

SLR 알고리즘을 이용한 RF 펄스 설계 및 그 SLICE PROFILE

이 윤, 주희연, 백원광, 이상현
고려대학교 자연과학대학 전자및정보공학부

RF Pulse Design and Its Slice Profile Using SLR Algorithm

Y. Yi, H. Y. Joo, W. K. Baik, S. H. Lee

Department of Electronics & Informatics, College of Science, Korea University.

ABSTRACT

Several selective excitation pulses are used in MRI. Because of the nonlinearity of the Bloch equation, the pulse problem is nonlinear generally. Recently, Shinnar & Le Roux have proposed a direct solution of this problem.

In this paper, we introduce the SLR algorithm and design pulses using SLR algorithm. This SLR pulse produces a specified slice profile. For example, we demonstrate the sinc function pulse with piece wise constant duration Δt . Further, we will design $\pi/2$ pulse and slice profile.

서론

RF 펄스 설계 문제는 Bloch equation의 비선형성에서 기인한다. 이에 slice selective 펄스 설계의 새로운 방법이 Shinnar와 Le Roux에 의해 독립적으로 같은 시기에 제안되었다. 이는 Bloch equation의 이산 근사에 기초한다. RF 펄스 설계 문제는 그래서 디지털 필터 설계 문제로 귀결되고 여기서 결과 디지털 필터는 다시 RF 펄스로의 변환이 가능하다.

우선 SLR 알고리즘과 Bloch equation의 해를 개관하고 sinc 펄스 형태의 RF 펄스를 도입하여 그 slice profile의 모습을 보겠다. 그리고 예로써 $\pi/2$ 펄스를 중심으로 SLR 펄스와 해당 slice profile을 준비하였다.

SLR 알고리즘

Bloch equation은 relaxation 효과를 무시하면 하나의 rotation으로 표현되어진다. Bloch equation의 해는 결국 spin domain에서 표현되는 2*2 단위 행렬로 표현가능하다. SLR 알고리즘은 Bloch equation의 spin domain 버전으로의 이산 근사형태로 인식된다. 이는 나아가 두 개의 복소 다항식으로 간략해진다. 따라서 RF 설계는 잘 알려진 디지털 필터 알고리즘을 사용하여 풀수 있는 복소 다항식 설계 문제가 된다.

Relaxation을 무시할 때 Bloch equation은 다음과 같다

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= \gamma(M \times B) \begin{bmatrix} i & j & k \\ M_x & M_y & M_z \\ B_{ix} & B_{iy} & G \cdot r \end{bmatrix} \\ &= \gamma \begin{bmatrix} 0 & G \cdot r & -B_{iy} \\ -G \cdot r & 0 & B_{ix} \\ B_{iy} & -B_{ix} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

이때 $B_1 = B_{1,x} + iB_{1,y}$ 는 RF field이고, G 는 gradient amplitude, $+x$ 축을 따라 주어진다고 가정한다. 이 식의 해는 $M(T) = RM(0)$ 이고, R 은 3*3 orthonormal 행렬로서 n 개의 pulse sequence가 적용될 때 해는 각각의 rotation R_i 의 곱으로 다음과 같다.

$$R = R_n \dots R_2 R_1$$

이 rotation R 은 또한 2*2 단위행렬로 표현되어진다.

$$Q = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta^* \\ \beta & \alpha^* \end{bmatrix}$$

여기서 α, β 는 Cayley-Klein parameter들로

$$\alpha = \cos \Phi/2 - i n_z \sin \Phi/2 \quad (1)$$

$$\beta = -i(n_x + i n_y) \sin \Phi/2 \quad (2)$$

n 은 rotation axis이고, Φ 는 rotation angle이다. Cayley-Klein parameter는 다음식을 만족한다.

$$\alpha \alpha^* + \beta \beta^* = 1 \quad (3)$$

RF pulse가 piece-wise constant라 가정하면(그림1), j 번째 RF pulse sample은 complex amplitude B_{1j} 와 duration Δt 갖게 될 때 rotation parameter는 다음과 같다.

