

비압축성 점성유동 해석에서의 Multi-Stage Runge-Kutta 기법의 수렴특성 연구
 CONVERGENCE CHARACTERISTICS OF MULTI-STAGE RUNGE-KUTTA METHODS
 IN INCOMPRESSIBLE VISCOUS FLOW COMPUTATIONS

박원찬¹, 문영준²
 Won C. Park, Young J. Moon

Objective of the present study is to examine the convergence characteristics of the various multi-stage Runge-Kutta methods in solving the incompressible Navier-Stokes equations of a time-marching form casted by the artificial compressibility method. Convergence characteristics are examined over 2-stage, 4-stage and hybrid type (using 4-, 3-, 2-stages sequentially) Runge-Kutta methods for a laminar lid-driven cavity flow, and also for a turbulent bump channel flow using Chien's low-Reynolds number turbulence model. Efforts are made to establish a stable and fast convergent multi-stage Runge-Kutta method with minimal artificial dissipations.

1. 서론

점성유동 해석에서 Navier-Stokes 방정식을 풀기 위한 시간 적분 방법으로는 크게 외재적 적분과 내재적 적분으로 나눌 수 있다. 외재적 적분 기법으로는 다단계 Runge-Kutta 기법이 가장 널리 쓰이고 있다. 본 연구에서는 다단계에서의 Runge-Kutta 기법들의 안정성과 해의 수렴성 특성을 비교하여 보았다.

본 연구에서 사용된 비압축성 2차원 코드는 Navier-Stokes 방정식의 연속방정식을 가상의 압축성 유동형태로 만들어 시간전진형의 기법을 적용하는 artificial compressibility 기법[1]을 사용하였으며 셀 중심에 기초한 유한체적법[2,3,4]과 중앙차분법을 사용하였다. 외재적 적분의 단점인 시간간격의 제한을 보완하기 위하여 수렴가속화 방법으로 Local Time Stepping[3,4]과 Implicit Residual Smoothing[3,4,5] 방법을 사용하였다. 본 연구에서는 2-stage, 4-stage, hybrid type (4-, 3-, 2-stage를 순차적으로 사용) Runge-Kutta 기법을 비교하기 위해서 층류 유동으로는 lid-driven cavity 유동 문제를, 난류 유동으로는 5% 두께의 범프채널 유동 문제를 계산하여 각 단계별 해의 수렴성과 안정성을 비교하였다. 난류 모델로는 저레이놀즈수 $k-\epsilon$ 모델 중의 하나인 Chien 모델[7]을 사용하였다.

2. 수치해석 방법

2-1 지배방정식

이차원 비압축성 Navier-Stokes 방정식을 일반좌표계 (ξ, η) 로 좌표 변환한 후 인공압축성기법을 이용하여 시간전진형태로 만든 후 다시 보존형 벡터 꼴의 무차원화된 식은 아래 식(1)과 같다.

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial \hat{E}_v}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}_v}{\partial \eta} \right) \quad (1)$$

여기서

$$\hat{Q} = J^{-1} \begin{bmatrix} \hat{p} \\ u \\ v \end{bmatrix}, \quad \hat{E} = J^{-1} \begin{bmatrix} \beta U \\ uU + \xi_x \hat{p} \\ vU + \xi_y \hat{p} \end{bmatrix}, \quad \hat{F} = J^{-1} \begin{bmatrix} \beta V \\ uV + \eta_x \hat{p} \\ vV + \eta_y \hat{p} \end{bmatrix}, \quad Im = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{E}_v = J^{-1} \left\{ (\xi_x^2 + \xi_y^2) Im \frac{\partial \hat{Q}}{\partial \xi} + (\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) Im \frac{\partial \hat{Q}}{\partial \eta} \right\}$$

$$\hat{F}_v = J^{-1} \left\{ (\eta_x \xi_x + \eta_y \xi_y) Im \frac{\partial \hat{Q}}{\partial \xi} + (\eta_x^2 + \eta_y^2) Im \frac{\partial \hat{Q}}{\partial \eta} \right\} \quad (2)$$

2-2 공간 적분

지배방정식에 대한 이산화는 격자 중심식 유한체적법과 공간에 대한 2차 중앙차분법을 사용하였다. 지배방정식 (1)을 이산화하여 나타내면 식(3)과 같다.

