전기기기의 최적설계를 위한 유한요소모델의 설계변수 매개화

김창현*, 김창욱, 박일한*
숭실대 전기공학과 *성균관대 전기전자컴퓨터공학부

Design Variable Parametrization in Finite Element Models for Optimal Design of Electromagnetic Devices

Chang-hyun Kim, Chang-wook Kim, Il-han Park*
Dept. of Electrical Eng. Soongsil University, *Dept. of Electrical Eng. Sungkyunkwan University

Abstract - For the shape design of electromagnetic devices using the FEM, the choice of design parameters influence to the success of the optimization process. If the design parameter distribution has a one to one corespondence with finite element model, we can encounter not only serious accuracy problem but also obtain a zigzag shape along the interface. The nodes between those design parameters can be parameterized by interpolating using one among many interpolation methods. The conventional parameterization of design parameters has a limit of application for shape, because design parameters and movable nodes are linearly intepolated.

In this paper, using the B-spline curve that use to present any interfaces in computer graphics, the curvilinear parameterization between design parameters and node points is compared with the linear parameterization.

1. 서 론

유한요소법을 사용한 전기기기의 형상설계에 있어서 설계변수의 선택은 최적화 수행과정에 큰 영향을 미친다. 기존의 형상설계는 절점에서의 민감도를 계산하는데 각 설계경계면의 각 절점을 모두 설계변수로 취하여 해석하였다. 그러나 이런 경우에는 유한요소해석 프로그램에 의한 심각한 민감도 해석 오차 문제뿐만 아니라 경계면을 따라 지그재그 형상을 발생시키는 문제에 직면하게 된다. 경계면에서의 오차를 줄이기 위해 설계변수의 분포를 유한요소의 분포보다 드물게 두어 실제적인 설계변수와 그와 관계되는 절점들 사이의 매개화가 필요하게 되었다. 움직이는 절점은 설계변수에 의해 여러 가지 보간법을 사용하여 보간될 수 있다. 기존의 방법은 직선보간을 사용하지만 적용의 한계가 있으며, 다항식 보간은 간단한 적용에는 좋지만, 임의 경계면을 표현하기에는 어려움이 있다. 그러므로 일반적인 경계표현을 위한 기법이 필요하게 되었다.

본 논문은 컴퓨터 그래픽에서 사용되는 B-spline, NURBS 등의 표면경계를 처리하는 기술을 사용하여 이를 적용하고자 한다. Spline 곡선은 조정점과 기저함수의 곱의 합으로 표현되는 곡선으로 설계변수의 좌표값들을 통해서 곡선을 표현하고, 그 설계변수와 절점간의 매개화(parmetrization)를 수행하며, 기저함수를 사용하여 민감도 계산을 위한 가중함수를 표현한다. 이를 일대일 대응에 의한 민감도 계산에 의한 최적설계와 기존의 직선매개화에 의한 것과 본 논문에서 제안한 곡선매개화와의 비교를 위해서 전자석의 공극에서의 균일한 자속밀도를 얻기 위한 형상설계 모델에 적용하여 수치적인 검증을 하고자 한다.

2. 본 론

2.1 유한요소법에 따른 민감도 해석

유한요소법을 이용하여 주어진 시스템을 이산화하고 행렬식으로 표현되는 유한차원화된 상태방정식을 구성한 다음 그 상태방정식을 이용하여 설계변수에 대한 목적함수의 민감도를 구한다. 최적화 대상의 초기설계치가 주어졌을 때 다음과 같은 상태방정식을 얻을 수 있다.

$$[K][X]=[f] \tag{1}$$

여기서 $[K]$는 시스템행렬, $[X]$는 각 절점에서의 상태변수, $[f]$는 구동벡터이다.

전기기기 설계를 위한 목적함수는 설계변수와 시스템 상태변수의 함수로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$F=F\,[p\,,\ x(p)\,] \tag{2}$$

여기서, p는 설계변수벡터, $[x(p)]$는 상태변수이다.

설계변수의 변화에 따른 목적함수의 변화율(민감도)은 수학적으로 전미분형태로 다음과 같이 민감도식으로 표현된다.

$$\frac{dF}{d[p]} = \frac{\partial F}{\partial[p]}+[\lambda]^T\frac{\partial}{\partial[p]}[[f]-[K][\tilde{x}]] \tag{3}$$

$$[\lambda]^T=\frac{\partial F}{\partial[x]}[K]^{-1} \tag{4}$$

여기서 $[\lambda]$는 보조변수식이다.

위의 민감도식을 풀어서 최적화 기법에 사용하게 된다.

