

항공기 제트엔진 후기연소기에서의 연소 불안정 현상에 관한 선형해석

남 삼 식*, 이 창 진

건국대학교 항공우주공학과

1. 서론

로켓 엔진, 항공기 제트엔진의 후기연소기와 같은 높은 에너지 밀도(high-energy densities)와 낮은 에너지 손실(low losses)특성을 갖는 시스템에서는 음파와 비정상 연소간의 상호 간섭에 의한 연소 불안정 현상이 발생할 가능성이 높다. 일반적으로 단위 체적당 에너지 방출량이 증가할수록, 혹은 성능이 향상될수록 불안정 현상은 더 잘 발생하고 그에 따른 손상 역시 커진다고 알려져 있다[1]. 에너지 방출율의 공간적 분포, 연소 지연 시간(combustion time lag), 그리고 연소실 형상(또는 고유 진동수) 등이 연소 불안정에 영향을 준다[1]. 이러한 불안정 현상에 대해 Rayleigh criterion은 명확한 물리적 설명을 가능하게 해준다. 비정상 연소에 의해 발생한 음파의 압력과 속도의 진동은 연소율의 진동을 일으키고, 이는 다시 압력 섭동을 가져오는 피드백 루프를 형성한다. 이 때 적당한 조건이 만족되면, 즉 열량 섭동과 압력 섭동의 위상차가 충분히 작으면 사이클을 반복하면서 폭발적인 열량 섭동의 증가로 인한 막대한 양의 열전달이 일어나 시스템은 불안정해지고 심하면 구조적 손상을 가져오기도 한다[1].

항공기 제트엔진에서 후기연소기는 연소된 가스에 연료를 재분사시켜 순간적으로 고추력이 필요한 이륙이나 기동력을 요하는 전투기등에서 주로 사용된다. 최신 터보팬 엔진에서도 후기연소기를 장착하고 있다. 그러나 이러한 후기연소기에서는 연소불안정 현상이 발생할 가능성이 많고 때로 이 불안정 현상으로 인하여 후기연소기의 수명 뿐만 아니라 다른 부품들에도 치명적인 손상을 가져오기도 한다. 후기연소기에서 발생하는 가장 파괴적인 연소 불안정 현상 중의 하나는 축방향으로 진행되는 음파와 비정상 연소간의 상호간섭에 의한 저 주파수 연소 불안정인데, 흔히 "reheat buzz"라고 불린다. Bloxsidge등[2]은 선형안정해석(linear stability analysis)을 수행하여 후기연소기 모델 실험 결과와 비교하였다. 그들은 분포된 열량 방출과 보염기에 의한 차단 효과(blockage effect)를 고려하여 해석을 하였다. 또한 열방출 모델을 실험적으로 구하여 적용하였다. 이들은 여러가지 인자들에 변화를 주어 그에 따른 영향을 살펴보았는데 실험 결과와도 비교적 잘 일치하고 있다. Dowling[4]은 Bloxsidge등이 고려한 분포된 열량방출, 보염기에 의한 항력이 해석을 복잡하게 하는 반면 진동 주파수에 미치는 영향은 적음을 밝혀서, 이러한 인자들을 무시할 수 있음을 보였다.

본 연구에서는 후기연소기에서의 연소 불안정 현상을 해석하기 위해 질식상태에 있는 노즐을 입구로 하고 출구는 개방되어 있는 1차원 관내의 유동을 모델로 하여 화학반응은 포함하지 않고 단지 화염면에서의 열량 방출만을 고려하여 Fourier의 선형해석을 하였다. 연소기 내에서 열량 방

출은 일정 영역에 걸쳐서 발생하지만, 음파의 파장에 비하여 그 영역의 길이가 짧으므로 화염은 한 위치에 고정되었다고 가정할 수 있고, 연소에 의한 단위 체적당 열량 방출은 화염면에 집중된 것으로 생각할 수 있다[9]. 또한 실제 후기연소기에서 기연가스의 온도가 복사에 의한 열전달이 일어날 수 있는 온도 범위에 있으므로 화염면에서의 복사에 의한 열손실을 고려하였다. 이를 위하여 본 연구에서는 Stefan-Boltzmann law를 사용하여 정성적인 변화만을 살펴보았다. 연소기 내의 평균 유동으로 인하여 제2의 다른 형태의 파(wave), 즉 엔트로피 파(또는 convected hot spot)가 발생하여 음파와 상호 간섭을 하게 된다. 이로 인하여 연속 방정식, 운동량 방정식, 에너지 방정식이 서로 연관되어(coupled) 이 식들을 동시에 풀어야 한다. 비정상 연소와 비정상 유동간의 간섭 형태에 따른 진동 주파수의 변화를 살펴 보기 위해 비 예혼합 화염에서의 열방출율과 예혼합 화염에 대한 열방출율을 단순화시킨 모델들을 사용하였다[4]. 첫번째 경우는 열방출의 교란이 없는, 즉 $Q'(t)=0$ 인 경우이며 두번째는 비정상 유동에 의한 열방출의 교란이 있는, 즉 $Q'(t)=kc_p(\bar{T}_{0,2}-\bar{T}_{0,1})(\bar{\rho}_1 u'_1 + \rho'_1 \bar{u}_1)$ 인 경우이다. 여기서 k 는 열방출 교란의 정도를 나타내는 임의의 상수이며 $0.5 \leq k \leq 1.0$ 이다.