$$\frac{\Delta Q_i}{\Delta t_i} = -J_i \sum_{j,k=0}^n [(\hat{E} - Re^{-1} \hat{E}_v)_{A_x} + (\hat{F} - Re^{-1} \hat{F}_v)_{A_y} - D], \quad (3)$$

여기서 A_x, A_y 는 면적의 방향 미분벡터이고, $j = k(i)$ 는 i 격자의 주위의 격자들의 지수들

1. 고려대학교 기계공학과 대학원
 2. 고려대학교 기계공학과 (136-701, 서울특별시 성북구 안암5가 1)

나타낸다. 또한 D항은 인공점성항을 나타낸다.

2-3 인공점성항

2차의 중앙차분법을 사용함으로써 발생하는 해의 불안정성을 보정하고 수렴성을 향상시키기 위하여 4차의 인공점성항을 사용하였다. 여기서는 4차 미분형태의 Standard 모델과 Spectral radius로 스케일된 모델[6]의 2가지 type의 인공점성항이 사용되었고 각각의 특성을 비교하였다.

$$DQ = (D_\xi + D_\eta)Q \quad (4)$$

1. standard model

$$D_\xi Q = -\frac{\epsilon}{J} Q_{\xi\xi\xi\xi} \quad (5)$$

2. non-linear model

$$D_\xi Q = -\Lambda_\xi V_4 Q_{\xi\xi\xi\xi} \quad (6)$$

$$-\Lambda_\xi = \frac{\lambda_\xi \Phi_\xi}{J} \quad (7)$$

$$\Phi_\xi = 1 + \left(\frac{\lambda_\eta}{\lambda_\xi}\right)^\sigma, \quad \Phi_\eta = 1 + \left(\frac{\lambda_\xi}{\lambda_\eta}\right)^\sigma \quad (8)$$

$$\lambda_\xi = |U| + a\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}, \quad \lambda_\eta = |V| + a\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2} \quad (9)$$

$$V_4 = \max(0, \mu_4), \quad \mu_4 = \frac{1}{128} \sim \frac{1}{64}$$

위 식(8)에서 지수 σ 는 일반적으로 $0 < \sigma \leq 1$ 의 값이 사용된다. 이차원인 경우에는 $\sigma = 2/3$ 의 값이 사용된다.

2-4 시간 적분과 수렴가속화 기법

시간 적분 방법으로는 의제적 K -stage Runge-Kutta 기법을 사용하였다.

$$\begin{aligned} Q_i^{(0)} &= Q_i^n \\ Q_i^{(k)} &= Q_i^{(0)} - \alpha_k \Delta t_i R(Q_i^{(k-1)}), \quad (k=1,2,3,\dots,K) \\ Q_i^{n+1} &= Q_i^{(K)} \end{aligned} \quad (10)$$

윗 식에서 α_k 는 k^{th} -stage에서의 계수를 나타낸다. 각 단계별의 계수들과 최대도 사용가능한 CFL수 λ 는 아래의 표로 나타내어진다.

K	α_1	α_2	α_3	α_4	λ
2	1.2	1			0.95
3	0.6	0.6	1		1.5
4	1/4	1/3	1/2	1	2.8

계산시간을 단축하기 위해서 수렴가속화 방법으로 Local time stepping과 Implicit residual smoothing 기법을 사용하였다. Local time stepping은 해를 구하는 전체 영역에 같은 시간 간격을 주는 것과는 달리 각 격자마다 같은 CFL수를 적용하여 안정성 범위 내에서 최대한의 시간 간격을 주어 수렴을 가속화시키는 기법이고, Implicit residual smoothing은 안정성 범위를 넘는 시간 간격을 주고 나온 불안정한 해를 아래 식(11)을 사용하여 완화시켜 안정화하는 기법이다.[5] 여기서 CFL*는 Implicit residual smoothing에 의해 확장된 CFL수를 나타내고 CFL은 보통 사용하는 CFL수를 의미한다,

$$(1 - \epsilon_\xi \delta_{\xi\xi})(1 - \epsilon_\eta \delta_{\eta\eta}) \bar{R}_k = R_k \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_\xi &= \text{MAX} \left\{ 0, \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\text{CFL}^*}{\text{CFL}} \frac{\lambda_\xi}{\lambda_\xi + \lambda_\eta} \Phi_\xi \right)^2 - 1 \right] \right\} \\ \epsilon_\eta &= \text{MAX} \left\{ 0, \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\text{CFL}^*}{\text{CFL}} \frac{\lambda_\eta}{\lambda_\xi + \lambda_\eta} \Phi_\eta \right)^2 - 1 \right] \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

