

# Kalman filter를 이용한 생체신호의 AR modelling

김대근\*, 박해정\*\*, 지영준\*\*, 박광석\*\*, 이충용\*

\*서울대학교 공과대학 전기공학부, \*\*서울대학교 의과대학 의공학교실

## AR modelling for a biomedical signal using Kalman filter

D.K. Kim\*, H.J. Park\*\*, Y. J. Chee\*\*, K. S. Park\*\*, C. W. Lee\*

\*School of Electrical Engineering, College of Engineering, Seoul Nat'l Univ.

\*\*Department of Biomedical Engineering, College of Medicine, Seoul Nat'l Univ.

### ABSTRACT

In terms of a system identification, we present a method for autoregressive(AR) modelling of various biomedical signal. Model order is estimated by low rank approximation and coefficients are determined by innovation processes of Kalman filter derivation. An application of the method is given for visual evoked potentials.

을 사용하여 시유발성 뇌파 측정신호  $u(n)$ 을 AR modelling하기 위하여 [그림 1]의 Dynamic system의 입력을  $u(n-1), u(n-2), \dots, u(n-M)$ 으로 하였으며, 출력  $d(n)$ 을  $u(n)$ 으로 하였다. 그러면 [그림 1]의  $y(n)$ 은  $u(n)$ 과  $u(n-1), u(n-2), \dots, u(n-M)$ 을 이용하여  $u(n)$ 을 한 단계 선행 추정(forward prediction)한 값이 되고,  $e(n)$ 은 Kalman filter의 innovation  $\alpha(n)$ 이 된다.

### 서론

생체를 입력과 출력을 갖는 하나의 시스템으로 보고, 특별히 설계된 입력신호에 대한 출력신호를 분석하면 시스템 모형화(system identification)가 가능하다. 시스템 함수를 찾아내는 여러 가지 수학적 접근이 가능하며, 일반적으로 [그림 1]과 같이 표현될 수 있다[1].

### 모델링 방법

#### 1. AR model

추정하는 신호를  $u(n)$ ,  $u(n)$ 의 자기상관함수를  $r(k)$ 라고 하자.  $n, k$ 는 이산시간을 나타내는 독립변수이다.  $u(n)$ 이 실수값만 갖는다고 하면, 자기상관함수  $r(n+k)$ 는 다음과 같이 정의되고

$$r(n, n+k) = E[u(n)u(n+k)]$$

$u(n)$ 이 stationary process이면

$$r(n+k, n) = r(k)$$

$u(n)$ 이 Ergodic이라고 가정하면, ensemble average를 구하는 대신 다음과 같은 시간평균을 이용하여 자기상관함수를 정의할 수 있다.

$$r(k) \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N u(n)u(n+k)$$

계산된 자기상관함수  $r(0), r(1), \dots, r(M-1)$ 을 이용하여  $M \times M$ 의 자기상관행렬  $R$ 을 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$R = \begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \dots & r(M-1) \\ r(-1) & r(0) & \dots & r(M-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r(-M+1) & r(-M+2) & \dots & r(0) \end{bmatrix}$$

이 때  $r(-k) = r(k)$ 이다.

$u(n)$ 을 다음과 같은  $M \times 1$  벡터로 정의하면

$$u(n) = [u(n) \ u(n-1) \ \dots \ u(n-M+1)]$$

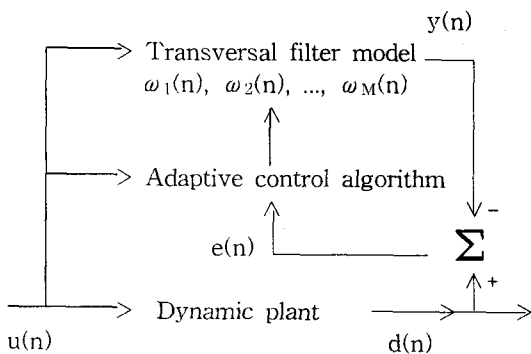


그림 1. adaptive filtering을 시스템 모형화에 활용한 예

Dynamic plant는 모형화의 구체적 대상이 되며, Adaptive control algorithm에 어떤 것을 사용하느냐에 따라 모형화의 방법이 구분될 수 있다. 본 연구에서는 Kalman filter의 Innovation process를 이용하여 인간의 시유발성 뇌파를 5차의 차분방정식(difference equation)으로 모형화하였다. Kalman filter algorithm

$u(n)$ 은 자기상관행렬  $R$ 의 eigenvector  $q_1, q_2, \dots, q_M$ 의 선형조합에 의하여 표현될 수 있다.

$$u(n) = \sum_{i=1}^M c_i(n)q_i$$

이 때  $q_1, q_2, \dots, q_M$ 에 해당하는 eigenvector를 각각  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M$ 라고 하면, 이들은 다음과 같은 방식으로 정렬될 수 있다.

