

등각사상을 이용한 하모닉 모터의 토크 정식화

윤서진\*, 이은용\*, 이동주\*, 이종한\*, 정종호\*  
\*충남대학교

Torque Formularization of Harmonic Side Drive Motor by Cnformal Mapping

S. J. Yun, E. W. Lee, D. J. Lee, J. H. Lee, J. H. Jeong  
Dept. Electrical Eng. Chungnam Nat'l. Univ.

**Abstract** - In order to design or predict the performance of a cylindrical electrostatic motor it is necessary to analyze the torque generated by such a structure. In this paper a simple but sufficiently accurate analytical model is developed for use in design. Conformal mapping are used to model the capacitance and torque of the motor as a function of the rotor position, using a quasi-static, two-dimension approximation, the effect of an insulating dielectric layer on the stator or rotor is also evaluated.

1. 서 론

최근 MEMS 기술의 발달로 정전형 구동장치에 관한 연구가 활발히 진행되고 있다. 그중 하모닉 모터(harmonic side drive motor)는 고정자-회전자의 편심구조에 의한 감쇄 기어비가 존재하여 발생 토크가 모터 체적에 비해 매우 크며, 편심구조이어서 발생하는 토크특성을 기존의 해석방법으로 해석하기가 곤란하여 유한요소법으로 해석한다.<sup>[1-3]</sup>

그러나 설계를 위해서는 기하학적 형상에 따른 수치해석 결과보다는 대표적인 해석적 모델을 구하는 것이 더욱 유용하다.

그래서 본 하모닉모터의 토크 특성해석 연구에서는 해석적인 등각사상법에 의한 토크 정식화를 통하여 토크 특성을 얻었다.

2. 하모닉모터의 토크 정식화

2.1 하모닉 모터의 구조 및 형상

실제의 모터는 3차원 장 분포를 형성하지만, 만약 모터의 축방향 길이가 고정자와 회전자 전극 사이의 공극의 길이에 비해 충분히 크다면, 2차원 근사화를 사용할 수 있다. 간소화된 2차원 구조를 그림 1에 나타내었다.

모델 1은 공극이 균일한 유전체인 경우, 모델 2는 고정자 축을 절연한 경우, 모델 3은 회전자 축을 절연한 경우이다.

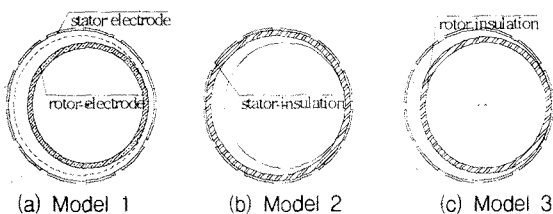


그림 1. 하모닉모터

Fig. 1. Harmonic Side Drive Motor

전극이 0 전위 상태일 때, 고정자 한 전극에 전위를 가해 모터가 여기된다고 하면, 그림 2에 나타난 쌍일차(bilinear)와 대수(logarithmic) 사상(mapping)은 편심인 회전자와 고정자 도체를 간단한 기하 형상으로 변환하는데 사용되며, 이로부터 회전자-고정자간 정전용량을 쉽게 추정할 수 있다. 그림 2(a)와 그림 2(b)는 각각 모델 1과 모델 2에 대한 변환 과정을 나타낸다. 길이를 갖는 고정자 전극은 무한히 얇거나 무한히 두꺼운 전극으로 근사화 될 수 있으며, 내부 전극의 공극과 전극의 길이 비에 의해 결정된다. 고정자 전극의 위치에 따른 회전자-고정자 간 정전용량의 변화는 회전자에 미치는 토크를 유도하는데 사용된다.

2.2 등각사상에 의한 토크 정식화

모터의 기하형상은 고정자와 회전자가 각각 단위길이 1과 r이라 할때 이에 대한 축척으로 나타낸다. 고정자와 회전자 간 절연층의 두께는 t이고, 고정자 중심에 대한 고정자 전극의 각을 Δ라 하고 전극들 사이 공극의 각을 Γ라 하고 해석을 위한 모터 상수 값은 표 1.과 같다. 여기된 고정자 전극은 그림 2와 같이 회전자에 상대적인 각위치 θ에 위치한다고 가정한다.

