

## 에너지 최소화를 위한 열차 최적운전제어 기법

한 성호, 안 태기, 김 원경, 조 연옥  
한국철도기술연구원 도시철도표준화사업단

### A technique of Optimal train driving control to minimize energy consumption

Seong-ho Han, Tae-ki Ahn, Weon-kyong Kim, Yun-ok Cho  
Korea Railway Research Institute Urban Transit Standardization Division

**Abstract** - This paper shows the form of the optimal solution and how to minimize energy of train driving control. In this paper we consider the case where a train is to be driven by manual operation mode along a straight level track, and with speed limits. Using the constrained optimal technique(Lagrange Function & Kuhn-Tucker equations), we constructed optimal train driving strategy.

#### 1. 서 론

열차운전제어 기술은 역간 운전시격(headway)의 단축화, 승객 승차감(riding comfort)의 개선, 에너지소비(energy consumption)의 최소화 등을 목적으로 다양한 선로조건, 차량조건, 운전조건 등을 전체적으로 고려한다. 선로조건으로는 역간 거리, 선로구배(gradient), 곡선반경(curve), 정차역 위치, 정차시간 등이 있으며 차량조건으로는 주행저항, 건인력 및 제동성능, 편성제한 등이 고려되고 운전조건으로는 완전운전(all-out) 또는 타행운전(coasting), 선로 제한속도 등이 있다. 이 기술은 디젤기관차를 비롯한 모든 차량시스템에 적용되며 전동차시스템의 경우 종합제어장치(TCMS : train control and monitoring system)와 신호보안장치(ATC: automatic train control, ATO: automatic train operation)등과 직접적으로 연관되어진다.

최적운전제어는 열차운행에 따른 에너지소비의 최소화를 목적으로 하여 주어진 다양한 조건들을 만족하면서 운전자 또는 ATO가 가·감속제어(tractive·braking acceleration control)를 효율적으로 처리할 수 있도록 해준다. 이 분야는 80년대 초부터 South Australian의 TCG그룹 (transport control group)에서 활발하게 연구해오고 있으며 최근에는 이론의 정립 뿐만 아니라 운행모니터장치인 Metromiser를 개발하여 그들의 이론을 실용화하였다. 이 그룹은 주로 디젤열차를 대상으로 한 수동운전을 고려하였으나 현재 전동차시스템의 기술추이는 국내·외적으로 자동/무인운전을 요구하고 있다.

본 논문은 이 그룹의 P. G Howlett와 P. J Pudney[1]가 제시한 최적화모델을 전동차 시스템에 적용함으로써 이론의 검증 및 응용가능성을 기초단계에서 간단하게 평가하였다. 따라서 시스템 사양으로는 국내 운영중인 차량조건을 적용하였으며 운전조건으로는 타행운전모드와 수동운전을 고려하고 선로조건으로는 구배와 곡선저항을 제외한 제한속도만을 고려한 간이모델을 적용하였다.

#### 2. 최적 열차운전제어 기법

##### 2.1 문제의 정의

일반적으로 열차에 공급되는 에너지는 디젤과 같이 연료를 연소하여 생성하는 방법과 가선으로부터 전력을 공급받는 전기적 에너지가 있다. 이 에너지는 추진시스템

을 통해 열차를 움직이게 하는 기계적 에너지로 전환되는데 이때 열차의 마찰저항인 주행저항, 구배저항, 곡선저항과 제동 손실 등으로 일부가 소모된다. 그림 1은 열차의 에너지 흐름을 일반적으로 나타낸 것으로 열차 주행에 따른 에너지 손실과 운동에너지 또는 위치에너지로의 전환관계를 표현하였다.