2-5 Chien 저레이놀즈수 $k-\epsilon$ 난류모델

저레이놀즈수에서의 난류점성계수와 $k-\epsilon$ 에 대한 기초방정식은 다음과 같다.

$$\mu_t = c f_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (13)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial(U_j k)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \mu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_j}{\partial x_i} - \epsilon - \epsilon_0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \frac{\partial(U_j \epsilon)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] + C_{e1} f_1 \frac{\epsilon}{k} \mu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_j}{\partial x_i} - C_{e2} f_2 \frac{\epsilon^2}{k} + E \quad (15)$$

여기서 ϵ_0 은 $y = 0$ 에서의 ϵ 의 값이고, Chien모델[7]에서의 경험상수의 값은 다음과 같다.

$$C_\mu = 0.09, \quad C_{e1} = 1.35, \quad C_{e2} = 1.80, \quad \sigma_k = 1, \quad \sigma_\epsilon = 1.3 \quad (16)$$

감쇠함수(damping function)인 $f_1, f_2, f_\mu, \epsilon_0$ 그리고 E 는 다음과 같다.

$$f_\mu = 1 - e^{-0.0115y^+}, \quad f_1 = 1, \quad f_2 = 1 - 0.22 e^{-(Re_T/6)^2}, \quad \epsilon_0 = 2\nu \frac{k}{y^2},$$

$$E = -2\nu \frac{\epsilon}{y^2} e^{-y^+/2}, \quad y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu}, \quad Re_T = \frac{k^2}{\epsilon \nu} \quad (17)$$

Chien 저레이놀즈수 $k-\epsilon$ 방정식을 일반좌표계로 변환한 후 얇은 경계층 근사법을 사용하여 나타내면 식(18)과 같다.

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial \hat{E}_v}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}_v}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{Re} \hat{S} \quad (18)$$

$$\hat{Q} = J^{-1} \begin{bmatrix} k \\ \epsilon \end{bmatrix}, \quad \hat{E} = J^{-1} \begin{bmatrix} kU \\ \epsilon U \end{bmatrix}, \quad \hat{F} = J^{-1} \begin{bmatrix} kV \\ \epsilon V \end{bmatrix}$$

$$\hat{E}_v = J^{-1} \begin{bmatrix} \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \left\{ (\nabla \xi \cdot \nabla \xi) \frac{\partial k}{\partial \xi} \right\} \\ \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \left\{ (\nabla \xi \cdot \nabla \xi) \frac{\partial \epsilon}{\partial \xi} \right\} \end{bmatrix}, \quad \hat{F}_v = J^{-1} \begin{bmatrix} \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \left\{ (\nabla \eta \cdot \nabla \eta) \frac{\partial k}{\partial \eta} \right\} \\ \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \left\{ (\nabla \eta \cdot \nabla \eta) \frac{\partial \epsilon}{\partial \eta} \right\} \end{bmatrix}$$

$$\hat{S} = J^{-1} \begin{bmatrix} P - \epsilon + D \\ (C_1 f_1 P - C_2 f_2 \epsilon) \frac{\epsilon}{k} + E \end{bmatrix}$$

여기서 생성항 P 는 다음과 같다.

$$P = \left\{ \mu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial \xi_j} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_j}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial U_k}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_k} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right\} \frac{\partial U_i}{\partial \xi_j} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i}$$

그리고 난류레이놀즈수와 무차원 벽거리함수 y^+ 도 식(19)과 같이 바뀐다.

$$Re_T = \frac{k^2}{\nu \epsilon}, \quad y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu} \sqrt{Re} \quad (19)$$