고정자 반경	회전자 반경	고정자축 전극 각	전극들 사이 공극 각	고정자-회전자 절연층의 두께	고정자-회전자 공극의 유전율	고정자-회전자 절연층의 유전율
1	0.833	24°	6°	0.073	ε <sub>1</sub>	ε <sub>2</sub>
					ε <sub>0</sub>	3ε <sub>0</sub>

표 1. 해석모델의 모터 상수 값<sup>[5]</sup>

Table 1. motor parameter of analysis model

2.2.1 w-평면으로의 사상(bilinear mapping)

그림 2의 z와 w 평면에 관련된 쌍일차 사상은 식(1)과 같다.<sup>[4]</sup>

$$w = \frac{z-a}{az-1} \tag{1}$$

여기서,

$$a = \frac{1+x_1x_2 + \sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)}}{x_1+x_2} \tag{2}$$

$$x_1 = 1-t, \quad x_2 = 1-t-2r$$

회전자 전극 |z+t+r-1| = r은 식(3)과 같은 반지름을 갖는 원 |w| = R<sub>0</sub>로 사상된다.

$$R_0 = \frac{1-x_1x_2 + \sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)}}{x_1-x_2} \tag{3}$$

여기서, r < 1.

-1 < x<sub>2</sub> < x<sub>1</sub> < 1에서 a > 1, R<sub>0</sub> > 1

고정자 점들의 상  $z = e^{i\theta}$ 은  $\omega = e^{i\theta_s(\theta)}$ 로 사상되며 각  $\theta_s(\theta)$ 는 식(4)와 같다.

$$\theta_s(\theta) = \tan^{-1} \left( \frac{(a^2 - 1) \sin \theta}{2a - (a^2 + 1) \cos \theta} \right) \quad (4)$$

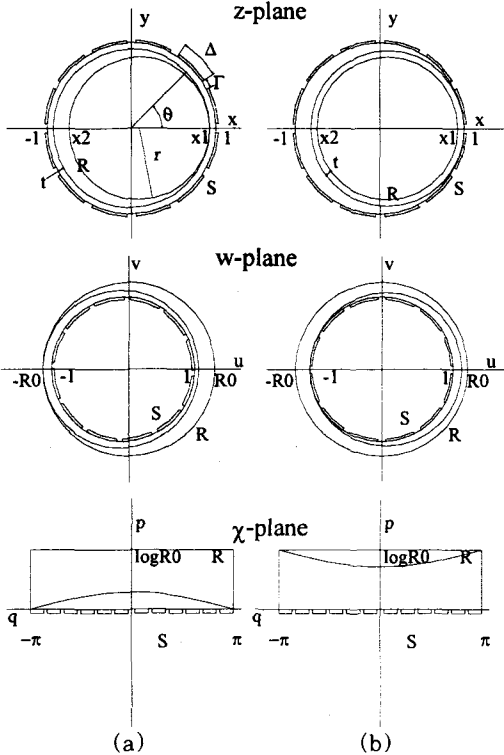


그림 2. z, w, x 평면으로의 변환  
Fig. 2. z, w, x-plane Transformation

그러므로 고정자의 중심으로 이루는 각이  $\theta$ 이고, 각 너비가  $\Delta$ 인 전극은 w-평면에서 단위 원 상의 호  $[\theta_s(\theta - \frac{\Delta}{2}), \theta_s(\theta + \frac{\Delta}{2})]$ 로 사상된다.

이때, 각  $\theta$ 에 대한  $\theta_s(\theta)$ 의 변화율은 식(5)와 같다.

$$\frac{\partial \theta_s(\theta)}{\partial \theta} = \frac{1 - a^2}{a^2 - 2a \cos \theta + 1} \quad (5)$$

z-평면상의  $z = \zeta + \eta e^{i\theta}$ 는 w-평면상의 원  $w = w_0 - \rho e^{i\theta}$ 로 사상되며  $w_0$ 와  $\rho$ 는 식(6), (7)과 같다.

$$w_0 = \frac{(\zeta - a)(a\zeta - 1) - a\eta^2}{(\zeta - 1)^2 - a^2\eta^2} \quad (6)$$

$$\rho = \frac{\eta(a^2 - 1)}{(\zeta - 1)^2 - a^2\eta^2} \quad (7)$$

모델 2과 모델 3에 대해, z-평면에서 유전체 경계면은 각각 w-평면에서  $\zeta = 0, \eta = 1 - t$  그리고  $\zeta = 1 - r - t, \eta = r + t$ 인 원으로 나타난다.

### 2.2.2 x-평면으로 사상

변환  $x = \log(w)$ 는 w-평면상의 회전자와 고정자 전극을 x-평면상의 평행 선분으로 사상시킨다.