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_M$$

만일  $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \dots, \lambda_M$ 이 충분히 작은 값을 갖는다면 rank  $M$ 인  $u(n)$ 은 rank  $p$  ( $p < M$ )로 다음과 같이 근사될 수 있다.

$$u(n) = \sum_{i=1}^p c_i(n)q_i$$

$u(n)$ 을 표현하기 위해서 적어도  $p$ 개의 독립적인 차원이 필요함을 알 수 있다.

한편,  $u(n)$ 을 표현하기 위해서 상기한 eigenanalysis를 하지 않고, 단지  $u(n)$ 의 과거 값만을 가지고 표현하는 것을 autoregressive(AR)모델이라 하는데, 다음과 같이 표현된다.

$$u(n) = w_1 u(n-1) + w_2 u(n-2) + \dots + w_M u(n-M) + v(n)$$

$w_1, w_2, \dots, w_M$ 은 AR parameter라 하고,  $v(n)$ 은 백색 잡음이다. 이 때 모델의 차수를 결정하기 위하여 AIC, MDL 등의 기준을 사용할 수 있겠으나, 여기서는 상기한 low rank 모델의 차수  $p$ 를 사용하기로 한다[2].

#### ㄴ. AR parameter를 구하기 위한 Kalman 필터의 Innovation process

Kalman 필터의 Innovation process을 이용하여 AR model의 parameter를 구하는 것은 측정하는 신호  $u(n)$ 을 이용하여  $\omega = [\omega_1 \ \omega_2 \ \dots \ \omega_M]$ 를 갱신하여 점차 실제 측정된 값과의 오차를 줄여나가는 방식이다. 이를 위하여  $\omega$ 를 상태변수로 놓으면, 상태변수의 시간에 따른 변화는 다음과 같이 표현한다.

$$\omega(n+1) = F(n+1, n)\omega(n) + v_1(n)$$

AR parameter가 시간에 따라 변하지 않는다고 하면,  $M \times M$  상태전이행렬  $F(n+1, n) = I$ 로 놓을 수 있다. 상태전이 과정의 잡음  $v_1(n) = 0$ 으로 한다. 측정 신호  $u(n)$ 과 상태변수  $\omega(n)$ 은 다음과 같은 관계로 표현될 수 있다.  $c(n-1)$ 를  $[u(n-1) \ u(n-2) \ \dots \ u(n-M)]$ 으로 정의한다면,

$$u(n) = \omega(n)c(n-1)^T + v_2(n)$$

Kalman filter의 반복계산을 초기화하기 위하여  $\omega(0) = [0 \ 0 \ \dots \ 0]$ 으로 놓는다.

Innovation process는 현재의 측정값  $u(n)$ 과 상태값  $\omega(n)$ 이 과거의 측정값의 선형조합으로 표현되지 못하는 새로운 부분을  $u(n)$ 의 온전한 표현을 위해서 반복적으로 가감해주는 과정으로,  $u(n)$ 과  $\omega(n)$ 에 대한 Innovation process는 각각 다음과 같이 정리된다.[3]

$$\begin{aligned} \alpha(n) &= u(n) - u(n | U_{n-1}) \\ \epsilon(n, n-1) &= \omega(n) - \omega(n | U_{n-1}) \end{aligned}$$

$U_{n-1}$ 은  $u(1), u(2), \dots, u(n-1)$ 로 구성되는 벡터공간이다. Innovation process를 이용하여 상태변수벡터

$\omega = [\omega_1 \ \omega_2 \ \dots \ \omega_M]$ 를 반복적으로 갱신하여 수렴된 값을 얻게 된다. 계산과정은 다음과 같다[4].

$$\begin{aligned} G(n) &= F(n+1, n)k(n, n-1)C^T(n)[C(n)k(n, n-1)C^T(n)]^{-1} \\ \alpha(n) &= u(n) - C(n)\omega(n | U_{n-1}) \\ \omega(n+1 | U_n) &= F(n+1, n)\omega(n | U_{n-1}) + G(n)\alpha(n) \\ k(n+1, n) &= k(n, n-1) - F(n, n+1)G(n)C(n)k(n, n-1) \end{aligned}$$

여기서  $k(n, n-1)$ 은 predicted state error correlation을 나타내며, 다음과 같이 정의된다.  $k(1, 0) = I$ 로 놓았다.

$$k(n, n-1) = E[\epsilon(n, n-1)\epsilon^T(n, n-1)]$$

반복계산을 통하여  $\omega(n+1 | U_n)$ 가 점차로 측정 신호의 AR parameter에 수렴하게 된다.