$$n_j = \frac{\gamma \Delta t}{|\Phi_j|} (B_{1,x,j}, B_{1,y,j}, Gx)$$

$$\phi_j = -\gamma \Delta t \sqrt{|B_{1,j}|^2 + (Gx)^2}$$

따라서 j 번째 interval 동안의 Cayley-Klein parameter는

$$a_j = \cos \Phi_j/2 - i n_{z,j} \sin \Phi_j/2$$

$$b_j = -i(n_{x,j} + i n_{y,j}) \sin \Phi_j/2$$

가 되고 spin-domain rotation과 total rotation은 각각 다음과 같다.

$$Q_j = \begin{bmatrix} a_j & -b_j^* \\ b_j & a_j^* \end{bmatrix}$$

$$Q = Q_n Q_{n-1} \dots Q_1$$

Q 를 알게 되면 우리가 원하는 것은 어떤 초기값에서

주어진 결과 magnetization으로서 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} M_{xy}^+ \\ M_{xy}^- \\ M_z^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha^*)^2 & -\beta^2 & 2\alpha^*\beta \\ -(\beta^*)^2 & \alpha^2 & 2\alpha\beta^* \\ -\alpha^*\beta^* & -\alpha\beta & \alpha\alpha^* - \beta\beta^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{xy}^- \\ M_{xy}^+ \\ M_z^- \end{bmatrix}$$

이 때, $M_{xy} = M_x + iM_y$ 이다.

Cayley-Klein parameter 들이 selective excitation pulse 동안 결정되어지면 관심있는 profile을 계산하기가 쉽다.

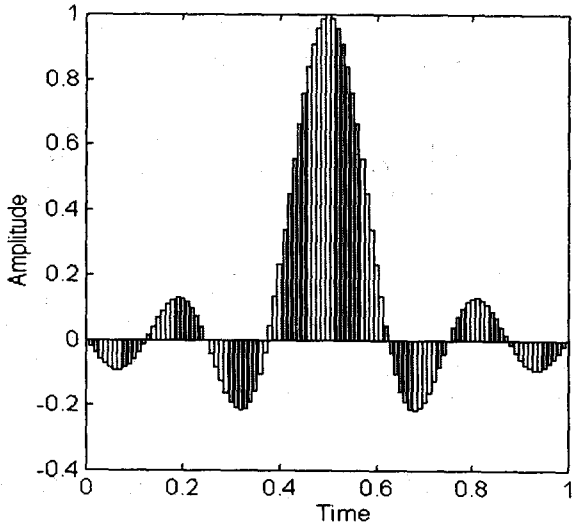


그림 1. Piece-wise constant RF

예로, 초기 magnetization이 $M^- = (0, 0, M_0)^T$ 일 때, excitation slice profile 과 inversion slice profile 은 각각 다음과 같다.

$$M_{xy}^+ = 2\alpha^*\beta M_0 \quad (4)$$

$$M_z^+ = (\alpha\alpha^* - \beta\beta^*) M_0 \quad (5)$$

spin domain description 은 selective excitation pulse 들 동안에서 편리한 표현방법이다.

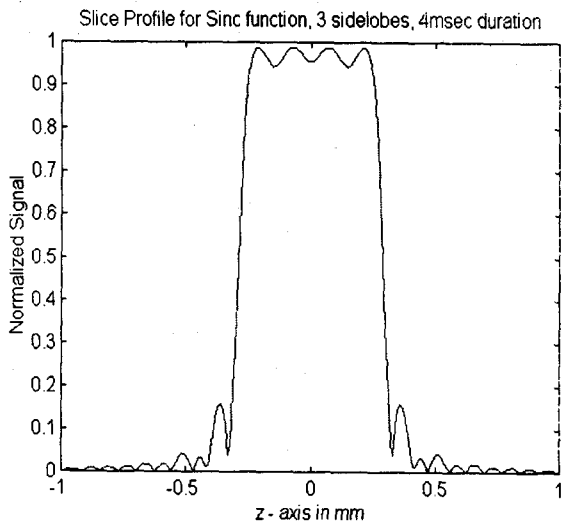


그림 2. Sinc RF 의 slice profile

(4)번 식의 slice profile을 그림 2 에 보였다.