2. 선형 해석

본 논문에서 사용하는 후기연소기의 모델은 입구를 $x=0$ 로 하고, 출구 방향으로 x 가 증가하는 좌표계를 사용하였다. 관의 길이는 L 이다. 다음은 후기연소기의 개략도이다.

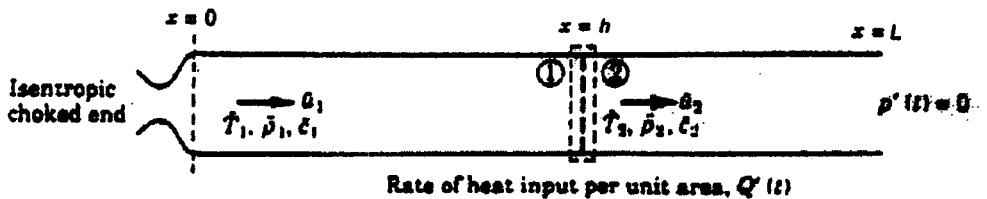


그림 1. 질식상태에 있는 입구와 외부에 개방된 출구를 갖는 후기연소기의 해석적 모델

선형해석 방법을 사용하므로 시간 의존이 $e^{i\omega t}$ 인 교란양에 대해서 고려하였다. 해석을 위해 사용한 모델이 질식상태에 있는 노즐을 입구로 하고 있기 때문에 관내에 평균 유동이 존재한다. 이 평균 유동으로 인하여 연속 방정식, 운동량 방정식, 그리고 에너지 방정식이 서로 연관되게 된다 (coupled). 관내 유동은 1차원 이고, 완전기체로 가정하고 점성 효과와 열전도는 무시하였다[4]. 화염면에서의 열손실은 간단한 Stefan-Boltzmann law를 사용하여 고려하였다. 지배 방정식은 아래와 같다.

$$\text{연속 방정식 : } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (1)$$

$$\text{운동량 방정식 : } \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p \quad (2)$$

$$\text{에너지 방정식 : } \frac{\partial E_d}{\partial t} + \nabla \cdot (E_f) = \dot{Q} \quad (3)$$

$$\text{상태 방정식 : } p = \rho RT \quad (4)$$

경계조건은 입구, 출구 각각에 대하여 다음과 같이 설명할 수 있다. 즉, 입구가 질식상태에 있는 노즐이므로 입구에서의 질량 유동율(mass flow rate)은 일정하고, 출구는 외부에 개방되어 있으므로 출구에서의 압력 교란은 없다.

Fourier의 선형해석 방법에 의해 일반적인 변수, s 를 평균값과 선형 교란량으로 나누어 $s(x, t) = \bar{s}(x) + s'(x)e^{i\omega t}$ 로 나타낼 수 있다. 여기에서 ω 는 선형해석 결과 나타나는 고유치(eigenvalue)로서 음파의 진동수를 의미한다. 일반적으로 ω 는 복소수, $\omega = \omega_r + i\omega_i$ 이며 i 는 허수이다. 이 때 주파수의 허수부, ω_i 의 부호는 시간이 지남에 따라 교란이 사라질 것인가 혹은 증폭될 것인가를 나타내는 것으로서 안정-불안정의 판단 기준이 된다. ω_i 가 음수이면 그 시스템은 불안정하고 양수이면 안정함을 나타낸다. 그 때의 실수부는 불안정 모드의 주파수를 나타낸다. 위의 지배방정식을 $e^{i\omega t}$ 에 비례하는 선형 교란량에 대하여 표현하고 비제차 음파 방정식(inhomogeneous wave equation)을 유도하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \rho'}{\partial x} + \bar{\rho} \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

$$\bar{\rho} \frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{\rho} u \frac{\partial u'}{\partial x} = -\frac{\partial p'}{\partial x} \quad (6)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \rho'}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \left[\frac{\partial p'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial p'}{\partial x} + (\gamma - 1) \left\{ \frac{\partial q_r'}{\partial x} - \dot{Q}' \right\} \right] \quad (7)$$