3. 결과 및 고찰

3-1 인공점성항의 영향

Standard 모델과 Spectral radius로 스케일된 비선형 모델의 인공점성항의 최적감쇠계수 값을 RK2(2-stage Runge-Kutta method)와 RK4(4-stage)에서 각각 찾아보았다. 여기서 말하는 최적감쇠계수 값은 안정한 범위 내에서 해의 정확도를 보장하는 최소의 계수 값을 뜻한다. 수치 실험은 $Re = 5,000$ 의 비균일 50×50 격자를 사용한 비점성 층류 lid-driven cavity 유동으로 하였고 격자와 유선함수등고선들은 그림 1에 나타나있다. Standard 모델의 인공점성항을 사용하였을 때는 RK2가 RK4보다 좋은 감쇠특성을 나타내고 있다. RK2가 RK4보다 안정적으로 수렴하기 때문에 RK4의 경우보다 더 작은 감쇠계수 값을 사용하여 해의 정확도를 증가시킬 수 있었다. 그러나 RK2의 CFL수가 RK4의 절반이므로 해의 수렴은 RK4보다 느림을 알 수 있다.(그림2) 비선형 모델의 인공점성항을 사용하면 RK2와 RK4의 해의 정확도는 거의 같게 나타났다. 또한 인공점성항의 두 모델을 비교해보면 비선형 모델이 Standard 모델보다 조금 더 정확한 해를 나타냈다. 위 계산에 CFL수는 RK2와 RK4에 각각 $\lambda^* = 2.0$ 과 4.0 을 사용하였고 결과들은 표 1에 나타나 있다.

3-2 다단계 Runge-Kutta 기법의 수렴성

Non-linear 모델의 인공점성항을 사용하여 RK2, RK4와 hybrid type인 RK432의 수렴성의 민감도를 살펴보았다. Implicit residual soothing을 사용하면 CFL수를 사용하지 않았을 때의 2배의 값을 쓸 수 있으므로 이번 계산에서는 RK4의 CFL수를 일반적으로 허용된 최대값인 $\lambda^* = 5.6$ 을 사용하였고 그에 따라 $\mu_4 = 0.005$ 로 전의 경우보다 증가된 값을 사용하였다.

RK432의 경우에는 4-, 3-, 2-의 각 stage별로 $\lambda^* = 5.6, 3.0, 2.0$ 을 사용하였고 RK2에서는 $\lambda^* = 2.0$ 을 사용하였다. 수렴선도(그림 3)를 보면 RK4의 경우에는 수렴하지 못하였는데 이는 $\mu_4 = 0.005$ 로는 감쇠가 부족하기 때문으로 보인다. 이에 반해 RK432와 RK2의 경우에는 안정적으로 수렴하였고 해의 정확성도 benchmark solution(Ghia et al. [8])과 비교하였을 때 좋은 결과를 나타내었다. 그러나 RK4의 경우에는 해의 정확성이 떨어지는 데 이는 해가 수렴하지 못함에 기인한다.(그림 4) 또한 격자의 영향에 대해서도 살펴보고자 80×80 격자에서도 같은 계산을 수행하였다. 역시 RK432와 RK2가 비교적 안정적으로 수렴하는 데 비하여 RK4는 안정적으로 수렴하지 못함을 알 수 있다.(그림5) 위의 결과들은 표 2에 나타나있다.

3-3 CFL수 λ^* 와 인공점성계수 μ_4 의 관계

RK4에서의 CFL수 λ^* 와 해의 안정성 범위내의 인공점성계수의 최소값과의 관계를 살펴보았다. λ^* 가 4.0 이하인 경우에는 $\mu_4 = 0.003$ 으로 일정하고 $\lambda^* = 5.0$ 이상인 경우에는 CFL수에 따라 μ_4 의 최소값도 같이 증가함을 알 수 있다.(그림 6,7, 표3) λ^* 가 4.0보다 작은 경우에는 해의 수렴이 너무 느리게 되어 의미가 없고 실제로 사용하는 값인 $\lambda^* = 5.0$ 부근에서 μ_4 의 최소값이 λ^* 에 따라 변하므로 인공점성항의 영향을 많이 받는다는 사실을 알 수 있다.