그리고 원  $w = w_0 - \rho e^{i\theta}$ 은 식(8)로 사상된다.

$$w_0 \cos q = \sqrt{\rho^2 - w_0^2} \sinh(p - c) \quad (8)$$

여기서 p, q : x의 실수와 허수부

식(8)에서 c는  $\rho > w_0$ 인 경우 식(9)와 같다.

$$c = \frac{1}{2} \log[\rho^2 - w_0^2] \quad (9)$$

유전체 경계면을 나타내는 원에 대해,  $\rho$ 는  $\rho > w_0$ 와  $1 < \rho < R_0$ 를 만족한다. 모터 기하형상의 주요부분은  $\log R_0 \ll 1$  일수록  $t \ll 1$ 이고, r은 단위길이 1에 가까워지므로  $p - c \ll 1$  때문에 식(8)에서 p를 식(10)으로 근사화시켜 나타낼 수 있다.

$$p \approx \frac{1}{2} \log[\rho^2 - w_0^2] + \frac{w_0}{\sqrt{\rho^2 - w_0^2}} \cos q \quad (10)$$

그러므로, 고정자와 회전자가 절연된 경우, 식(10)은 각각 식(11), (12)로 근사화 된다.

$$p_{is} \approx p_{os} - p_{ms} \cos q \quad (11)$$

$$p_{ir} \approx p_{or} + p_{mr} \cos q \quad (12)$$

여기서,

$$p_{os} = \frac{1}{2} \log \left[ \frac{(a + x_1)(a - x_1)}{(ax_1 + 1)(ax_1 - 1)} \right] \quad (13)$$

$$p_{ms} = \frac{1}{2} \log \left[ \frac{(a - x_1)(ax_1 + 1)}{(a + x_1)(ax_1 - 1)} \right] \quad (14)$$

$$p_{or} = \frac{1}{2} \log \left[ \frac{(a + 1) - (x_1 + x_2)}{(a + 1) - a(ax_1 - x_2)} \right] \quad (15)$$

$$p_{mr} = p_{or} \quad (16)$$

## 2.3 정전용량과 토크

### 2.3.1 모델 1

x-평면에서 고정자와 회전자 전극사이의 정전용량은 식(17)과 같이 근사화 될 수 있다.

$$C(\theta) = \frac{\theta_s(\theta + \frac{\Delta}{2}) - \theta_s(\theta - \frac{\Delta}{2})}{\log R_0} \quad (17)$$

식(4)를 식(17)에 대입하고 각  $\theta$ 에 대하여 미분하면 식(18)과 같이 토크  $\tau(\theta)$ 를 얻을 수 있다.

$$\tau(\theta) = \frac{(a^2 - 1)}{\log R_0} \left[ \frac{4a \sin(\theta) \sin(\frac{\Delta}{2})}{(1 - 2a \cos(\theta - \frac{\Delta}{2}) + a^2)(1 - 2a \cos(\theta + \frac{\Delta}{2}) + a^2)} \right] \quad (18)$$

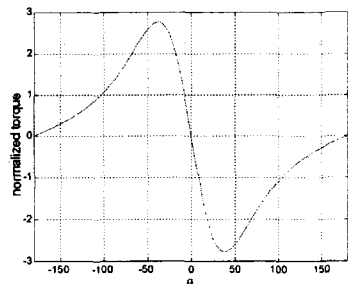


그림 3. 모델 1의 정규화된 토크 특성

Fig. 3 Normalized torque characteristic of Model 1

그리고 회전자에서 발생한 토크  $T$ , 은 식(19)와 같이 계산된다.

$$T_r(\theta) = \frac{\epsilon_1 L V^2}{2} \frac{(1-t)}{(1-t-r)} \tau(\theta) \quad (19)$$

여기서  $L$  : 모터의 축방향 길이  
 $V$  : 인가된 여기 전압  
 $\epsilon_1$  : 유전체의 유전율

식(19)로부터 얻은 모델 1의 정식화된 토오크 특성은 그림 3과 같다.

### 2.3.2 모델 2(고정자측 절연)

모델 2는 모터는 고정자 내부면에 유전율  $\epsilon_2$ 이고 두께가  $t$ 인 유전체로 절연되어 있다.