## 실험

### ㄱ. 실험방법

실험에 사용한 생체신호는 피험자에게 어두운 모니터를 통하여 밝은 패턴을 제시하는 순간 발생하는 시유발성 뇌파(VEP : visual evoked potential)이다. 제시된 패턴은 7가지 종류이며, 각각 3° 정도의 visual angle을 갖도록 설계되었다. 시유발성뇌파는 뒤통수(inion)에서 정중선을 따라 정수리방향으로 5 cm 올라간 지점(MO : mid-occipital)에서 양쪽 귀방향으로 각각 5cm 이동한 지점(LO : left-occipital, RO : right occipital)에서 각각 컷볼 전극(EL : ear-lobe)을 기준 전극으로 자극 제시 순간부터 0.5 sec 동안 1 kHz로 sample하여 측정하였다[5].

피험자는 모니터의 왼쪽 끝을 응시하여 오른쪽 시야를 자극하도록 하여(Half-field stimulation), LO에서 측정된 신호에서 RO에서 측정된 신호를 감산할 경우, 좌우 대칭으로 발생하는 EEG 신호를 상쇄하여 시유발성뇌파의 S/N비를 높이는 효과를 얻도록 하였다. [그림3]은 RO와 LO에서 측정된 시유발성뇌파 신호의 차분치를 보이고 있으며, [표2]에서 이를 얻는데 사용된 측정인자들을 정리하였다.

변수	내용
피험자	27세 남자 정상시력
패턴 크기	> 3°
자극 빈도	< 2/sec
자극 형태	Left half-field stimulation
채널 구성	Channel 1 : RO -EL Channel 2 : LO -EL
가산평균된 응답 수	1
Sampling time	1 ms
Sweep time	500 ms

표 2. 측정 인자

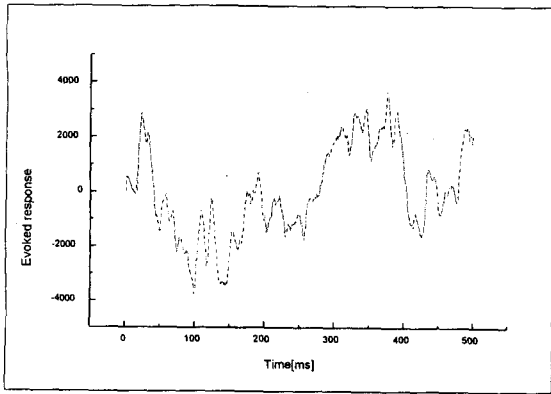


그림 3. 측정된 시유발성 뇌파신호(AR model에 의하여 fitting된 결과가 중첩되어 나타나 있다.)

나. 실험결과

1) Model order의 결정

측정한 시유발성뇌파로부터 20×20의 자기상관행렬 R을 구하고, 이로부터 eigenvalue를 구해보면 [그림 4]와 같다.

그림으로부터 측정신호는

$$u(n) \approx \sum_{i=1}^5 c_i(n)q_i$$

즉, u(n)을 가장 eigenvalue가 큰 5개에 각각 해당하는 eigenvector  $q_i$ 의 선형조합으로 근사할 수 있다. 여기서는 u(n)을 AR model하기 위해서 필요한 order를 추정하는데 사용하였다. AR 모델의 차수는 5로 선택하였다. 그러므로 측정하는 시유발성뇌파 신호는  $u(n) = w_1u(n-1) + w_2u(n-2) + \dots + w_5u(n-5) + v(n)$  이 된다.

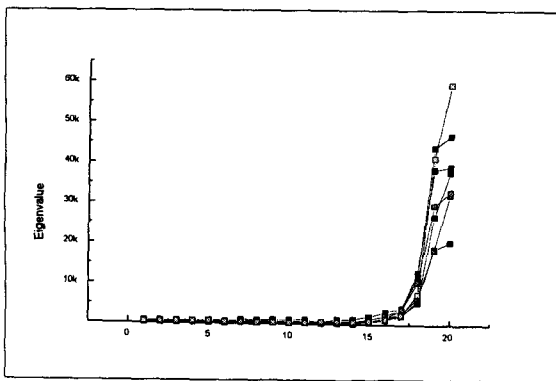


그림 4. 시유발성뇌파 측정신호로부터 얻은 20×20 자기상관행렬의 특성근의 분포. (7가지의 서로 다른 시각 패턴에 대한 결과를 동시에 보이고 있다.)