3-4 난류유동에서의 수렴성

난류유동의 문제로는 $Re = 200,000$ 의 5% 두께의 범프채널 유동을 계산하여 그 결과를 비교하였다.(그림8) 난류유동에서는 층류유동과는 달리 Non-linear 모델의 인공점성항을 사용했을 때는 해가 발산하여 Standard model($\epsilon = 0.1$)을 사용하였고, CFL수도 층류유동 계산 때의 절반 이하 값을 사용하여야만 해가 수렴하였다. 수렴선도(그림 9)을 보면 RK4의 경우는 $\lambda^* = 0.5$ 로 RK2의 1.0보다도 작은 값을 사용했음에도 수렴하지 않았고, RK432의 경우는 모든 stage에서 $\lambda^* = 1.0$ 으로 고정하여 사용하면 안정적이긴 하지만 RK2보다 해의 수렴이 빠르지 않아 비효율적이다. 그러므로 난류유동의 경우에는 RK2가 적합한 것으로 나타났다.

4. 결론

다단계 Runge-Kutta 기법의 여러 가지 단계(2-, 4-, 432-)의 해의 수렴성과 안정성을 인공점성항과 관련하여 여러 가지 경우에 대하여 적용하여 결과를 비교해 보았고 그 내용을 정리하며 다음과 같다.

- (1) 층류유동의 경우에는 RK2와 RK432가 RK4에 비해 비교적 안정적으로 수렴하였고 해의 정확도도 만족스러웠다. RK4의 경우에는 인공점성항의 크기가 해의 안정적인 수렴에 영향을 많이 주고, 인공점성항은 비선형 모델을 사용이 Standard 모델에 비해 조금 나은 결과를 가져왔다.
- (2) 난류유동의 경우에는 RK2만이 비교적 좋은 결과를 나타내었으며 인공점성항은 Standard 모델만이 사용 가능하였다. 그러나 난류유동에 비해서 CFL수 λ^* 를 절반이하로 줄여야 수렴하는 등 문제점들이 있어 앞으로 더 연구가 필요하다.

5. 참고문헌

- [1] Chorin, A.J., "A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems," J. Comp. Phys., Vol. 2, 1967.
- [2] Hoffmann, K.A., "Computational Fluid Dynamics for Engineers," A Publication of Engineering Education System, Austin, Texas, USA, 1989.
- [3] Chima, R.V. and Turkel, E., "Comparison of Three Explicit Multigrid Methods for the Euler and Navier-Stokes Equations," NASA Technical Memorandum 88878, ICOMP-86-3.
- [4] Chima, R.V., "Viscous Three-Dimensional Calculations of Transonic Fan Performance," NASA TM-103800, 1991
- [5] Arnone, A., "Viscous Analysis of Three Dimensional Rotor Flow Using a Multigrid Method," Journal of Turbomachinery, July 1994, Vol.114.
- [6] Jameson, A., Schmidt, W. and Turkel, E., "Numerical Solutions of the Euler Equations by Finite Volume Methods Using Runge-Kutta Time-Stepping Schemes," AIAA paper 81-1259, 1981.
- [7] Chien, K.-Y., "Predictions of Channel and Boundary-Layer Flows with a Low-Reynolds-Number Turbulence Model", AIAA Journal, Vol.1.20, No.1, 1982
- [8] Ghia, U., Ghia, K.N., and Shin, C.T., "High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method," J. Comp. Phys., Vol. 48, 1982

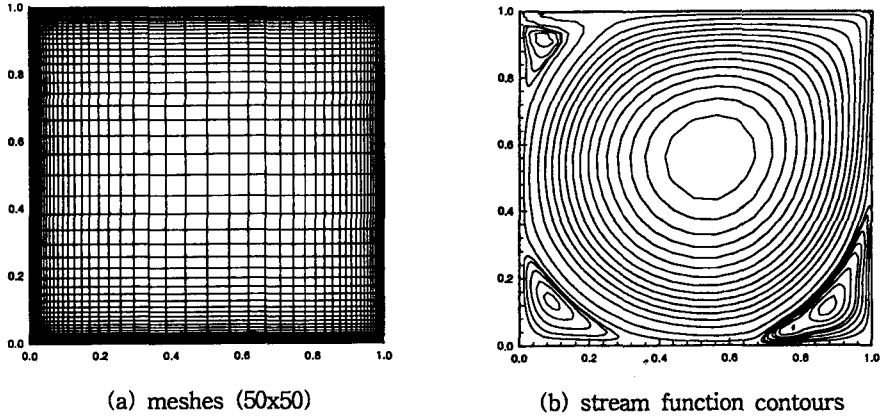


Fig. 1 Lid driven cavity flow, $Re=5,000$ (50x50 meshes)