$x$ -평면에서 단위 길이당 표준화된 회전자-고정자간 정전용량은 식(20)과 같다.

$$C(\theta) = \int_{\theta_s(\theta + \frac{d}{2})}^{\theta_s(\theta - \frac{d}{2})} \frac{dq}{\log R_0 - \alpha p_{is}} \quad (20)$$

여기서,  $\alpha = 1 - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$

그리고 식(4)를 이용하여, 각  $\theta$ 에 대하여 미분하면 식(21)와 같은 표준화 토오크를 구할 수 있다.

$$\tau_{is}(\theta) = f_{is}(\theta + \frac{d}{2}) - f_{is}(\theta - \frac{d}{2}) \quad (21)$$

여기서,

$$f_{is}(\phi) = \frac{(a^2 - 1)}{\lambda_s(a^2 - 2a \cos \phi + 1) + \gamma_s(2a - (a^2 + 1) \cos \phi)} \quad (22)$$

$$\lambda_s = \log R_0 - \alpha p_{os} \quad (23)$$

$$\gamma_s = \alpha p_{ms} \quad (24)$$

그러므로 회전자에서 발생하는 토오크는 식(25)와 같다.

$$T_r(\theta) = \frac{\epsilon_1 L V^2}{2} \frac{(1-t)}{(1-t-r)} \tau_{is}(\theta) \quad (25)$$

식(25)로부터 얻은 모델 2의 정식화된 추정 토오크 특성은 그림 4와 같다.

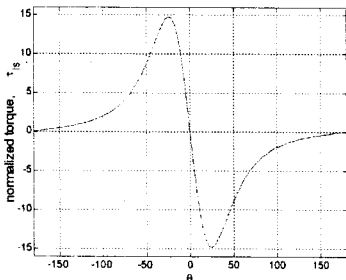


그림 4. 모델 2의 정규화된 토오크 특성  
 Fig. 4 Normalized torque characteristic of Model 2

### 2.3.3 모델 3(회전자측 절연)

모델 3은 회전자 내부면에 유전율  $\epsilon_2$ 이고 두께가  $t$ 인

유전체로 절연되어 있다.

이러한 경우에는 정전용량 식(20)과 같고 토오크는 식(26)과 같다.

$$\tau_{ir}(\theta) = f_{ir}(\theta + \frac{d}{2}) - f_{ir}(\theta - \frac{d}{2}) \quad (26)$$

여기서,

$$f_{ir}(\phi) = \frac{(a^2 - 1)}{\lambda_r(a^2 - 2a \cos \phi + 1) + \gamma_r(2a - (a^2 + 1) \cos \phi)} \quad (27)$$

$$\lambda_r = (1 - a) \log R_0 - \alpha p_{or} \quad (28)$$

$$\gamma_r = \alpha p_{mr} \quad (29)$$

따라서, 회전자에서 발생하는 토오크는 식(30)으로 나타난다.

$$T_r(\theta) = \frac{\epsilon_1 L V^2}{2} \frac{(1-t)}{(1-t-r)} \tau_{ir}(\theta) \quad (30)$$

식(30)으로부터 얻은 모델 3의 정식화된 추정 토오크 특성은 그림 5와 같다.

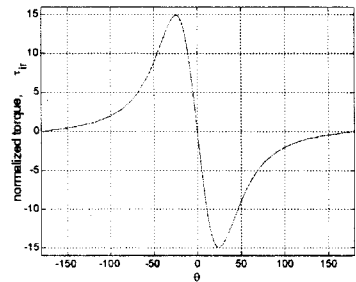


그림 5. 모델 3의 정규화된 토오크 특성  
 Fig. 5 Normalized torque characteristic of Model 3

## 4. 결 론

본 연구에서는 하모닉모터의 대표적인 기하학적 형태에 따른 정전용량과 발생 토오크를 등각사상을 이용하여 해석적으로 구하였다.

고정자측이나 회전자측이 절연된 경우, 각각의 발생 토오크 특성곡선의 형태와 크기가 모두 유사하였다. 따라서 어느측이든 설계·제작상 유리한 쪽으로 절연하면 될 것이다.

앞으로 정식화된 토오크특성을 바탕으로, 설계목적에 맞는 최적의 모터 상수를 추정하는 연구가 필요하다.

### (참 고 문 헌)

- [1] H. Fujita and A. Omodaka, "Electrostatic Actuators for Micromechanics," *Proc. IEEE Micro Robots and Teleoperators Workshop*, Hyannics, Massachusetts, Nov. 1997.
- [2] S. C. Jacobsen et. al., "The wobble motor: An Electrostatic, Planetary-Armature, Microractuator," *Proc. IEEE MEMS Workshop*, Salt Lake City, Utah, Feb. 1989, pp. 17-24
- [3] W. Trimmer and R. Jebens, "An Operational Harmonic Electrostatic Motor," *Proc. IEEE MEMS Workshop*, Salt Lake City, Utah, Feb. 1989, pp. 13-16
- [4] Ruel V. Churchill and James Ward Brown, *Complex Variables and Applications*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1984
- [5] R. Mahadevan, "Analytical Modelling of Electrostatic Structures" *Proc. IEEE MEMS Workshop*, 1990, pp.120-127