식 (5)와 (6)은 각각 교란된 연속 방정식과 운동량 방정식을 나타내고, 식 (7)은 비제차 음파 방정식을 나타낸다. 여기서, \bar{c} 는 음속을 나타내고 γ 는 비열비로서 상수이며, \dot{Q}' 은 단위 체적당 발생하는 비정상 열방출율을 의미하며 화염면에서만 이루어 진다고 가정하였으므로 Dirac delta 함수를 사용하여 $\dot{Q}'(x, t) = \dot{Q}'(t)\delta(x-h)$ 로 나타낼 수 있다. h 는 화염의 위치이다. 위의 3개의 교란된 방정식(식 5-7)으로부터 전체 영역에 대한 지배 방정식을 유도해 낼 수 있다.

$$\begin{aligned} & \bar{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x} \right] - \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - \bar{u} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x \partial t} = \\ & \bar{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\bar{u}}{\bar{\rho} c^2} \frac{\partial p'}{\partial t} \right] + \bar{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\bar{u}}{\bar{\rho} c^2} \frac{\partial p'}{\partial x} \right] + \bar{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\gamma - 1}{c^2} \left\{ \frac{\partial q_r'}{\partial x} - \dot{Q}' \right\} \right] \end{aligned} \quad (8)$$

교란된 양에 대해 나타낸 입구와 출구에서의 경계조건은 아래의 식들로 나타낼 수 있다. 입구가 질식 상태에 있는 노즐이므로 작동부에서의 교란이 입구에 영향을 주지 못함을 알 수 있다.

$$\frac{p'(0)}{\rho(0)} + \frac{u'(0)}{u(0)} = 0 \quad \text{at } x=0 \quad (9)$$

$$p'(L) = 0 \quad \text{at } x=L \quad (10)$$

전체 영역에 대한 방정식, 식 (8)을 직접 풀기보다는 화염면을 중심으로 미연 지역과 기연 지역으로 나누어 보다 간단하게 문제를 해결할 수 있다. 각 영역에서는 화염면을 포함하지 않고, 평균량들이 일정한 값을 가지므로 식 (8)과 경계조건들(식 9-10)을 이용하여 압력, 속도, 밀도, 온도의 교란양들을 각 영역에 대하여 다음과 같이 나타낼 수 있다. 미연지역은 x 의 범위가 $0 \leq x < h$ 이며, 각 교란양들은 아래와 같다.

$$p'(x, t) = (Ae^{-i\omega x/\bar{c}_1(1+\bar{M}_1)} + Be^{i\omega x/\bar{c}_1(1-\bar{M}_1)})e^{i\omega t} \quad (11.a)$$

$$u'(x, t) = (Ae^{-i\omega x/\bar{c}_1(1+\bar{M}_1)} - Be^{i\omega x/\bar{c}_1(1-\bar{M}_1)})e^{i\omega t} / \overline{\rho_1 c_1} \quad (11.b)$$

$$\rho'(x, t) = p'(x, t) / \bar{c}_1^2 \quad (11.c)$$

$$c_p T'(x, t) = p'(x, t) / \bar{\rho}_1 \quad (11.d)$$

기연지역은 x 의 범위가 $h < x \leq L$ 이며, 교란양들은 아래의 식들로 표현할 수 있다. 여기에서 주목할만한 사실은 밀도와 온도 교란양에는 미연지역과는 달리 엔트로피에 대한 항이 포함되었다는 것이다. 이는 관내의 평균 유동으로 인하여 화염면 하류에서 엔트로피 파(또는 convected hot spot)가 존재하기 때문이다. 따라서 이 엔트로피 파(entropy wave)가 음파에 영향을 주어 진동 주파수에 영향을 미치리라는 것을 예상할 수 있다.

$$p'(x, t) = (Ce^{-i\omega x/\bar{c}_2(1+\bar{M}_2)} + De^{i\omega x/\bar{c}_2(1-\bar{M}_2)})e^{i\omega t} \quad (12.a)$$

$$u'(x, t) = (Ce^{-i\omega x/\bar{c}_2(1+\bar{M}_2)} - De^{i\omega x/\bar{c}_2(1-\bar{M}_2)})e^{i\omega t} / \overline{\rho_2 c_2} \quad (12.b)$$

$$\rho'(x, t) = p'(x, t) / \bar{c}_2^2 - S \bar{\rho}_2 e^{i\omega(t-x/u_2)} / c_p \quad (12.c)$$

$$c_p T'(x, t) = p'(x, t) / \bar{\rho}_2 + S \bar{c}_2^2 e^{i\omega(t-x/u_2)} / (\gamma-1)c_p \quad (12.d)$$