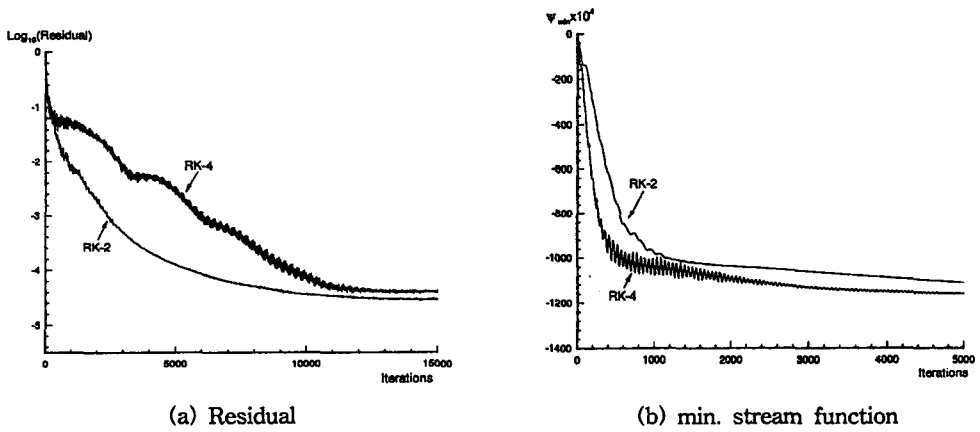
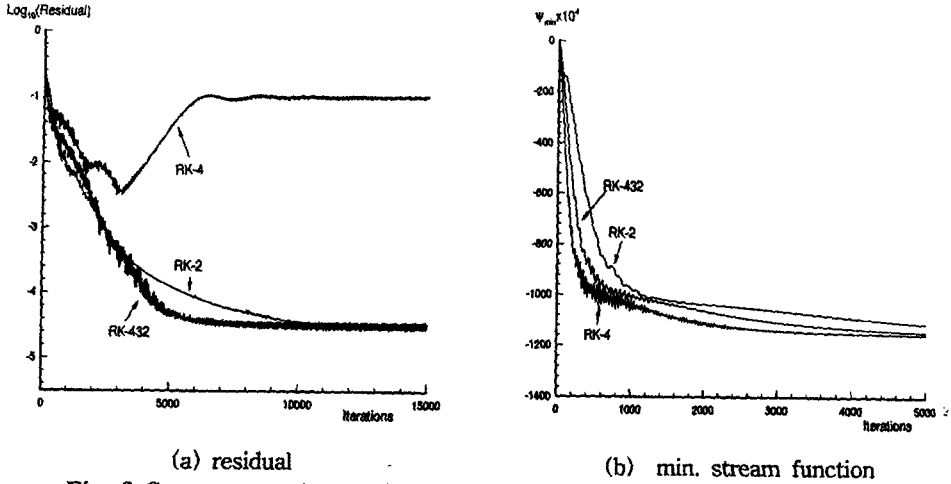


Fig. 2 Convergence characteristics of multi-stage Runge-Kutta methods

Table 1. Comparison of solutions between standard and non-linear A.D. models, $Re=5,000$

				on vertical centerline		primary vortex		
				U_{min}	y_{min}	ψ	x	y
Ghia				-0.4364	0.0703	-0.1190	0.5117	0.5352
standard model	RK-2	ϵ	0.05	-0.4106	0.0927	-0.1157	0.5309	0.5309
	RK-4		0.2	-0.4010	0.0927	-0.1134	0.5309	0.5309
non-linear model	RK-2	μ_4	0.003	-0.4131	0.0927	-0.1165	0.5309	0.5309
	RK-4		0.003	-0.4133	0.0927	-0.1167	0.5309	0.5309



(a) residual (b) min. stream function
Fig. 3 Convergence characteristics of various multi-stage Runge-Kutta methods (50x50 meshes)

