $P_r(x < \hat{x}_0)$ 를 계산하기 위해서 아래식을 이용해서  $x_0$ 를 구한다.

$$\frac{x_0 - \mu}{\sigma} = \frac{\hat{x}_0 - \bar{x}}{s}$$

또는

$$x_0 = \sigma(\hat{x}_0 - \bar{x})/s + \mu$$

이 때  $P_r(x < \hat{x}_0) = F(x_0; C, K)$

- (4)  $x_0$ 를 구한다음 확률  $P$ 를 계산한다.

$$P = F(x_0; C, K)$$

즉

$$x_0 = [(1-p)^{-1/k} - 1]^{1/c}$$

### 3. 비정규공정능력의 평가

본 연구에서 공정이 감마분포를 할 때 불량률의 척도로 공정능력을 평가하기 위해서 Montgomery et al. (1996-1997)의 <Table 3>을 인용해서 Pearson system, Gamma 분포의 포아송 근사 및 Burr 분포의 3가지 방법에 의해 불량률을 추정하기로 한다. <Table 3>은  $\alpha$ ,  $\beta$ 가 각각 0.5, 1 이고 평균과 분산이 각각 0.5인 감마분포를 하는 공정을 고려한다.

<Table 3.> Errors in  $C_{pk}$  when Process is Gamma distribution

	$C_{pk} = 0.67$ (Normal)	$C_{pk} = 1.00$ (Normal)	$C_{pk} = 1.33$ (Normal)	$C_{pk} = 1.67$ (Normal)	$C_{pk} = 2.00$ (Normal)
$\mu + K\sigma$	1.91	2.62	3.33	4.04	4.74
Predicted Defective(Right Tail)	50, 390 PPM	22,040 PPM	9,878 PPM	4,498 PPM	2,071 PPM
Predicted Defective (Normal)	22,750 PPM	1,350 PPM	32 PPM	0.29 PPM	0.001 PPM
Absolute Error	27,640 PPM	20,690 PPM	9,846 PPM	4,497 PPM	2,071 PPM
Relative Error	54.85 %	93.87 %	99.68 %	99.99 %	100 %
'Equivalent' $C_{pk}$	0.55	0.67	0.78	0.87	0.96

#### 3.1 Pearson system

Gamma 분포의 불량률을 추정하는 절차로부터

- (1) 표본통계량은  $\bar{x} = 1$ ,  $s = 0.71$ ,  $S_K = 2.83$ ,  $K_U = 15$  로 구해졌다.
- (2)  $S_K$ ,  $K_U$ 로부터 구한 K 값이  $K < 0$  이므로 Gamma 분포를 한다.
- (3) Grusk et al(1989)의 포에서  $S_K = 2.8$  과  $S_K = 2.9$  값으로부터  $S_K = 2.83$  의 값을 보간법으로 계산하여 Z 값을 구할 수 있다.
- (4)  $X = Z \cdot s + \bar{X}$ 로부터  $Z = 1.972$  일 때,  $X = 1.900$ ,  $Z = 3.922$  일 때,  $X = 3.285$ ,  $Z = 6.614$  일 때  $X = 5.196$  이다. 따라서  $\mu + K\sigma$ 를 벗어나는 불량률은  $C_{pk} = 0.67$  일 때 47,112 PPM,  $C_{pk} = 1.00$  일 때 29,206 PPM,  $C_{pk} = 1.33$  일 때, 9,796 PPM,  $C_{pk} = 1.67$  일 때 6,583 PPM,  $C_{pk} = 2.00$  일 때, 3,414 PPM 으로 나타났다.

#### 3.2 Gamma 분포의 포아송근사

감마 분포의 누적 분포함수인 식(2.13)에 의해 구해진 값은 <Table 4>에 주어져 있다. 그

런데  $\beta$ 가 정수인 경우, 감마분포의 누적분포함수는 식(2.14)로 나타내어 질 수 있기 때문에 식(2.14)를 이용한 감마분포의 근사값을 구한 결과와 누적분포함수로 구한 값을 비교해 본다. Montgomery et al. (1996-1997)는  $\alpha$ ,  $\beta$ , 평균, 분산이 각각 1인 감마분포에서 누적분포함수로 구한 불량률은 일 때,  $C_{pk} = 0.67$  일 때 49,787 PPM,  $C_{pk} = 1.00$  일 때 18,316 PPM,  $C_{pk} = 1.33$  일 때 6,700 PPM,  $C_{pk} = 1.67$  일 때, 2,500 PPM,  $C_{pk} = 2.00$  일 때, 900 PPM으로 나타나 매우 근사한 결과를 보여준다.