여기서 \bar{M}_1 은 $\bar{M}_1 = \bar{u}_1/\bar{c}_1$ 이며 미연 지역에서의 평균 마하수(Mach number), \bar{M}_2 는 $\bar{M}_2 = \bar{u}_2/\bar{c}_2$ 로서 기연 지역에서의 평균 마하수를 나타낸다. 상수 A, B, C, D, S 는 화염면을 전후로 한 보존 조건들(jump conditions)에 의해 상관될 수 있다. 열량방출이 화염면($x=h$)에서만 이루어 진다면 이 불연속면을 전후로 한 질량 보존, 운동량 보존, 에너지 보존을 고려하여 3개의 보존 조건들을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\overline{\rho_1 u_1'} + \rho_1' \overline{u_1} = \overline{\rho_2 u_2'} + \rho_2' \overline{u_2} \quad (13.a)$$

$$p_1' + \rho_1' \overline{u_1^2} + 2 \overline{\rho_1 u_1 u_1'} = p_2' + \rho_2' \overline{u_2^2} + 2 \overline{\rho_2 u_2 u_2'} \quad (13.b)$$

$$c_p \overline{T_{0,1}(\rho_1 u_1' + \rho_1' \overline{u_1})} + \overline{\rho_1 u_1 (c_p T_1' + \overline{u_1 u_1'})} + Q'(t) - 4\sigma\epsilon(\overline{T_2^3 T_2'} - \overline{T_1^3 T_1'}) \\ = c_p \overline{T_{0,2}(\rho_2 u_2' + \rho_2' \overline{u_2})} + \overline{\rho_2 u_2 (c_p T_2' + \overline{u_2 u_2'})} \quad (13.c)$$

식 (13.c)에 나타나 있는 화염면 전후의 에너지 균형에서 볼 수 있듯이 Stefan-Boltzmann law를 이용하여 복사에 의한 열손실을 고려하여 정성적인 경향을 살펴볼 수 있음을 알 수 있다.

선형 해석이 결국 시스템의 고유치를 구하는 문제가 되므로 식 (11)-(13), 그리고 경계조건을 이용하여 다음과 같은 행렬 시스템을 구성할 수 있다.

$$X \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ S(\rho_2 \overline{c_2^2}/c_p)e^{-i\omega h/\overline{u_2}} \\ Q/\overline{c_1} \end{pmatrix} = 0 \quad (14)$$

전체 행렬 X 에 대한 표현은 Appendix에서 자세하게 나타내었다. 위 방정식이 물리적으로 의미 있는 값을 갖기 위해서는 $\det X=0$ 이어야 한다. 방정식은 주어진 평균 유동의 상태량들에 대해서 주파수(ω)에 대한 함수이며, 주파수는 일반적으로 복소수를 갖는다는 것은 앞에서 이미 언급한 바 있다. 기연 지역의 유동 마하수는 화염면 전후의 질량 보존과 완전 기체 가정으로 부터 $\overline{\rho_1 \overline{c_1^2}} = \overline{\rho_2 \overline{c_2^2}} = \gamma \overline{p}$ 이 성립하므로 입구 마하수가 정해지면 미연가스와 기연가스의 온도비

로 표현된다. 즉, $\overline{M_2} = \overline{M_1} \sqrt{\frac{\overline{T_2}}{\overline{T_1}}}$ 이다.

3. 결과 분석

본 연구에서는 궁극적으로 화염면에서의 열손실이 첫번째 진동 주파수(lowest frequency)에 어떠한 영향을 미치는가를 살펴보는 것이다. 다음에 계산된 주파수는 모두 첫번째 진동 주파수를 의미한다. 이제까지의 많은 연소불안정 현상의 해석시 열손실의 효과를 살펴보는 경우는 거의 없었다. 실제 후기연소기에서는 연소 후 가스의 온도가 복사에 의한 열전달을 무시할 수 없을 정도로 높기 때문에 이 효과를 고려하는 것은 바람직하다고 할 수 있다. 화염면에서의 열손실의 영향은 Stefan-Boltzmann law를 사용하여 방사율(emissivity), ϵ 을 0부터 1까지 변화시켜 가면서 고려하였다. ϵ 이 0이면 white body(or perfect reflector)로서 복사에 의한 열전달이 전혀 없는 경우이

며, ε 이 증가함에 따라 복사에 의한 열손실이 커지게 됨을 의미한다. ε 이 1이면 완전 흑체 복사(perfect blackbody radiation)를 의미한다. 비정상 연소와 비정상 유동간의 간섭형태, 즉 열방출의 교란여부에 대한 영향도 살펴보았다. 비정상 유동에 의한 열방출의 교란이 있는 경우에는 임의의 상수 k 를 0.5부터 1.0까지 변화시켜 가면서 그 영향을 살펴보았다. 여기에서 k 값은 열방출의 교란의 정도를 나타내는 임의의 상수이다. k 값이 커질수록 열방출의 교란이 커짐을 의미한다.