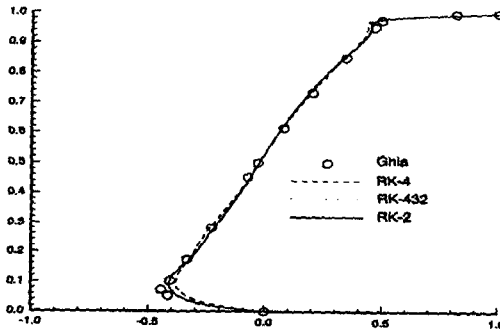
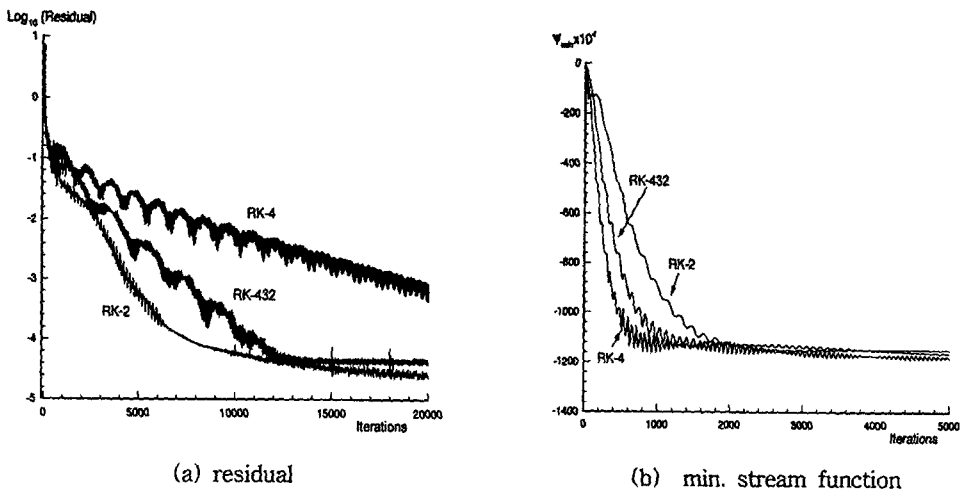


Fig. 4 Centerline u-velocity comparison, $Re=5,000$ (50x50 meshes)



(a) residual (b) min. stream function
Fig. 5 Convergence characteristics of various multi-stage Runge-Kutta methods (80x80 meshes)

Table 2. Comparison of solutions for various stages of Runge-Kutta methods, Re=5,000

				on vertical centerline		primary vortex		
				U_{min}	y_{min}	ψ	x	y
Ghia				-0.4364	0.0703	-0.1190	0.5117	0.5352
50x50	RK-2	μ_4	0.003	-0.4131	0.0927	-0.1165	0.5309	0.5309
	RK-432		0.005	-0.4088	0.0927	-0.1155	0.5309	0.5309
	RK-4		0.005	-0.3830	0.0927	-0.1172	0.5309	0.5309
80x80	RK-2		0.003	-0.4298	0.0845	-0.1192	0.5241	0.5241
	RK-432		0.005	-0.4265	0.0845	-0.1185	0.5241	0.5241
	RK-4		0.005	-0.4265	0.0845	-0.1185	0.5241	0.5241

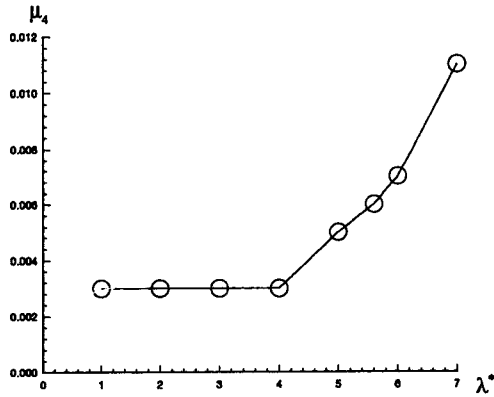


Fig. 6 Relation between λ^* and μ_4
(RK-4 50x50 meshes)