<Table 4.> Comparison between Poission approximation and Gamma distribution

	$C_{pk} = 0.67$	$C_{pk} = 1.00$	$C_{pk} = 1.33$	$C_{pk} = 1.67$	$C_{pk} = 2.00$
Gamma distribution	49,787 PPM	18,316 PPM	6,738 PPM	2,479 PPM	912 PPM
Poission distribution	49,800 PPM	18,300 PPM	6,700 PPM	2,500 PPM	900 PPM

### 3.3 Burr 분포

Burr 분포를 적용하는 절차로부터

- (1) 표본통계량은  $\bar{X} = 1$ ,  $s = 0.71$ ,  $S_K = 2.83$ ,  $K_U = 15$  이고
- (2) Gruska et al.(1989)의 Burr 분포의 모수의 표로부터 근접한  $S_K = 2$ ,  $K_U = 13$  값을 택한 결과  $C$ ,  $K$ ,  $\hat{\mu}$ ,  $\hat{\sigma}$ 는 다음과 같다.

$$C = 2.50080$$

$$K = 2.14834$$

$$\hat{\mu} = 0.76034$$

$$\hat{\sigma} = 0.44288$$

- (3)  $P(x < x_0)$ 를 계산하기 위해서

$$x_0 = \sigma(\hat{x}_0 - \bar{x})/s + \mu$$

로부터  $\hat{x}_0 = 1.91$  일 때,  $x_0 = 1.6399$ ,  $\hat{x}_0 = 2.62$  일 때,  $x_0 = 2.0827$ ,  $\hat{x}_0 = 3.33$  일 때,  $x_0 = 2.5256$ ,  $\hat{x}_0 = 4.04$  일 때,  $x_0 = 2.9685$ ,  $\hat{x}_0 = 4.74$  일 때,  $x_0 = 3.4051$  이 된다.

- (4)  $P = F(x_0; c, k)$ 로부터



$$\begin{aligned}
F(x) &= P(x \leq 1.91) \\
&= (1+x^c)^{-k} \\
&= 1 - (1+1.6399^{2.5008})^{-2.14834} \\
&= 0.040561 = 40,561 \text{ PPM}
\end{aligned}$$

같은 방법으로 적용하면  $C_{pk} = 1.00$  일 때 14,124 PPM,  $C_{pk} = 1.33$  일 때 5,631 PPM,  $C_{pk} = 1.67$  일 때 2,522 PPM,  $C_{pk} = 2.00$  일 때 1,255 PPM으로 불량률이 추정된다. 이상을 정리해서 나타내면 <Table 5>와 같다.

<Table 5.> Computation of Gamma , Pearson, Burr distribution(PPM)

	$C_{pk} = 0.67$	$C_{pk} = 1.00$	$C_{pk} = 1.33$	$C_{pk} = 1.67$	$C_{pk} = 2.00$
Gamma	50,390	22,040	9,878	4,498	2,071
Pearson	47,112	29,206	9,796	6,583	3,414
Burr	40,561	14,124	5,631	2,522	1,255

<Table 4>, <Table 5>에서 알 수 있듯이 공정이 감마분포에 따를 때, 불량률을 추정해 본 결과 포아송근사는 거의 차가 없음을 알 수 있고, Pearson system과 Burr 분포보다 조금 벗어남을 알 수 있었다. 그러므로 비정규공정에 대한 불량률의 척도에 의한 공정능력의 평가는 포아송근사가 가장 좋고, 그 다음으로 Pearson system에 의한 방법이 양호하다고 판단된다.

