

고차민감도를 이용한 전기기기 형상 최적화

안 영우\*, 곽 인구\*, 한 송엽\*, 박 일한\*\*\*

\* :서울대학교 전기공학부 \*\* :성균관대학교 전기전자및컴퓨터공학부

Shape Optimization of Electromagnetic Devices using High Order Derivativ

Young-woo Ahn, In-gu Kwak, Song-yop Hahn, Il-han Park

\* :Seoul Nat'l University \*\* :Sungkyunkwan University

**Abstract** - This paper describes a new method for the faster shape optimization of the electromagnetic devices. In a conventional iterative method of shape design optimization using design sensitivity based on a finite element method, meshes for a new shape of the model are generated and a discretized system equation is solved using the meshes in each iteration. They cause much design time. To save this time, a polynomial approximation of the finite element solution with respect to the geometric design parameters using Taylor expansion is constructed. This approximate state variable expressed explicitly in terms of design parameters is employed in a gradient-based optimization method. The proposed method is applied to the shape design of quadrupole magnet

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \tag{1}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \tag{2}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \tag{3}$$

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \vec{A}) = \vec{J} \tag{4}$$

$$-\nabla(\nu \nabla \cdot \vec{A}) = \vec{J} \tag{5}$$

여기서  $H$ 는 자계의 세기,  $B$ 는 자속밀도,  $J$ 는 전류밀도,  $A$ 는 벡터자기포텐셜,  $\mu$ 는 투자율,  $\nu$ 는 자기저항이다.

식 (5)로부터 유한요소법과 Galerkin 법을 이용하면 행렬 방정식으로 근사해를 구할 수 있다.

$$[K][X] = [J] \tag{6}$$

행렬  $[K]$ 와  $[J]$ 는 요소별로 요소형상함수를 이용해서 구한 값들을 조립한다. 정리하면 아래와 같다.

$$[K] = \sum_{n=1}^{n_e} \sum_i \int \int \int \mu \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] dx dy \tag{7}$$

$$[J] = \sum_{n=1}^{n_e} \sum_i \int \int \int J \cdot N_i dx dy \tag{8}$$

여기서  $n_e$ 는 요소의 총 개수이고  $N_i, N_j$ 는 요소형상함수이다.

2.2 기존 민감도법

먼저 목적함수를 정의한다.

$$F = F(p, X(p)) \tag{9}$$

여기서  $p$ 는 설계변수 벡터이고  $X(p)$ 는 상태변수 벡터이다.

민감도는 설계변수의 변화에 대한 목적함수의 변화로 정의하였기 때문에 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{dF}{d[p]} = \frac{\partial F}{\partial [p]} + \frac{\partial F}{\partial [X]} \frac{d[X]}{d[p]} \tag{10}$$

식 (6)을  $[p]$ 로 미분하면,

$$\frac{d[X]}{d[p]} = [K]^{-1} \frac{\partial}{\partial [p]} \{ [J] - [K][\bar{X}] \} \tag{11}$$

이고, 여기서  $[\bar{X}]$ 는 식 (6)의 해이다.

식 (11)을 식 (10)에 대입하여 정리하면, 민감도식은 아래와 같이 정리된다.

$$\frac{dF}{d[p]} = \frac{\partial F}{\partial [p]} + \frac{\partial F}{\partial [X]} [K]^{-1} \frac{\partial}{\partial [p]} \{ [J] - [K][\bar{X}] \} \tag{12}$$

여기서 보조 상태변수 벡터  $[s]$ 를 아래와 같이 정의해서 행렬방정식을 계산한다.

1. 서 론

전기기기의 설계에 있어, 설계 민감도법[1]이 널리 사용되고 있다[2][3]. 설계 민감도라는 것은 설계변수의 변화에 대한 목적함수의 변화량을 말하고, 일반적으로 목적함수는 주어진 설계변수들과 그 변수들에 의해 계산되어지는 상태변수들의 함수로서, 설계 목적을 정량적으로 나타낸다. 기존의 설계 민감도법은 최적점을 찾기까지 연속적인 재해석을 필요로 하고, 그것은 많은 시간을 요하게 된다. 특히, 설계변수가 형상의 위치에 관련된 변수일 경우에 매 해석시 새로운 요소분할을 하기 때문에 시간 손실은 더욱 커지게 된다.

최근 고차 미분항을 이용하여 유한 요소법의 해를 근사화하는 방법이 소개되었다. 이 방법은 설계변수들에 대한 양함수의 형태로 해가 표현되기 때문에 매번 유한 요소 해석을 하는 기존의 민감도법보다 시간적으로 많은 이득을 볼 수 있다. 또한 이 방법은 최대경사법이나 Newton-Raphson법과 같은 결정론적인 방법이나 진화 알고리즘, 유전자 알고리즘과 같은 비결정론적인 방법 모두에 적용할 수 있는 장점도 가지고 있다.