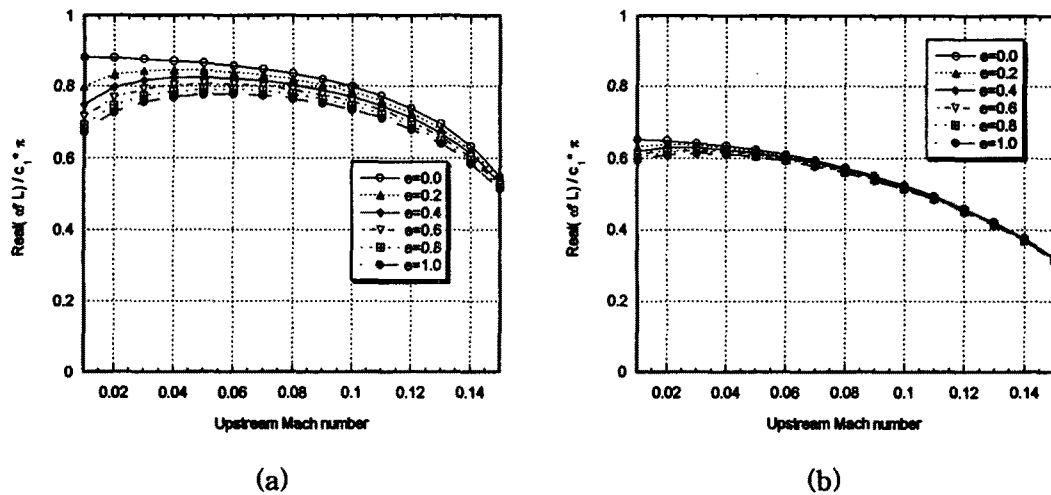
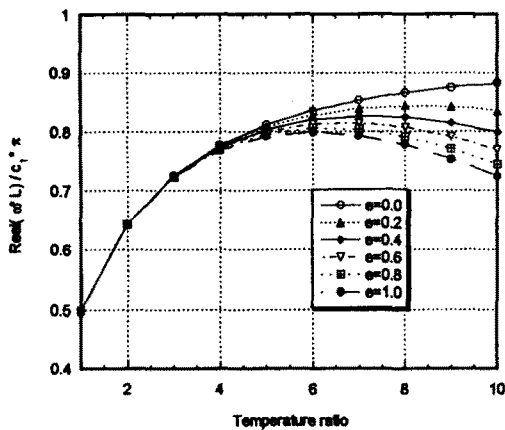
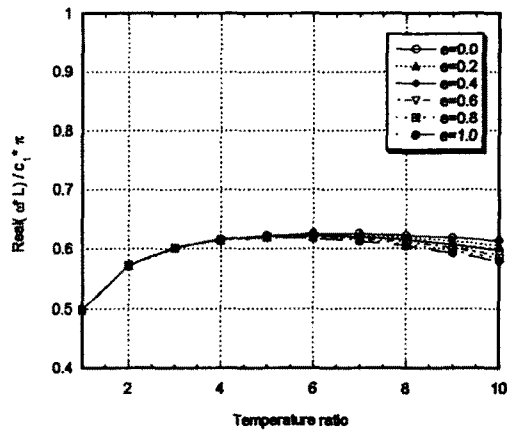