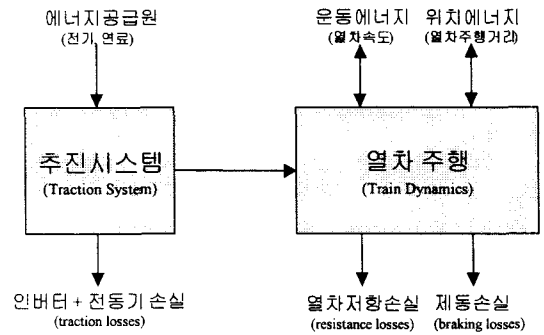


그림 1. 열차에 관한 일반적인 에너지 흐름도

열차 에너지 소비의 최소화는 제약조건을 갖는 최적화 문제로(constrained optimization) 해석할 수 있으며 에너지 비용함수는 제어함수에 의해 주어진 제약조건을 만족하면서 최적해에 도달하게 된다. 물리적 법칙에 의해 정의되는 열차의 운동방정식은 동등제약조건이 되며 주어진 운행시간 안에 주행거리를 운행하는 것은 부등제약조건으로 해석된다.

##### 2.2 열차운행모드에 대한 모델

열차의 운행모드는 추진을 위해 가속제어를 하는 역행모드(traction)와 제동에 따라 감속제어를 하는 제동모드, 에너지에 관계없이 관성을 이용하여 트랙상태와 진행속도에 따라 운행하는 타행모드로 나누어진다. 역행모드와 제동모드의 경우는 식(1)과 같이 가속과 감속의 정도를 단계별로 나누어진다.

$$c \in C = \{-B, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, T\} \quad (1)$$

여기서,  $T$ 는 역행모드에서의 최대 건인력을 낼 수 있는 단계를 나타내는 설정치이며  $B$ 는 제동모드에 대한 최대 제동력에 대한 단계별 설정치,  $c=0$ 은 타행모드를 의미한다.

열차의 가속력은 속도가  $v$ 일 때 현재 운행모드의 단계 설정치  $c$ 에 대한 열차가 낼 수 있는 건인 또는 제동 가속력에서 열차저항 가속력과 구배 가속력을 뺀 것으로 다음 식(2)과 같이 정의한다.

$$\dot{v}(t) = u_c[v(t)] - r[v(t)] + G[x(t)] \quad (2)$$

여기서,  $v$ 는 열차의 속도,  $x$ 는 주행거리,  $u_c[v(t)]$ 는 속도  $v$ 에서 운행모드 단계 설정치가  $c$ 일 때의 견인 또는 제동 가속력을 나타내며  $r[v(t)]$ 는 속도  $v$ 에서 열차저항 가속력,  $G[x(t)]$ 는 선로의 구배에 따른 가속력을 의미한다.

열차가  $x_0=0$ 지점에서 출발하여  $x_n=X$ 지점까지 운행할 경우 운행모드에 대하여 전체  $n$ 번의 가속력 변화를 갖는다면 전체운행거리는  $n$ 구간으로 분할되며 각 변화지점간의 상호관계는 식(3)과 같이 나타낼 수 있다.

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = X \quad (3)$$

임의의 구간 ( $x_{k+1}, x_k$ )의 거리 차는  $\Delta x_{k+1} = x_{k+1} - x_k$ 가 되며 이 때 운행시간은  $t_{k+1}$ 로 정의한다.

또한, 전체 운행거리가  $m$ 개의 제한속도 구간을 갖는다면 각 제한속도 변환지점들에 대한 관계는 식(4)과 같다.

$$0 = X_0 < X_1 < \dots < X_m = X \quad (4)$$

식(4)에서 임의의 구간 ( $X_i, X_{i+1}$ )에 적용되는 제한속도는  $M_{i+1}$ 로 정의한다.