본 논문에서는 제시된 방법을 전기기기의 형상 최적 설계에 적용했다. 물질 설계변수의 경우와 달리 형상 설계변수의 경우에는 인접한 두 설계변수간의 교차된 고차항이 존재하게 되므로 다소 복잡한 형태를 보이게 된다. 고차 미분항들은 최적화의 결정론적 방법 중 하나인 최대경사법에 이용했고 이 방법을 적용한 결과를 기존의 민감도를 이용한 최대경사법에 의한 결과와 비교했다.

2. 민감도 해석을 이용한 형상 최적화

2.1 정자장 문제의 유한요소 해석

2차원 정자장 문제는 맥스웰 방정식에 의해 다음과 같이 정리될 수 있다.

$$[\lambda]^T = \frac{\partial F}{\partial [X]} [K]^{-1} \quad (13)$$

$$[K]^T [\lambda] = \frac{\partial F}{\partial [X]^T} \quad (14)$$

$$\frac{dF}{d[p]} = \frac{\partial F}{\partial [p]} + [\lambda]^T \frac{\partial}{\partial [p]} \{ [f] - [K][\bar{X}] \} \quad (15)$$

위의 과정을 통해 얻은 각 변수에 대한 민감도를 이용, 형상 설계변수들 각각의 최적점을 찾기 위해 최대경사법을 적용한다.

### 2.3 고차 민감도법

이 방법에서는 먼저 고차미분항들이 계산되어야 한다.

그리고, 매번 유한요소법에 의해 계산되는 정확한 해의 값 대신 테일러 전개에 의해 얻어진 근사값들을 식(10)에 넣어 계산한다.

즉, 민감도는 아래식과 같이 근사적으로 계산된다.

$$\frac{dF}{d[p]} \approx \frac{\partial F}{\partial [X]} \frac{d[\bar{X}]}{d[p]} \quad (16)$$

여기서  $[\bar{X}]$ 는  $p_0 + \delta p$ 에서의 근사해이다.

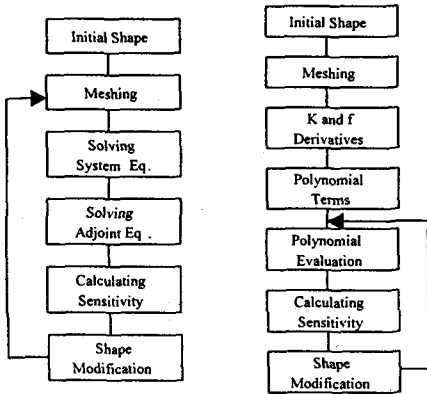
$$[\bar{X}] = [X_0] + [\delta p] \frac{\partial [X]}{\partial [p]} + \frac{1}{2!} [\delta p][\delta p] \frac{\partial^2 [X]}{\partial [p] \partial [p]} + \dots \quad (17)$$

$$\frac{d[\bar{X}]}{d[p]} = \frac{\partial [X]}{\partial [p]} + \frac{\partial [\delta p]}{\partial [p]} \quad (18)$$

기존 방법과 같이 최적점들은 식 (16)-(18)에서 얻어진 민감도값을 최대경사법에 이용해서 구할 수 있다.

### 2.4 두 방법의 비교

그림 1(b)에서 제안된 방법은 매번 새로운 요소분할을 하지 않음을 알 수 있다. 요소분할은 형상최적화 과정에서 상당히 많은 시간을 차지하기 때문에 제안된 방법을 통해 시간 손실을 줄일 수 있다. 그리고, 이 방법은 상태변수값이나 보조변수값을 얻기 위해 행렬 방정식을 풀 필요가 없기 때문에 시간 손실을 줄이는 데 도움이 된다.



a) 기존 민감도법 b) 고차 민감도법  
그림 1. 두 방법의 흐름도 비교

## 3. 고차미분항 계산식

### 3.1 단일 변수에 대한 고차미분항 계산

식 (6)로부터 상태변수 벡터의 미분항들을 구하기 위한 식들을 유도할 수 있다.

$$K \frac{\partial X}{\partial p} = \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial K}{\partial p} X \quad (19)$$

반복적인 작업에 의해 설계변수들에 대한 임의의 고차 미분항들은 다음과 같이 계산된다.

$$K \frac{\partial^m X}{\partial p^m} = \frac{\partial^m f}{\partial p^m} - \sum_{i=1}^m C_m^i \frac{\partial^i K}{\partial p^i} \frac{\partial^{m-i} X}{\partial p^{m-i}} \quad (20)$$

여기서  $C_m^i = \frac{m!}{i!(m-i)!}$ ,  $C_m^0 = C_m^m = 1$ 이다.