시뮬레이션은 B filed값으로 sinc function 값을 사용하였고, Gradient값으로 8 mili tessa, 초기 magnetization이 위에서 보인 값을 기준으로 z축을 따라 분포되어 있을 때의 slice profile의 모양이다. 사용 프로그램은 matlab version 4.2를 이용하였다.

SLR transform.

SLR 알고리즘을 발전시킨 단계가 소위 hard 펄스 근사이다.

이 근사에서 state-space description은 두 다항식으로 표현되고, 이 두 복소다항식으로 PF 펄스를 그리려는 것을 forward SLR transform이라 한다.

hard pulse approximation 의 기본은 angle 이 작다면 rotation 은 두 Sequential rotation에 의해 모델화될 수 있다. 두 rotation angle이란 free precession에 의한 $-\gamma Gx\Delta t$ 와 각 $-\gamma B_1\Delta t$ 에 의한 것이다.

이 두 rotation 의 product를 Q_j 라하면

$$C_j = \cos(\gamma |B_{1,j}| \Delta t / 2)$$

$$S_j = i e^{i z B_{1,j}} \sin(\gamma |B_{1,j}| \Delta t / 2)$$

$$z = e^{i \gamma G x \Delta t} \text{ 일 때}$$

$$Q_j = \begin{bmatrix} C_j & -S_j^* \\ S_j & C_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^{1/2} & 0 \\ 0 & z^{-1/2} \end{bmatrix}$$

이고, $A_j = z^{j/2} \alpha_j$, $B_j = z^{j/2} \beta_j$ 일때, recursion은

$$\begin{bmatrix} A_j \\ B_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_j & -S_j^* \\ S_j & C_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{j-1} \\ B_{j-1} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} C_j & S_j^* z^{-1} \\ S_j & C_j z^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{j-1} \\ B_{j-1} \end{bmatrix}$$

이때, $A_0 = \alpha_0 = 1$ 이고 $B_0 = \beta_0 = 0$ 이다.

n번째 단계에서 Cayley - Klein 변수는 (n-1)차 이다. z^{-1} 에서 두 다항식은 다음과 같다.

$$A_n(z) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j z^{-j}$$

$$B_n(z) = \sum_{j=0}^{n-1} b_j z^{-j}$$

이렇게 RF 펄스 $B_1(t)$ 를 두 개의 복소 다항식 $A_n(z)$ 와 $B_n(z)$ 로 변환하는 것을 forward SLR transform 이라한다.

위에서와 같이 관련된 두 다항식 $A_n(z)$ 와 $B_n(z)$ 가 주어지면 SLR transform은 이 다항식을 생성하기 위해 적용된 RF 펄스를 계산하기 위해 역행렬을 취할 수 있게 된다. 이를 inverse SLR transform 이라 하며 수식은 앞의 식을 invert 해주면 된다.

$$\begin{bmatrix} A_{j-1} \\ B_{j-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_j & S_j^* \\ -S_j z & C_j z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_j \\ B_j \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} C_j A_j + S_j^* B_j \\ z(-S_j A_j + C_j B_j) \end{bmatrix} \quad (6)$$

이식의 unique 가 보장되므로 RF 펄스와 두 다항식 $A_n(z)$ 와 $B_n(z)$ 사이에 SLR transform이 성립한다.

$$B_1(t) \xleftarrow{SLR} [A_n(z), B_n(z)]$$

결국, 이러한 transform 관계는 RF 펄스 설계를 두 복소 다항식 설계로 귀결시킨다.