그림 2. 입구 마하수와 열손실에 따른 첫번째 진동 주파수의 변화

그림 2.에서는 비정상 연소와 비정상 유동간의 두가지 간섭 형태와 입구 마하수의 변화에 따른 첫번째 진동 주파수의 변화를 보여 주고 있다. 그림 a는 $Q'(t)=0$ 인 경우이며, 그림 b는 $Q'(t)=0.5c_p(\bar{T}_{0,2}-\bar{T}_{0,1})(\bar{\rho}_1 u'_1 + \rho'_1 \bar{u}_1)$ 인 경우이다. 비정상 유동에 의한 열방출의 교란이 있는 경우 k 값은 0.5로 하였는데 k 값이 커질수록 진동 주파수에 미치는 영향이 거의 없으므로 나머지 값들에 대하여는 결과로 보이지 않았다. $\bar{p}=1$ bar, $\bar{T}_{0,1}=300K$, $\bar{T}_{0,2}/\bar{T}_{0,1}=8.0$ 으로 하였다. 이 때 화염은 $0.5L$ 에 위치하고 있는 것으로 가정하였다. 입구 마하수가 증가할수록 열손실에 의한 영향이 적음을 알 수 있는데, 이는 엔트로피 파(또는 convected hot spot)에 의한 에너지 손실이 상대적으로 복사에 의한 열손실의 영향보다 크기 때문인 것으로 보인다. 입구 마하수가 증가할수록 진동 주파수가 낮은 것도 같은 이유로 볼 수 있을 것이다. 또한 열방출의 교란이 없는 경우가 비정상 유동의 영향으로 열방출에서의 교란을 가져오는 경우보다 훨씬 더 복사에 의한 열손실에 민감하게 대응함을 알 수 있다. 물리적으로 그 이유를 설명하기 위해서는 앞으로 더 연구가 필요할 것 같다. 그림 2의 계산 결과에서 열손실을 고려하지 않은 경우와 열손실을 고려한 경우의 최대 오차는 약 24% 정도이다.



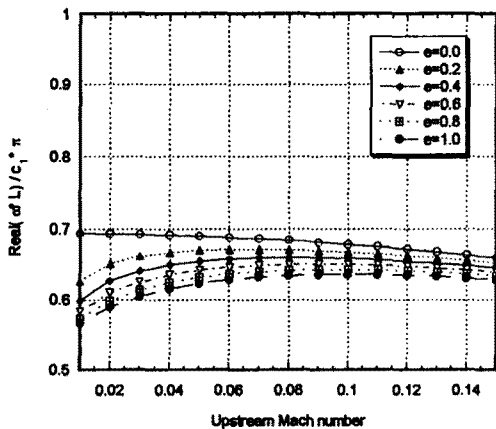
(a)



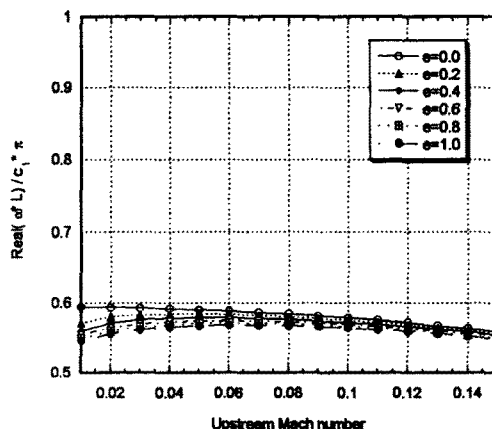
(b)

그림 3. 미연지역과 기연지역의 온도비에 따라 열손실이 첫번째 진동 주파수에 미치는 영향

미연가스와 기연가스의 온도비에 따라 열손실을 고려한 경우와 하지 않은 경우에 대한 첫번째 진동 주파수의 변화를 그림 3에 나타내었다. 그림 2에서와 마찬가지로 그림 a와 그림 b는 각각 열방출 교란이 없는 경우와 비정상 유동에 의한 열방출 교란이 있는 경우에 대하여 계산한 결과들이다. $\bar{p}=1$ bar, $\bar{T}_{0,1}=300$ K이고 두 영역의 온도비를 1부터 10까지 변화시키는 경우 온도비가 커질수록 진동 주파수에 미치는 영향 또한 커짐을 알 수 있는데 이는 물리적으로 타당한 결과이다. 즉, 기연가스의 온도가 약 2000K 이상이 되면 그만큼 복사에 의한 열손실의 영향이 커지게 되기 때문이다. 이 때 입구 마하수는 $\bar{M}_1=0.05$ 로 가정하였다.



(a)



(b)

그림 4. 실제 후기연소기에서의 상태량과 비슷한 경우에 대한 첫번째 진동 주파수의 변화(그림 a와 그림 b는 각각 열방출 교란이 없는 경우와 비정상 유동에 의한 열방출 교란이 있는 경우($k=0.5$)에 대하여 계산한 결과들이다.)

그러나 앞서 사용한 상태량들의 값은 실제 가스터빈 후기연소기에서의 상태량들과는 다소 동떨어져 있으므로 실제와 비슷한 값들을 주고 계산해 보았다. 이 때 미연가스의 온도는 1100K, 기연가스의 온도는 2750K로 주었다[5]. 그림 4에 나타나 있듯이 실제와 비슷한 조건에서도 앞의 경우와 비슷한 경향을 보임을 알 수 있다.