#### 4. 결론

본 연구에서 감마분포에 대한 공정능력의 평가를 Pearson system, 포아송 근사 및 Burr 분포의 3가지 분포를 사용하여 규격을 벗어나는 불량률을 추정함으로써 비정규 공정의 공정 능력에 대해 보다 구체적인 추가 정보를 제시할 수 있어 실무자로 하여금 공정의 개선을 유도하는 합리적인 의사결정을 내릴 수 있는 공정능력의 새로운 척도를 제시하였다.

감마분포를 하는 공정에 대한 불량률의 척도에 의한 공정능력의 평가는 감마분포의 포아송근사가 가장 좋고, 그 다음 Pearson system에 의한 방법이 양호하다고 판단된다. 적절한  $S_K$ 와  $K_U$  값을 취할 수 있다면 Burr 분포에 의한 방법이 용이하면서도 계산의 정확도를 높일 수 있어 보다 신뢰할 수 있는 방법이 될 것이다.

향후 실제 공정에서 나타날 수 있는 다양한 비정규분포의 경우에도 불량률의 척도로 나타낼 수 있도록 이에 따른 추가연구가 행해져야 되며, 불량률의 추정에 새로운 접근법도 제시하여 비정규공정의 공정능력의 평가를 불량률의 척도로 정착될 수 있도록 개선시켜 나가야 할 것이다.

## 참고문헌

- [1] Benson, E. D., "Statistical Properties of a System of Fourth - Generation Process Capability Indices  $C_{psk}(U, V, W)$ ", Ph. D. Dissertation, University of Maryland, 1994.
- [2] Burr, I. W., "Cumulative Frequency Functions", Ann.Math.Stat, 13, 1942, 215-232.
- [3] Chan, L. K., Cheng, S. W., Spiring, F. A. [CCS]., "A New Measure of Process Capability:  $C_{pm}$ ", Journal of Quality Technology. 1988(a), 20(3), 162-173.
- [4] Choi, B. C., Owen, D. B., "A Study of A New Process Capability Index", Communications in Statistics - Theory and Methods, 1990, 19(4), 1231-1245.
- [5] Clements, J. A., "Process Capability Calculations for Non-Normal Distributions", Quality Progress, 1989, 22(9), 95-100.
- [6] Farnum, N. R., "Using Johnson Curves to Describe Non-Normal Process Data", Quality Engineering, 1996-1997, 9(2), 329-336.
- [7] Gruska, G. F., Lamberson, L. R., and Mirkhani, K., "Non-Normal Data Analysis", Multiface Publishing Co., Michigan, 1989.
- [8] Hahn, G. J., and Shapiro, S. S., "Statistical Models in Engineering", John Wiley and Sons, Inc., New York, 1967, 207.
- [9] Hatke, Siste M.A., "A Certain Cumulative Probability Function", Ann. Math. Stat, 20, 1949, 461-463
- [10] Johnson, N., "Systems of Frequency Curves Generated by Translation", Biometrika, 1949, 36, 149 - 176.
- [11] Kane, V. E., "Process capability indices", Journal of Quality Technology, 1986, 18(1), 41-52.
- [12] Lovelace, C. R., " The Development of a Process Capability Index for Non-Normal Processes Naturally Bound at Zero." Ph. D. Dissertation. University of Alabama in Huntsville, 1994,
- [13] McCoy, P. F., "Using Performance Indexes to Monitor Production Processes", Quality Progress, 1991, 24(2), 49-55.
- [14] Montgomery, D. C., and Someville, S. E., "Process Capability Indices and Non-Normal Distributions", Quality Engineering, 1996-1997, 9(2), pp. 305-316,
- [15] Pearn, W. L., Kotz, S., Johnson, N. L., "Distributional and Inferential Properties of Process Capability Indices", Journal of Quality Technology. 1992, 24(4), 216-231.
- [16] Pearn, W. L., and Kotz, S., "Application of clement's Method for Calculationg Second - and -Third-Generation Process Capability Indices Non-Normal Pearsonian Population" Quality Engineering, 1994~5, 7(1), 139-145,
- [17] Slifker, J. F., Shapiro, S. S., "The Johnson System: Selection and Parameter Estimation", Technometrics, 1980, 22(2), 239-246.
- [18] Wright, P. A., "A Process Capability Index Sensitive to Skewness", Journal of Statistical Computation & Simulation, 1995, 52, 195-203.