### 3.2 다중 변수에 대한 고차미분항 계산

이 경우에 상태변수의 미분항들을 계산하기 위해 K와 f의 설계변수들에 대한 고차 미분항들을 계산해야 한다.

인접하지 않은 설계변수들에 대해서는 고차 미분항은 값이 0이 되기 때문에, 오직 인접한 독립적인 두 설계변수들에 대한 고차미분항을 계산한다. 그 식은 아래와 같다.

$$K \frac{\partial^{m+n} X}{\partial p^m \partial q^n} = \frac{\partial^{m+n} f}{\partial p^m \partial q^n} - \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n C_m^i C_n^j \frac{\partial^{i+j} K}{\partial p^i \partial q^j} \frac{\partial^{m-i+n-j} X}{\partial p^{m-i} \partial q^{n-j}} \quad (21)$$

### 3.3 설계변수의 임의 범위점에서의 상태변수 계산

3.1과 3.2에서 제시된 단일 변수와 다중변수에 대한 미분항식을 적용해 얻은 여러 미분항에 의해 상태변수의 식은 다음과 같이 표현된다.

$$X(p_0 + \delta p, q_0 + \delta q) = \sum_{i=0}^{N_i} \sum_{j=0}^{N_j} \frac{\delta p^i}{i!} \frac{\delta q^j}{j!} \frac{\partial^{i+j} X}{\partial p^i \partial q^j} (p_0, q_0) \quad (22)$$

## 4. Quadrupole의 형상 설계

제시된 방법을 quadrupole에 적용하였다. 설계 목적 x축 위를 따라가면서 나타나는 자속밀도의 y성분이 중심으로부터 점 S까지 선형으로 증가하도록 하는 것이다.

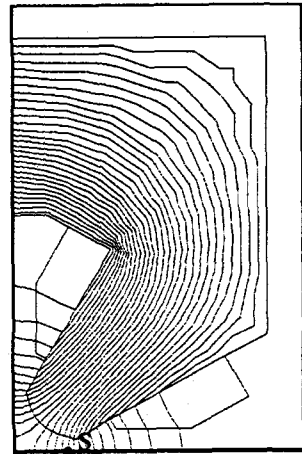


그림 2. 설계 모델의 초기 형상

목적함수는 다음과 같이 현 형상에 의해 계산되는 해의 값과 얻고자 하는 값의 차이의 합으로 표현된다.

$$F = \sum_{i=1}^{N_i} \frac{1}{2} (B_{yi} - B_{yi,0})^2 \quad (23)$$

여기서,  $N_i$ 는 자속밀도의 값을 측정하는 x축 위의 점들의 총 개수이고  $B_{yi}$ 와  $B_{yi,0}$ 는 각각, quadrupole의 현상이 만들어 내는 자속밀도의 x축위의 i번째 점에서의 y 성분값과, 우리가 얻고자 하는 자속밀도의 값이다.

식 (23)으로부터 민감도식은 아래와 같이 계산된다.

$$\frac{dF}{d[p]} = \frac{\partial F}{\partial [p]} + \frac{\partial F}{\partial [X]} \frac{d[X]}{d[p]} \quad (24)$$

$$\frac{\partial F}{\partial [X]} \approx \frac{\partial F}{\partial [\bar{X}]} = \frac{\partial F}{\partial [\bar{B}]} \frac{\partial [\bar{B}]}{\partial [\bar{X}]} \quad (25)$$

$$\frac{d[X]}{d[p]} \approx \frac{d[\bar{X}]}{d[p]} \quad (26)$$

제시된 방법의 적용, 특히 형상 최적화의 적용에 있어서 고려되어야 할 점이 있다. 이 방법에 따르면 일정한 차수를 갖는 테일러 급수 전개에 의해 해가 근사화되었고, 근사화된 해에 의해 민감도가 계산되었으므로, 최적화를 위한 반복이 계속됨에 따라 각각의 설계 변수에 대한 변화량 ( $\Delta p_i$ )이 커지면 테일러 급수 전개에 의한 근사해에 포함된 오차는 점점 커지게 된다. 그러므로, 일정한 단계에서, 정확한 민감도를 구하기 위해 새로운 요소 분할과 유한요소 해석이 필요하게 된다. 이번 적용에서는 3차 테일러 급수 전개로 근사해를 구했고, 새로운 요소분할과 유한요소 해석을 매 10회 반복마다 시행했다.