4. 결론

이상으로 항공기 제트엔진 후기연소기에서의 연소불안정 문제에 관하여 선형해석을 한 결과 이러한 연소불안정문제에서 흔히 무시하는 평균유동과 복사에 의한 열손실이 진동주파수에 미치는 영향은 어떤 경우에는 무시하였을 때와 상당한 차이가 있으므로 신중하게 고려해야함을 알 수 있다. 연소 현상에서 가장 중요한 인자가 연소율(burning rate)이다. 여기에서 연소율은 열방출율에 관계되므로 앞의 결과들로부터 연소율에 따라 진동 주파수가 많은 차이가 있음을 알 수 있다. 실제 실험 결과들에서 연료-공기비에 따라서 압력 피크의 강도가 달라지는 것도 이러한 이유 때문이다. 터빈에서 나오는 유동이 낮은 마하수이지만 그에 따른 진동 주파수의 변화는 엔트로피 파에 의한 음파의 에너지 손실로 인하여 상당함을 알 수 있다. 또한 실제 후기연소기에서 연소 후 가스의 온도가 2000K이상이므로 복사에 의한 열손실에 의한 영향을 무시할 수 없음을 결과들로부터 확인할 수 있었다. 따라서 가스터빈 후기연소기에서의 연소불안정 현상을 해석하기 위해서는 비정상 연소와 비정상 유동간의 간섭형태에 따른 영향, 고온으로 인한 화염면에서의 열손실때문에 발생하는 진동 주파수의 변화등을 고려하는 것이 타당함을 알 수 있다. 하지만 본 연구에서는 직접 시스템의 안정성을 판단하지는 못하고 단지 첫번째 진동 주파수의 변화만을 살펴보았기 때문에 앞으로 이에 대한 연구가 필요하다.

후기

본 연구는 건국대학교의 97 학술진흥연구비의 지원을 받아 이루어진 연구의 일부이며, 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

기호 설명

c_p : 정압 비열

R : 기체 상수

ρ : 밀도

\vec{v} : 속도

p : 압력

T : 온도

M : 유동 마하수

\dot{Q} : 단위 체적당 열량방출

\dot{Q} : 교란 열량의 크기

E_d : 에너지 밀도 $= \rho \left(\frac{1}{2} v^2 + e \right)$

E_f : 에너지플럭스 $= \rho \vec{v} \left(h + \frac{1}{2} v^2 \right) + q_r$

e : 내부 에너지

h : 엔탈피

q_r : 복사에 의한 열손실 $= \sigma \varepsilon (T^4 - T_0^4)$

σ : Stefan - Boltzmann 상수

ε : 방사율 (emissivity)

γ : 비열비

$()_1$: 미연 지역에서의 상태량

$()_2$: 기연 지역에서의 상태량

$()_{0,1}$: 미연 지역에서의 stagnation property

$()_{0,2}$: 기연 지역에서의 stagnation property

$()'$: 교란양

$\overline{()}$: 평균량

5. 참고 문헌

1. Edited by Vigor Yang and William Anderson, *Liquid Rocket Engine Combustion Instability*, AIAA, vol. 169, pp. 307-343, 1995.
2. G.J. Bloxsidge, A.P. Dowling, and P.J. Langhorne, Reheat buzz : an acoustically coupled combustion instability. Part 2. Theory, *J. Fluid Mech.*, vol. 193, pp. 445-473, 1988.
3. A.P. Dowling, Reheat buzz : an acoustically coupled combustion instability., AGARD-CP-450, pp. 10.1-10.16
4. A.P. Dowling, The Calculation of Thermoacoustic Oscillation, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 180, pp. 557-581, 1995.
5. Philip Hill and Carl Peterson, *Mechanics and Thermodynamics of Propulsion*, Addison Wesley, Second Edition, 1992.
6. C.J. Lee, J. Buckmaster and M. Diccico, Intrinsic and Acoustic Instabilities in Flames Fueled by Multiphase Mixtures, *Combust. Sci. and Tech.*, vol. 98, pp. 161-184, 1994.
7. B.E. Henderson and J.S. Lewis, Characteristics of Combustion Driven Pressure Oscillations in Advanced Turbo-Fan Engines with Afterburner., AGARD-CP-450, pp. 3.1-3.8
8. 김성룡, 이창진, 구형 연소기 내의 음향 교란에 의한 연소불안정., 항공우주공학회 추계학술발표회 논문집, pp. 101-104, 1994.
9. U. Hedge, H.D. Ross, and L.T. Facca, Longitudinal Mode Instabilities of Particle Cloud Combustors in a Reduced Gravity Environment, *Combust. Sci. and Tech.*, vol. 94, pp. 279-294, 1993.
10. M.A. Macquisten and A.P. Dowling, Combustion Oscillations in a Twin-Stream Afterburner, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 188, pp. 545-560, 1995.
11. M.A. Macquisten and A.P. Dowling, Low-frequency Combustion Oscillations in a Model Afterburner, *Combustion and Flame*, vol. 94, pp. 253-264, 1993.
12. Lawrence E. Kinsler, Austin R. Frey, Alan B. Coppens, and James V. Sanders, *Fundamentals of Acoustics*, Third Edition, John Wiley & Sons, 1980.