Polynomial 설계에 의한 RF 펄스 설계

두 다항식 $A_n(z)$ 와 $B_n(z)$ 를 설계하는 여러방법중에서 여기서는 $B_n(z) = e^{i\gamma Gx\Delta t}$ 가 위치 x 에서 $\varnothing/2$ 의 sine값에 비례하다는 사실을 이용한다.

$B_n(z)$ 는 최적화한 ideal slice profile을 근사하기위해 설계된다.

그런후, $A_n(z)$ 는 (3)의 성질을 이용하여 다음 식을 이끌어 낸다. ($z = e^{i\gamma Gx\Delta t}$)

$$|A_n(z)| = \sqrt{1 - B_n(z) B_n^*(z)} \quad (7)$$

$A_n(z)$ 와 $B_n(z)$ 가 구해지면 RF 펄스는 앞에서 언급했듯이 inverse SLR transform에 의해 얻어진다.

간단한 예로 $\pi/2$ 펄스를 설계한다고 가정하고(+x축을 따라), 이경우 $B_1(z)$ 는, $z = e^{i\gamma Gx\Delta t}$ 에서 다음과 같다.

$$B_1(e^{i\gamma Gx\Delta t}) = i(n_x + n_y) \sin \varnothing(x)/2 = i \sin \varnothing(x)/2$$

단, $\mathbf{n} = (1, 0, 0)^T$ 이고

In-slice에서 $B_1(e^{i\gamma Gx\Delta t}) = i \sin \pi/4 = i\sqrt{2}/2$

out-of slice에서 $B_1(e^{i\gamma Gx\Delta t}) = i \sin 0 = 0$ 이다.

Ideal $B_1(z)$ 가 주어지면 다항식의 근사를 원한다. 이러한 다항식을 설계하는 많은 방법들중에서 가장 자주 사용하는 방법이 remez 알고리즘을 이용한 Parks - McCellan (PM) 알고리즘이다. 이는 linear-phase finite impulse response (FIR) 혹은 digital filter를 설계하기 위함이다. Ideal $B_1(z)$ 와 다항식의 근사된 그림이 단위원 $z = e^{i\gamma Gx\Delta t}$ 를 따라 그려져 있다. (그림 3)

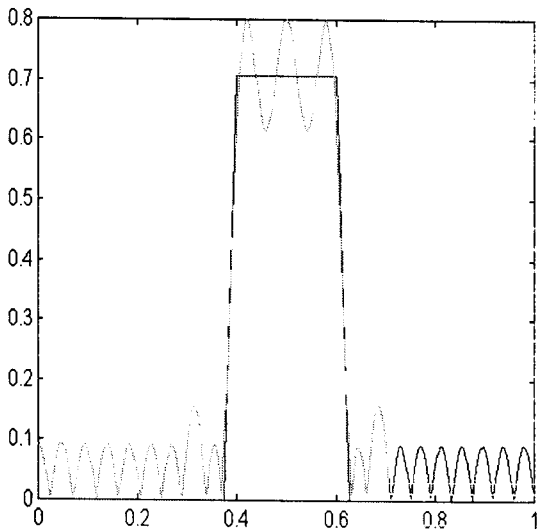


그림 3. Ideal B_n (solid line) 과 Approximation B_n (dashed line)

minimum phase $A_n(z)$ 는 minimum energy RF 펄스를 만들어 낸다.

$A_n(z)$ 는 minimum phase 다항식이 analytic signal이라는 것을 알면 쉽게 이해된다. analytic signal 은 log magnitude 와 phase가 Hilbert transform 쌍을 이루기 때문이다.

따라서 minimum-phase $A_n(z)$ 는 다음과 같다.

$$A_n(z) = |A_n(z)| \exp[iH\{\log |A_n(z)|\}] \quad (8)$$

PM 알고리즘은 $B_n(z)$ 의 다항식계수들을 준다. $B_n(z)$ 는 단위원을 따라 계산하는데 DFT가 수반된다. DFT차수는 aliasing error를 감소시키기 위해 n 보다 커야된다.