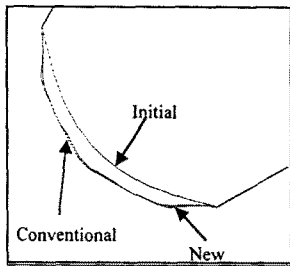


그림 3. 최종 형상 비교

그림 3은 제시된 방법으로 25번 반복 후 변화된 형상과 기존 민감도법에 의해 같은 회수 반복 후 변화된 형상을 보인다.

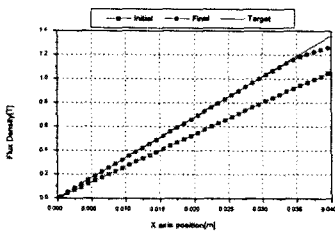


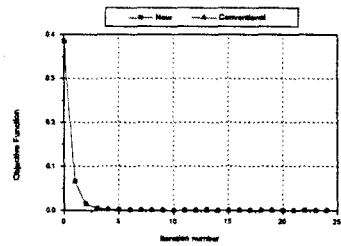
그림 4. 자속 밀도 분포

그림 4는 x축 위의 자속밀도의 y성분의 초기 분포와 최적화 작업 후의 분포를 나타냈다. 그림 5는 목적함수의 수렴 양상을 기존 민감도법에 의한 것과 제시된 고차 민감도법에 의한 결과를 같이 나타내었다. 그림 5(b)의 불연속점은 새로운 요소분할과 새로운 초기 설계변수값 설정에 따른 것이다.

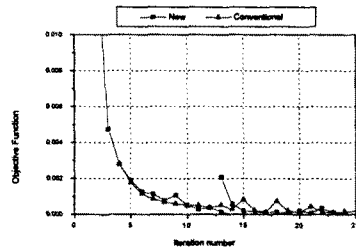
그림 3-5에서 볼 수 있는 바와 같이 제안된 방법은 기존 민감도법과 거의 일치하는 결과를 보인다.

제안된 방법의 시간 손실은 예상되었던 것처럼 기존의 방법에 의한 것보다 약 60% 정도 상당히 작다. 그리고 두 목적함수의 최종값은 초기 함수값에 비해 0.022% 정도밖에 차이가 나지 않았다 (기존방법: 0.044%, 제안방법: 0.022%). 이번 적용에서는 요소의 수는 1732개

비교적 적은 편이다. 만약, 요소가 더 많은 수로 분할되



(a) the full range of the functi



(b) the magnified range of functi

그림 5. 목적 함수 수렴 양상

어 요소수가 증가하면, 요소 분할에 필요한 시간은 그만큼 더 요구되기 때문에 시간 손실 면에서 제안된 방법은 기존 방법에 비해 훨씬 효율적이라 할 수 있겠다.

## 5. 결 론

본 논문에서는 테일러 급수 전개와 고차 미분항을 이용한 설계 민감도의 빠른 계산 방법을 제시하였다. 이 방법을 최대경사법과 함께 quadrupole 형상 최적 설계에 적용하였고, 제안된 방법은 기존 민감도법과 거의 같은 결과를 보였다. 기존의 민감도법과 비교할 때, 제안된 방법은 형상 설계에서 충분히 정확한 결과를 주고 상당히 적은 시간을 요구하기 때문에 전기기기의 형상 설계의 좋은 방법이 될 수 있으리라 본다.

## [참 고 문 헌]

- [1] E.J. Haug, K.K.Choi and V. Komkov, Design Sensitivity Analysis of Structural System, Academic Press, New York N.Y., 1986
- [2] Il-han Park, Hyang-beom Lee, In-gu Kwak and Song-yop Hahn, "Design sensitivity analysis for steady state eddy current problems by continuum approach," IEEE Trans. on Magnetics, vol.30, no. 5, pp. 3411-3414, 1994
- [3] Il-han Park, In-gu Kwak, Hyang-beom Lee, Song-yop Hahn and Kisik Lee, "Design Sensitivity Analysis for Transient Eddy Current Problems using Finite Element Discretization and Adjoint Method," IEEE Trans. on Magnetics, vol. 32, no. 3, pp. 1242-1245, May 1994
- [4] Petin P., Coulomb J.L., Ph. Conraux, "High Derivatives for Fast Sensitivity Analysis in Linear Magnetodynamics," IEEE Trans. on Magnetics, vol. 33, no. 2, pp. 1149-1154, 1997
- [5] Coulomb J.L., About Sensitivity Analysis using High Order Derivatives ICS-Newsletters, vol. 4, no. 1, pp6-12