2.2 설계변수의 매개화

이산화된 시스템에서는 움직이는 경계표면은 연속적인 절점$(X_{oi},\ Y_{oi})$로 구성되어 있다. 절점 민감도는 경계표면에 있는 절점과 관계가 있고, 절점민감도와 경계표면 매개화 정보로 표현될 수 있다.

위 식(3)에서

$$\frac{\partial}{\partial p} = \sum_{i=1}^{np}\left(\frac{\partial}{\partial X_{oi}}\frac{\partial X_{oi}}{\partial p}+\frac{\partial}{\partial Y_{oi}}\frac{\partial Y_{oi}}{\partial p}\right) \tag{5}$$

로 표현될 수 있다. np는 경계표면에서의 움직이는 절점의 총수이다.

설계변수에 대한 절점들의 미분은

$$\left(\frac{\partial X_{oi}}{\partial p}\,,\ \frac{\partial Y_{oi}}{\partial p}\right) = (\alpha_i,\ \beta_i) \tag{6}$$

이것은 절점의 움직이는 방향을 의미한다. 만약 설계변

수와 움직이는 절점을 일치시키면 경계면에서 지그재그 형상의 문제점이 발생하기 때문에 움직이는 절점보다 적은 수의 설계변수를 사용하고 움직이는 절점은 설계변수에 의해 여러가지 보간법을 사용하여 보간할 수 있다. 예를 들어 움직일 수 있는 라인이 몇 개의 절점으로 구성되어 있고 두 설계변수 절점 n과 m에 의해서 선형으로 보간되어 있다면, 그림1처럼 이들 설계변수 절점들 사이의 절점들은 다음과 같이 매개화 될 수 있다.

$$\left(\frac{\partial X_{oi}}{\partial p}, \frac{\partial Y_{oi}}{\partial p}\right) = W_{km}(\alpha_m, \beta_m) + W_{kn}(\alpha_n, \beta_n) \quad (7)$$

여기서 W_{km} 과 W_{kn} 은 설계변수절점 m과 n에서의 가중치이다. k는 절점 n과 m사이의 절점번호이다.

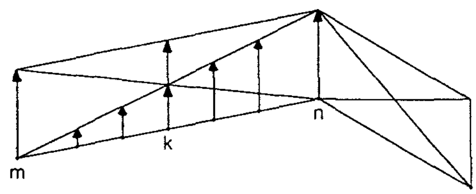

그림1 절점의 매개화

2.3 B-spline에 의한 곡선보간

임의의 경계 형상의 표현을 위해서는 직선, 원호, 보간 곡선, 함수 곡선, 자유곡선등의 다양한 곡선들을 이용하여 경계를 생성할 수 있어야 한다. 자유 곡선은 Bezier곡선, B-spline곡선, NURBS(Non-Uniform Rational B-spline) 등에 의하여 표현이 가능하다. 여기서 B-spline곡선을 이용하여 아래와 같이 표현한다.

$$P(t) = \sum_{i=1}^{n+1} B_i N_{i,k}(t) \quad t_{\min} \le t \le t_{\max}, \quad 2 \le k \le n+1 \quad (8)$$

여기서

$$N_{i,k}(u) = \frac{(u-t_i)N_{i,k-1}(u)}{t_{i+k-1}-t_i} + \frac{(t_{i+k}-u)N_{i+1,k-1}(u)}{t_{i+k}-t_{i+1}}$$

$$N_{i,1}(u) = \begin{cases} 1 & t_i \le u \le t_{i+1} \\ 0 & \text{그외의범위} \end{cases}$$

여기서 B_i 는 $n+1$ 의 조정다각형꼭지점, $N_{i,k}$ 는 일반적인 B-spline 기저함수(basis function)이다. t_i 는 매개변수 u 의 범위안에 존재하는 매듭값(knot value)이라 하며 u 를 여러개의 범위로 쪼개서 각각의 기저함수가 0이 되지 않는 범위의 경계가 되는 u 값이다. 식(8)에서 $N_{0,k}$ 부터 $N_{n,k}$ 까지 t_0 부터 t_{n+k} 까지 ($n+k+1$)개의 매듭값이 필요한데 이 매듭값을 정하는 방법에 따라 다른 종류의 B-spline 곡선이 된다. 이 매듭값은 곡선의 기저함수(basis function)를 생성시키는데 이는 곡선의 형상에 영향을 준다. 매듭값 t_i 를 정하는 방법은 크게 주기적 매듭값과 비주기적 매듭값으로 나누어 주기적 매듭값일 때

$$t_i = i-k \qquad 0 \le i \le n+k \quad (9)$$

비주기적 매듭값일 때는

$$t_i = \begin{cases} 0 & 0 \le i < k \\ i-k+1 & k \le i \le n \\ n-k+2 & n < i \le n+k \end{cases} \quad (10)$$

이다. 기저함수 $N_{i,k}(u)$는 $(k-1)$차 식이므로 k (order)값을 원하는 차수보다 하나 많게 지정하면 조정점의 개수와 무관하게 B-spline곡선의 차수를 선택할 수 있다. 이제 설계변수의 위치에 따른 곡선이 위식들에 의해서 생성되게 된다.