$B_n(z)$ 를 계산하고 $A_n(z)$ 가 그려진다. minimum RF power가 되기 위한 minimum phase $A_n(z)$ 는 $A_n(z)$ 의 항 a_0 를 보면 알 수 있다.

식(6)의 forward recursion 으로부터

$$a_0 = C_n C_{n-1} \dots C_2 C_1$$

로 표현되어지고 이는 RF incremental rotation 동안 half angle cosine의 곱으로 표현한 것이다. 매우 작은 rotation 각을 근사시키는 방법을 이용하면, 즉, $\cos \theta/2 = 1 - \theta^2/8$ 을 이용하면 앞의 곱은

$$a_0 = (1 - \theta_n^2/8)(1 - \theta_{n-1}^2/8) \dots (1 - \theta_1^2/8)$$

이고, 이때 $\theta_j = \gamma |B_{1,j}| \Delta t$ 이를 첫 두항만 근사시켜 보면 다음과 같다.

$$a_0 = 1 - 1/8 \sum_{j=0}^n \theta^2 = 1 - (\gamma \Delta t)^2 / 8 \sum_{j=0}^n |B_{1,j}|^2$$

$|B_{1,j}|$ 항이 펄스의 평균 RF power에 비례하고 따라서 minimum RF power를 가진 펄스는 최대 a_0 를 갖는다. maximum a_0 를 갖는 다항식은 minimum phase 다항식이 되는 것이다.

시뮬레이션은 SLR 알고리즘을 sinc 펄스형태의 RF와 그 slice profile을 보는 것은 이미 실행. 여기서 SLR 알고리즘을 적용하여 Bloch equation의 확인을 위한 slice profile의 모습을 볼 수 있었다. 수학적으로 전개한 식들을 확인한 Bloch equation의 해를 확인해 보았다.

이제 다항식에 의해 SLR 펄스와 그 slice profile을 동일 소프트웨어인 matlab version 4.2로 실험할 것임.

결 론

여기서 우리는 SLR 알고리즘을 이용한 SLR 펄스를 제작했다.

RF 펄스의 제작이 SLR 알고리즘에 의해 두개의 복소 다항식을 설계함으로써 간략해짐을 확인하였고 시뮬레이션으로 그 예를 $\pi/2$ 펄스를 중심으로 복소 다항식과 (FIR filter를 이용한) SLR 펄스, slice profile을 보였고, 이후로 minimum $\pi/2$ 펄스에 대해 실험하여 보일 예정임.

참 고 문 헌

- [1] M. Shinnar and J. S. Leigh, "The application of spinors to pulse synthesis and analysis" Magnet. Resonance Med., vol. 12, pp.93-98, Oct. 1989.
- [2] J. Pauly, P. Le Roux, K. Nishimura, a. Macovski, Parameter relations for the Shinnar-Le Roux selective excitation pulse design algorithm. IEEE Trans. Med. Imaging 10, 53-65 [1991]
- [3] M. Shinnar and J. Bolinger, and J. s. Leigh, the use of finite impulse response filters in pulse design Magnetic Resonance Med., vol 12, pp.

75 87, Oct. 1989.

- [4] P.Le Roux "Exact synthesis of radio frequency waveforms," in Proc , 7th SMRM, Aug 1988, p. 1049.
- [5] D. I. Hoult, "The solution of the Bloch equations in the presence J. Magnet. Resonance vol. 35, pp. 66-86, 1979.
- [6] E.T. Jaynes, "Matrix treatment of nuclear induction," Phys. Rev., vol. 98, pp. 1099-1105, May 1955.
- [7] L. R. Rabiner and B. Gold, Theory and Application of Digital Signal Processing. Englewood Cliffs, NJ: Prenticse-Hall, 1975.
- [8] D. G. Nishimura, A. Macovski, j. I. Jackson, R. S. Hu, C. A. Stevick, and L. Axel, "Magnetic resonance angiography by selective inversion recovery using a compact gradient echo sequence," Magnet. Resonance Med., vol. 8, pp. 96-103, 1988.