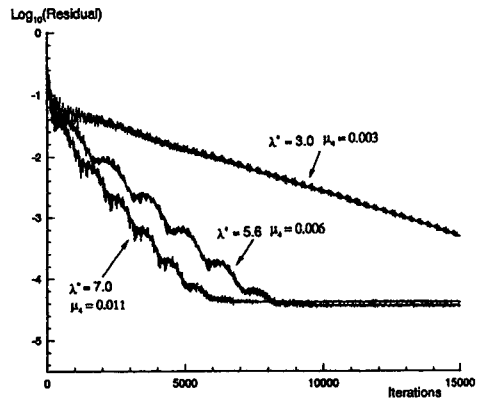
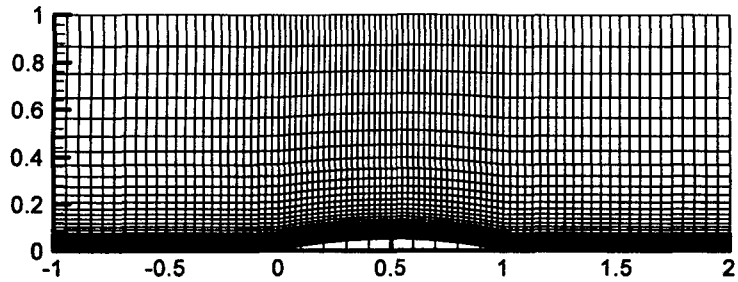


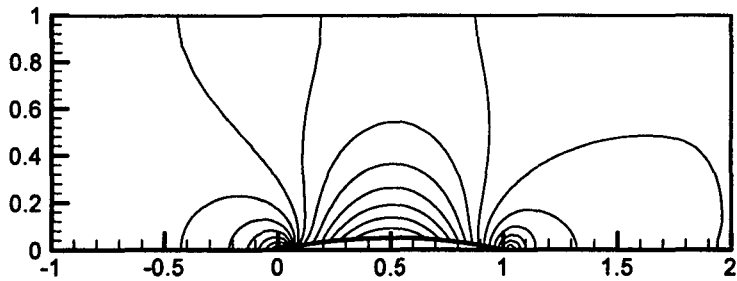
Fig. 7 Convergence characteristics of RK4
with various λ^* and μ_4

Table 3. Relation between CFL λ^* and minimum μ_4 (R.K.-4stage)

CFL	μ_4	U_{min}	ψ	CFL	μ_4	U_{min}	ψ
7.0	0.011	-0.3972	-0.1124	4.0	0.003	-0.4133	-0.1167
6.0	0.007	-0.4046	-0.1144	3.0	0.003	-0.4133	-0.1166
5.6	0.006	-0.4067	-0.1149	2.0	0.003	-0.4132	-0.1163
5.0	0.005	-0.4088	-0.1155	1.0	0.003	-0.4108	-0.1140

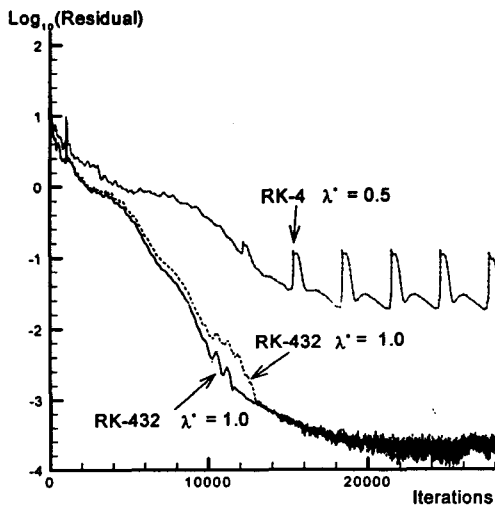


(a) Meshes (88x56)

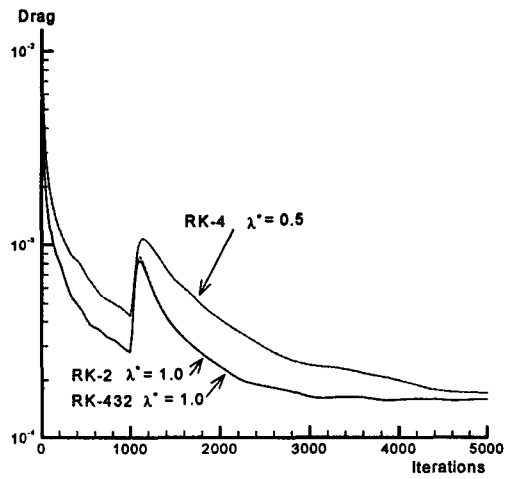


(b) Pressure contours

Fig. 8 5% Bump channel flow, $Re=200,000$ (88x56 meshes)



(a) Residual



(b) Drag by τ_w

Fig. 9 Convergence characteristics of various multi-stage Runge-Kutta methods