2.4 설계변수 매개화

기저함수 $N_{i,k}(u)$는 한정된 구간에서만 값을 갖고 그외 다른 구간에서는 0이다. 그리고 기저함수의 차수는 $k-1$가 된다. 만약 $k=2$이면, 기저함수는 1차식이된다. 균일한 매듭값에 의한 기저함수를 예를 들면,그림2와 같이 1차 직선 기저함수로 표현된다. 이것은 기존의 선형적 설계변수와 움직이는 절점간의 매개화에 사용되어 왔었다. 즉 하나의 설계변수와 관계되는 움직이는 절점은 바로 이웃하고 있는 설계변수들 사이에 있는 절점들로서 매개화된다. 그래서 그림2의 기저함수는 그대로 직선에 의한 매개화에서의 가중함수가 된다.

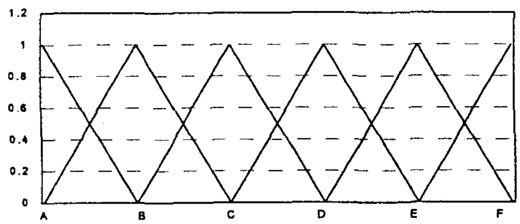

그림2 1차직선 기저함수

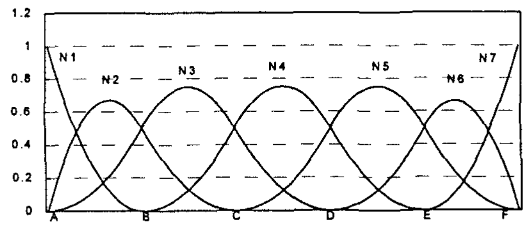

그림3 2차곡선 기저함수

$k=3$인 2차곡선식인 경우는 그림3과 같이 설계변수와 관계가 있는 절점들은 적어도 그 두 번째 이웃의 설계변수까지의 사이의 절점들과 관계가 있다. 예를들어 그림3에서 설계변수 6개 (A,B,…,F)중에서 C에 관계되는 기저함수는 N3와 N4이다. N3와 N4는 두 번째 이웃의 설계변수절점인 A와 E사이의 절점들까지 관계를 갖는다. 그림2와 그림3 모두 각 곡선을 더하면 1이된다는 것을 알수 있는데, 이는 어떤 매개변수값에 대해서든지 기저함수의 합은 1이라는 특성에 의한 것이다. 한 설계변수 절점에 대해서 그와 관계되는 기저함수를 합치면 그점에서는 1이되고 다른 부분에서는 가중치를 갖게되고 관계가 없는 부분에서는 0이된다. 이를 이용하여 그림4와 같은 가중함수치곡선을 얻을 수 있다. 이 곡선을 사용하여 곡선으로 보간된 설계변수와 움직이는 절점들에서의 민감도계산을 수행하게 된다.

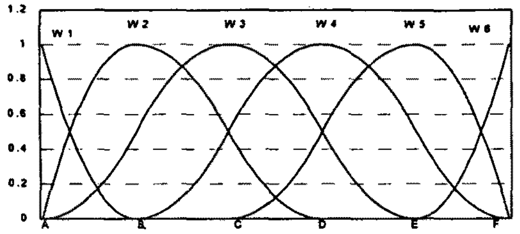

그림4 가중함수 그래프

2.5 적용사례

곡선에 의한 설계변수 매개화에 대한 예를 전자석 공극에서의 균등 자장을 얻기위한 문제에 적용하여, 기존의 직선에 의한 설계변수 매개화를 통한 결과와 비교해보았다. 그림5는 해석하고자 하는 모델로서 공극내에서 자속밀도 B가 일정하도록 철의 형상을 최적화 하는 문제이다. 목적함수는 다음과 같이 정의한다.

$$F=\sum_{i=1}^{nn}(B_i-B_{oi})^2 \tag{9}$$

여기서, B_i는 목적영역에서의 계산된 자속밀도이고, B_{oi}는 목적 자속밀도 값이고, nn은 목적함수 영역의 요소개수이다.