Appendix

열량 교환이 없고 일정한 열량 방출만 있는 경우의 행렬 X는 다음과 같다.

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 + \bar{M}_1 & -(1 - \bar{M}_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (1 + \bar{M}_1)e_1 & -(1 - \bar{M}_1)e_2 & -(1 + \bar{M}_2)e_3 \bar{c}_1 / \bar{c}_2 & (1 - \bar{M}_2)e_4 \bar{c}_1 / \bar{c}_2 & \bar{M}_2 \bar{c}_1 / \bar{c}_2 & 0 \\ (1 + \bar{M}_1)^2 e_1 & (1 - \bar{M}_1)^2 e_2 & -(1 + \bar{M}_2)^2 e_3 & -(1 - \bar{M}_2)^2 e_4 & \bar{M}_2^2 & 0 \\ (1 + \bar{M}_1)(a_1 + r_1)e_1 & (1 - \bar{M}_1)(a_2 + r_2)e_2 & -(1 + \bar{M}_2)(a_3 + r_3)e_3 \frac{\bar{c}_2}{c_1} & -(1 - \bar{M}_2)(a_4 + r_4)e_4 \frac{\bar{c}_2}{c_1} & (\frac{1}{2} \bar{M}_2^3 - r_5) \frac{\bar{c}_2}{c_1} & 1 \\ 0 & 0 & e_5 & e_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

열량교환이 $Q'(t) = kc_p(\bar{T}_{0,2} - \bar{T}_{0,1})(\bar{\rho}_1 u'_1 + \rho'_1 \bar{u}_1)$ 로 주어지는 경우는 마지막 행을 다음으로 대체하면 된다.

$$\left| \begin{array}{cccc|cccc} -kc_p(\bar{T}_{0,2} - \bar{T}_{0,1})(1 + \bar{M}_1) \frac{e_1}{c_1} & kc_p(\bar{T}_{0,2} - \bar{T}_{0,1})(1 - \bar{M}_2) \frac{e_2}{c_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right|$$

$$\begin{aligned} \text{여기서} \quad e_1 &= e^{-i\omega h/\bar{c}_1(1+\bar{M}_1)}, & e_2 &= e^{-i\omega h/\bar{c}_1(1-\bar{M}_1)} \\ e_3 &= e^{-i\omega h/\bar{c}_2(1+\bar{M}_2)}, & e_4 &= e^{-i\omega h/\bar{c}_2(1-\bar{M}_2)} \\ e_5 &= e^{-i\omega L/\bar{c}_2(1+\bar{M}_2)}, & e_6 &= e^{i\omega L/\bar{c}_2(1-\bar{M}_2)} \\ a_1 &= \bar{M}_1 + \frac{1}{2} \bar{M}_1^2 + (\gamma - 1)^{-1}, & a_2 &= \bar{M}_1 - \frac{1}{2} \bar{M}_1^2 - (\gamma - 1)^{-1} \\ a_3 &= \bar{M}_2 + \frac{1}{2} \bar{M}_2^2 + (\gamma - 1)^{-1}, & a_4 &= \bar{M}_2 - \frac{1}{2} \bar{M}_2^2 - (\gamma - 1)^{-1} \\ r_1 &= \frac{4\alpha\epsilon(\gamma - 1) \bar{T}_1^4}{\gamma \rho_1 \bar{c}_1 (1 + \bar{M}_1)}, & r_2 &= \frac{4\alpha\epsilon(\gamma - 1) \bar{T}_1^4}{\gamma \rho_1 \bar{c}_1 (1 - \bar{M}_1)} \\ r_3 &= \frac{4\alpha\epsilon(\gamma - 1) \bar{T}_2^4}{\gamma \rho_2 \bar{c}_2 (1 + \bar{M}_2)}, & r_4 &= \frac{4\alpha\epsilon(\gamma - 1) \bar{T}_2^4}{\gamma \rho_2 \bar{c}_2 (1 - \bar{M}_2)} \\ r_5 &= \frac{4\alpha\epsilon \bar{T}_2^4}{\gamma \rho_2 \bar{c}_2} \end{aligned}$$