### 2.3 제약조건을 갖는 최적 운전제어 모델

P. G. Howlett와 P. J. Pudney[1]은 열차운전에 소모되는 에너지함수를 운행모드 단계 설정치가  $c$ 인 구간에 대해 운행소요시간( $t$ )과 에너지비용계수( $C_c$ )로 식(5)과 같이 정의하였다. 에너지비용계수는 타행모드에서 역행모드로 전환하는 경우에만 에너지소비가 발생한다고 가정하여 타행과 제동모드 구간에서는 무시하였다. 따라서 타행-역행 변환 쌍의 개수와 이들 구간의 위치와 운행소요시간이 에너지함수 값을 결정하는 주요 요소이다.

$$J(\Delta x) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{c(k+1)} t_{k+1} \quad (5)$$

동등제약조건으로는 식(6)과 같이 각 구간의 거리의 합과 전체운행거리가 같아야하며 부등제약조건은 각 구간의 운행소요시간의 합이 요구되는 전체열차운행시간을 초과하지 않도록 식(7)을 만족해야 한다. 또한  $x_{k+1}$ 지점에서의 열차속도를  $V_{k+1}$ 이라 할 때 선로에 주어진 각 제한속도구간에서의 열차속도는 식(8)과 같이 제한속도 한계를 초과할 수 없다. 부가적으로 식(9)은 임의의 구간 ( $X_i, X_{i+1}$ )에 대하여  $X_i$ 지점에서의 속도  $U_i$ 가 제한속도를 초과하지 않도록 하는 제약조건이다.

$$X = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k \quad (6)$$

$$T \leq \sum_{k=0}^{n-1} t_{k+1} \quad (7)$$

$$V_{k+1} \leq M_i \quad (8)$$

$$U_i \leq N_i = \min\{M_i, M_{i+1}\} \quad (9)$$

여기서,  $k=0, 1, \dots, n-2, n-1$   $i=1, 2, \dots, m-2, m-1$

위에서 정의한 최적 운전제어모델의 에너지함수와 제약 조건식을 이용하여 Lagrangean 함수로 정의하고 Kuhn-Tucker조건을 적용하면 Lagrangean 다항자인  $\lambda$ 와  $\mu$ 에 관한 선형 1차 연립방정식으로 간단히 표현할 수 있다. 다음 식은 제한속도  $M_i$ 를 갖는 구간에 대한 경우로서 식(10)은 타행과 역행모드에 대한 산출식이며 식(11)은 제동모드일 경우에 얻을 수 있다.

$$\lambda_i V_k - \mu = F(V_k) \quad (10)$$

$$\lambda_i V_k - \mu = 0 \quad (11)$$

$$\text{여기서, } F(v) = \frac{r(v)}{u_c(v)}$$

$\mu$ 는 전체 운행시간을 만족하는 다항자이며  $\lambda_i$ 는 운행거리에 대한 제약조건을 만족하도록 설정된다. 결과적으로 식(10)은 최적운전제어를 결정하기 위한 에너지 밀도함수  $E_\mu$ 로 다시 식(12)과 같이 정의할 수 있다.

$$E_\mu(V_k) = \lambda_i \quad (12)$$

$$\text{여기서, } E_\mu(v) = \frac{\mu + F(v)}{v}$$

일반적으로 열차주행 저항식  $r(v)$ 는 열차속도에 관한 2차 방정식이므로 식(10)으로부터  $0 \leq V^{(i)} \leq W^{(i)}$ 에 대한 두 개의 근  $V_k = V^{(i)}$ 와  $W^{(i)}$ 을 갖게 되며, 식(11)으로부터 한 개의 근  $V_k = U^{(i)}$ 을 얻을 수 있다. 이들은 열차가 제한속도 내에서 일정속도를 유지하도록 결정해 주는 임계속도(critical speed)가 되며 운행모드조건에 따라 적용된다. 특히  $\lambda_i > \lambda_{i+1}$ 일 경우 이들의 상호관계식은 식(13)과 같다.

$$0 \leq U^{(i+1)} < U^{(i)} \leq V^{(i)} < V^{(i+1)} \leq W^{(i+1)} < W^{(i)} \quad (13)$$

### 2.4 최적해 산출절차 및 순서도

두 개의 제한속도를 갖는 구간에 대해 최적해를 찾는 일반적인 절차에 대해 간단하게 설명한다. 그림 2는 최적해의 형태를 보여주는 것으로 Lagrangean 다항자인  $\lambda$ 와  $\mu$ 에 따른 곡선  $y = \frac{\mu}{v}$ 와  $y = E_\mu(v)$ 로부터 임계속도를 결정하는 것을 보여주며 임계속도가 열차운전제어에 어떻게 연관되어지는가를 나타낸 것이다.