2) AR parameter의 결정

[표1] 는 시유발성뇌파의 측정 신호로부터 Kalman 필터 방법을 이용하여 신호의 AR parameter를 얻기 위하여 사용된 변수들과 필터의 초기 조건을 정리한 것이다.  $\omega = [\omega_1 \ \omega_2 \ \dots \ \omega_5]$ 를 상태변수로 정의하고, c(n)를  $[u(n-1) \ u(n-2) \ \dots \ u(n-5)]$ 으로 정의하였다.

변수	정의	차원
n	시간	1×1
$F(n+1,n) = I$	상태전이행렬	5×5
c(n)	측정행렬	1×5
$\omega(n)$	상태변수	1×5
u(n)	측정변수	1×1
$\omega(n U_{n-1})$	시간 n에서 과거의 측정값 u(1), u(2), .. , u(n-1)을 이용하여 상태변수 $\omega$ 를 추정한 값	1×5
G(n)	칼만 이득	5×1
a(n)	Innovation	1×1
$k(n+1,n)$	$\omega(n U_{n-1})$ 추정에러의 상관행렬	5×5

초기조건

$\omega(1 U_0)$	0
$k(1,0)$	I

표 3. Kalman filter에 사용된 변수들의 요약

[그림 5]는 [그림 3]에 보이는 바와 같이 측정된 시유발성 뇌파신호를 [표 3]에 정리된 Kalman filter 변수들을 정의하여 추출한 5개의 AR parameter의 값이 1ms마다 새로 측정되는 신호를 이용하여 값을 갱신하는 과정을 보이고 있다. 또한 [그림 3]에서 보는 바와 같이 추출한 AR parameter를 이용하여 modelling된 신호가 실제 측정된 신호를 잘 추적하고 있음을 확인할 수 있다. [표 4]는 7가지 서로 다른 시각 패턴에 대한 유발성 뇌파의 AR parameter가 달라짐을 보이고 있다. 각각의 시각 자극에 대하여 30회 추출한 AR parameter를 가산평균한 값이다.

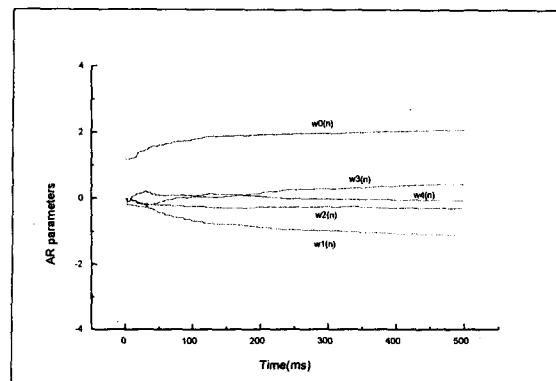


그림 5. AR parameter 수렴곡선

패턴	$\omega_0$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$
A	2.1379	-1.4480	0.1320	0.2549	-0.0953
B	2.0218	-1.0845	-0.1528	0.2922	-0.0743
C	2.3053	-1.6668	0.1534	0.3478	-0.1282
D	2.2227	-1.5075	0.1876	0.1369	-0.0250
E	2.1125	-1.2950	0.0887	0.1012	0.0158
F	2.2882	-1.6496	0.1907	0.2937	-0.1116
G	1.9685	-0.9682	-0.1278	0.0877	0.0501

표 4. 7가지 서로 다른 패턴에 의하여 유발된 시유발성 뇌파의 AR parameters의 평균값

### 결론

시유발성 뇌파를 측정하고 이를 5차 AR model 하였다. AR model의 parameter를 구하기 위하여 Kalman filter의 계산방법을 적용하였다. 모형화된 신호는 측정된 신호를 정확히 추적하였다. 피험자에게 제시한 시각패턴의 종류에 따라 유발성 뇌파의 AR parameter가 달라짐을 알 수 있었다. 이러한 생체신호의 모델링방법은 여러가지 생체신호의 모델링을 통한 특징변수 추출에 일반적으로 사용될 수 있을 것으로 기대된다.

### 참고 문헌

1. S. Haykin, "Adaptive filter theory", pp.18-22, 3rd Ed. Prentice-Hall, 1996
2. *ibid*, pp.175-179
3. *ibid*, pp.306-310
4. *ibid*, pp.321
5. R. Spehlmann, "Evoked potential primer", pp. 96-98, Butterworth publishers, 1985