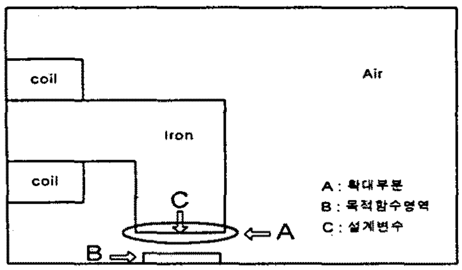

그림 5 초기 전자석 모델

적용된 최적화 알고리즘은 최대경사도법(Steepest Descent Method)을 사용하여 최대경사로 탐색방향을 취하고 진행거리는 목적함수를 민감도의 절대치로 나눈값으로 고정하여 반복계산하였다. 그림 6, 그림 7과 그림 8은 최대오차가 목적값의 0.3%이내일 때 수렴하도록 한 후의 최종형상을 나타낸 것이다. 세가지 경우에서 설계변수와 움직이는 절점이 일치하는 개수는 81개이고, 직선과 곡선의 매개화에서의 설계변수의 개수는 21개, 중간 움직이는 절점의 개수는 3개이다.

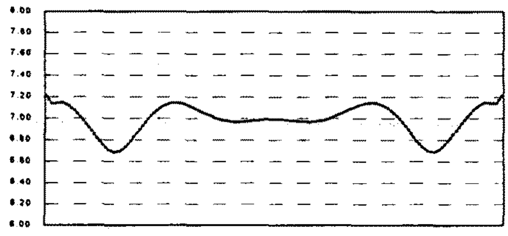

그림6 설계변수와 움직이는 절점이 같은 경우의 최종형상

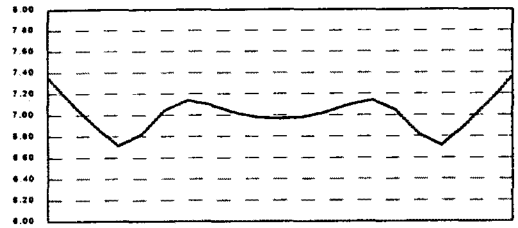

그림7 직선에 의한 매개화 최종형상

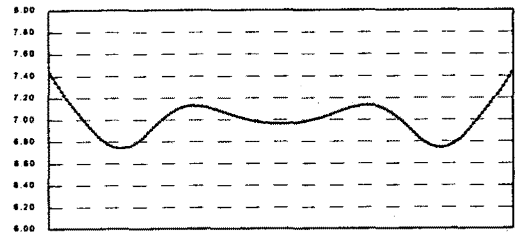

그림8 곡선에 의한 매개화 최종형상

그림6의 설계변수와 움직이는 절점이 같은 경우에서는 끝부분에서 지그재그 형상을 확인 할 수 있었고, 그림7과 그림8의 직선과 곡선의 매개화에 따른 형상은 그 추이는 비슷하나 직선에 의한 매개화는 곡선의 매끄러운 형상과는 차이가 있다. 형상은 틀리지만 각각의 값은 그리 차이나지 않았다. 그리고 끝부분에서의 오차가 가장 큰 것은 끝부분의 형상이 뾰족하기 때문에 생기는 수치해석적인 오차라고 판단된다.

3. 결 론

본 논문에서는 최적형상설계를 위해 유한요소법을 이용한 민감도 해석법을 사용할 때 설계변수와 그 사이의 움직이는 절점간의 매개화를 직선이 아닌 곡선으로 처리하여 해석하였다. 설계변수와 절점간의 매개화에 있어서 본 논문에서 제의한 곡선에 의한 매개화에 의한 최종형상을 보면 직선에 의한 매개화에 의한 최종형상보다 좀 더 실제적인 형상이라고 할 수 있다. 실제 제작되어야 하는 형상들은 각진 것보다는 곡선으로 이루어진 것이 더 많이 존재한다. 그러므로 임의 형상을 표현하기에는 직선에 의한 매개화보다는 곡선에 의한 매개화에 의한 형상이 더 많은 곳에 적용되리라 사료된다.

[참 고 문 헌]

[1] 박일한, "전자소자의 형상최적화를 위한 민감도해석", 서울대 공학박사 학위논문, 1990

[2] David F. Rogers and J. Alan Adams, Mathematical Elements for Computer Graphics, McGraw-Hil, 1990

[3] Il-han Park, J.L. Coulomb and Song-yop Hahn "Implementation of Continuum Sensitivity Analysis with Existing Finite Element Code," *IEEE Trans. on Magnetics*, vol.29, No.2, pp.1787-1790, 1993

[4] 이건우, 컴퓨터그래픽과 CAD, 영지문화사,1997