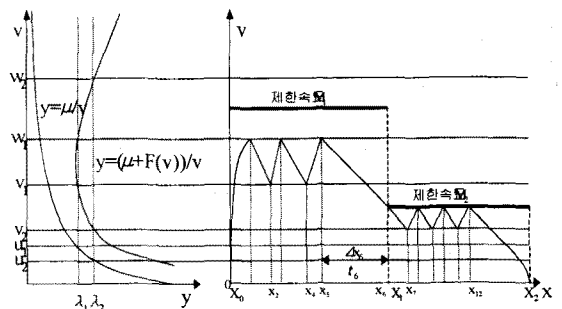


그림 2. 임계속도와 제한속도에 의한 열차속도곡선

먼저, 운행시간의 제약조건에 관한  $\mu$ 의 추정 값을 설정한다. 이는 열차가 평탄선로에서 주어진 일정속도를 유지하도록  $E_{\mu}'(w_{\mu}) = \emptyset$  만족하는 지정속도(holding speed)  $w_{\mu}$ 를 결정해 준다. 다음으로 주어진 제한속도 정보를 이용하여 구간을 분리하는데 그림 2는 두 개의 구간으로 분리되며  $\lambda_1$ 과  $\lambda_2$ 를 계산하게 된다. 첫 번째 구간에서는 제한속도가 임계속도 보다 큰 반면 두 번째는 임계속도 보다 작다. 따라서  $X_1$ 지점에서의 열차속도는 두 번째 운행구간의 제한속도에 의하여 제약을 받게 된다.

첫 번째 구간에 대한 열차운전계획은 역행→타행→역행→타행→역행모드의 순으로 미리 구성하고 이에 대한 임계속도  $U^1, V^1, W^1$ 를 구하고 이들에게서 결정된 계산된 주행거리가 주어진 전체 거리 조건을 만족하도록  $\lambda_1$ 을 설정하며 운행시간을 계산한다. 마찬가지로 두 번째 구간은 타행→역행→타행→역행→타행→역행→제동모드의 순으로 구성되며  $U^2, V^2, W^2$ 가 정확한 주행거리를 제공하도록  $\lambda_2$ 를 설정하고 이에 대한 운행시간을 계산한다. 마지막으로 계산된 전체 운행시간이 주어진 요구시간보다 너무 클 경우  $\mu$  값을 줄이고 다시 계산을 실시하며 작은 경우는  $\mu$  값을 크게 하고 다시 계산을 되풀이한다. 이러한 계산절차를 그림 3에 순서도로 나타내었다.

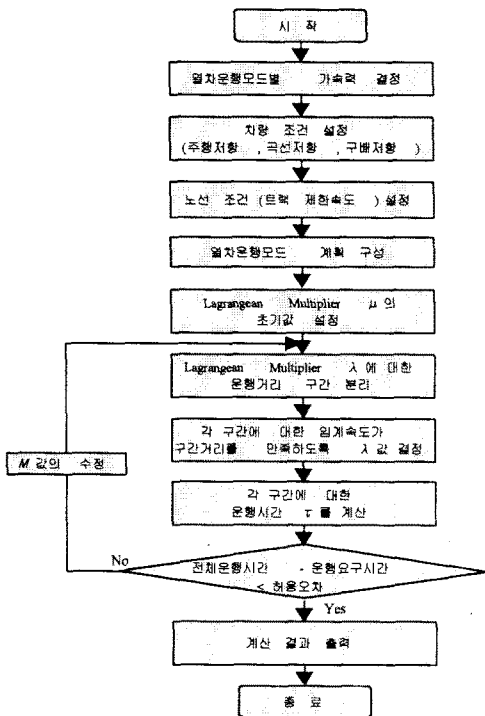


그림 3. 최적운전제어를 위한 순서도

## 2.5 시뮬레이션 결과

사례연구로서 국내 전동차의 임의의 노선에 대하여 A역과 B역사이의 임의 구간을 선정하여 최적열차운전 제어 계획을 구성하였다. 역간 노선 거리는 920m이며 역간 운행 소요시간은 65초이다. 이 구간에서의 선로의 제한속도는 식(14)과 같이 4구간으로 구성되어 있으며 선로의 구배와 곡선저항은 고려하지 않았다. 또한 에너지 비용은 역행모드일 경우에만 고려하여 에너지비용계수  $C_{역행}=1$ 로 가정하였다.

$$M(x) = \begin{cases} 65 & x < 82.0 \\ 80 & 82.0 \leq x < 579.5 \\ 70 & 579.5 \leq x < 799.8 \\ 65 & 799.8 \leq x < 920 \end{cases} \quad (14)$$

열차의 주행 저항식은 식(15)으로 정의하였으며 열차운행모드는 크게 3단계 즉, 완전역행, 타행, 완전제동만을 한정하였으며 이에 따른 열차 가속력은 식(16)과 같이 정의하였다.

$$\gamma(V) = 1.867 + 0.0359V + 0.000745V^2 \quad (15)$$

$$u_c(v) = \begin{cases} \frac{1.5}{V} & c = \text{역행} \\ 0 & c = \text{타행} \\ -1 & c = \text{제동} \end{cases} \quad (16)$$

시뮬레이션은 MATLAB Version5를 이용하였으며 최종 최적화를 수행한 후 얻은  $\mu$ 와  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  값과 이들을 이용하여 각 구간별로 계산된 임계속도를 그림 4에 나타내었다.

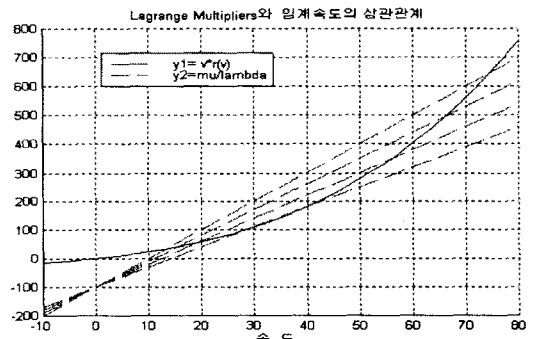


그림 4. 각 구간별 임계속도 계산결과

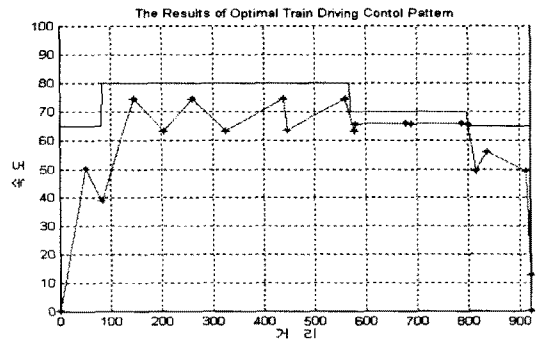


그림 5. 최적운전제어 속도곡선 결과

그림 5는 임계속도와 제한속도를 토대로 각 노선의 운전제어 변환점을 산출하고 이를 거리에 대한 속도곡선으로 나타낸 것이다.

## 5. 결 론

본 연구는 전동차의 최적자동운전제어를 기초연구로서 에너지최소화를 목적으로 하는 최적화 모델의 이론정립과 검증을 실시하였다. 향후 최적화를 위한 차량과 노선의 다양한 조건을 충분히 고려할 수 있는 모델로 확장가능하며 TPS와 연계를 위한 연구가 필요하다.

### [참고 문헌]

- [1] Peter Pudney and Phil Howlett, "Optimal Driving Strategies for a Train Journey with Speed Limits", J. Austral. Math. Soc. Ser. B36, pp38-39, 1994
- [2] P.G.Howlett and P.J.Pudney, "Energy-Efficient Train Control", Springer, pp215-228, 1995