

## 경계요소법을 사용한 항내 정온도 해석

### Harbour Tranquility Analysis using Boundary Element Method

홍정일\* 전인식\*\*

#### 1. 서론

항만을 새로 건설할 때에는 여러 가지 고려해야 할 중요한 사항이 있다. 이 가운데 항내 정온도는 가장 기본적이며 필수적으로 고려해야 할 사항이다. 항의 입구에서 전파되어 오는 입사파로 인해 발생하는 항내 내부의 동요가 너무 크면 하역 작업이 어려워지고 정박되어 있는 선박이 파손될 우려가 있다. 따라서, 항내의 동요에 대하여 가능한 한 정확하게 예측하여 항내 동요가 가장 적은, 즉 항내측이 가장 정온한 항만의 형상을 선택해야 한다. 항내 동요에 대한 예측에는 수치모형실험에 의한 방법과 수치모형실험에 의한 방법이 있다. 본 연구에서는 경계요소법을 적용한 수치모형실험을 통하여 항내 동요에 대하여 예측하였다. 수치 모형은 Lee(1970)의 방법을 참고하였으며 직접 경계요소법을 사용하여 항내 동요 특성을 재현하였다.

#### 2. 수치 해석 기법의 전개

##### 2. 1. Helmholtz 방정식

비압축성 · 비점성인 유체의 흐름이 비회전성이라면 속도포텐셜  $\phi$ 가 존재하며 Laplace 방정식을 만족한다.

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (1)$$

$$\phi = u(x, y)\mu(z)f(t) \quad (2)$$

식 (2)에 나타난 것처럼  $\phi$ 가 수평 성분의 함수  $u(x, y)$ , 연직 성분의 함수  $\mu(z)$ , 시간의 함수  $f(t)$ 의 곱으로 주어진다고 가정하여 식 (1)에 대입하여 정리하면  $u(x, y)$ ,  $\mu(z)$ 에 대한 각각 식 (3), (4)를 구할 수 있다.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - k^2 \mu(z) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u(x, y) = 0 \quad (4)$$

식 (4)와 같이 표현되는 방정식을 Helmholtz 방정식이라고 하며 본 연구에서는 Helmholtz 방정식에 대한 Weber의 해를 파동 함수로 사용하였다.

##### 2. 2. 항만내의 파동 함수

Weber의 해를 이용하여 영향함수로서 0차 및 Hankel 함수를 선택하여 사용한다.

$$f_2(x) = -\frac{i}{4} \int_0^{\infty} \left\{ f_2(x_0) \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(1)}(kr) - H_0^{(1)}(kr) \frac{\partial}{\partial n} f_2(x_0) \right\} ds_0 \quad (5)$$

여기서,  $f_2(x)$ 는 파동 함수,  $H_0^{(1)}(kr)$ 는 0차 Hankel 함수,  $r$ 은 Fig. 1에서  $x$ 와  $x_0$ 사이의 거리이다.

식 (5)에서  $x$ 를 경계위에 있는 점  $x_i$ 로 취하면  $f_2(x)$ 는 다음과 같은 적분방정식을 풀어 결정할 수 있다.

$$f_2(x) = -\frac{i}{2} \int_0^{\infty} \left\{ f_2(x_0) \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(1)}(k(x_i - x_0)) - H_0^{(1)}(k(x_i - x_0)) \frac{\partial}{\partial n} f_2(x_0) \right\} ds_0 \quad (6)$$

\* 건국대학교 대학원 석사과정

\*\* 건국대학교 토목공학과 부교수

경계를 N개의 직선 요소로 나누면 식 (6)의 적분은 선적분의 합으로 다음과 같이 나타내고,

$$f_2(x_i) = -\frac{i}{2} \sum_{j=1}^N \left\{ f_2(x_j) \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(1)}(kr_{ij}) - H_0^{(1)}(kr_{ij}) \frac{\partial}{\partial n} f_2(x_j) \right\} \Delta s_j \quad (7)$$

식 (7)을 행렬화하여 나타내면 다음과 같다.

$$[\bar{C} + G_n] X_2 = G P_2 \quad (8)$$

단,  $X_2 = (f_2(x_i))$ ,  $\bar{C} = (c(x_i)) = -\left\{ \frac{i_c}{2} \right\}$ ,  $P_2 = \left\{ \frac{\partial}{\partial n} f_2(x_i) \right\}$ ,  
 $(i_c = \sqrt{-1})$ ,  $G_n = \left[ \frac{\partial}{\partial n} \{ H_0^{(1)}(kr_{ij}) \} \Delta s_j \right]$ ,  $G = [ H_0^{(1)}(kr_{ij}) \Delta s_j ]$ ,  
 $(i, j = 1 \sim N)$ 이다. 항의 입구에서  $P_2$ 의 값은 알 수 없으나 항내부의 경계에서  $P_2$ 의 값은 0이다. 따라서, 식 (4)의 벡터  $P_2$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

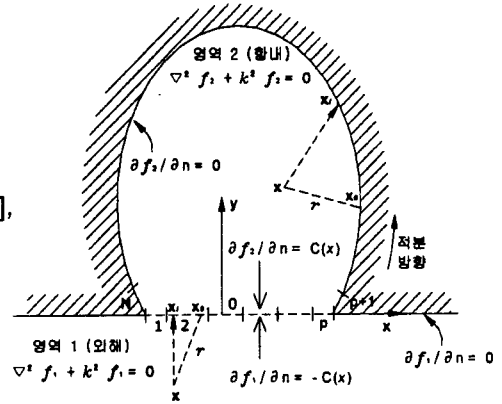


Fig.1. Definition Sketch of arbitrary-shape harbour.

$$P_2 = (P_{2j}) = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \vdots \\ C_P \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \vdots \\ C_P \end{bmatrix} = U_m C_m \quad (9)$$

식 (9)에 의하여 식 (8)을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$X_2 = [\bar{C} + G_n]^{-1} G U_m C_m = M C_m \quad (10)$$

여기서,  $M = [\bar{C} + G_n]^{-1} G U_m$ 이다.

### 2. 3. 항만 외부의 파동 함수

파동 함수  $f_1$ 은 입사파  $f_i$ , 반사파  $f_r$ , 산란파  $f_3$ 로 구성된다.

$$f_1 = f_i + f_r + f_3 \quad (11)$$

위의 식에서  $f_i$ 와  $f_r$ 은 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다. 본 연구에서는 항 입구에서 입사파  $f_i$ 와 반사파  $f_r$ 에 입사각  $\alpha$ 를 고려할 수 있게 하였다.  $\alpha$ 는 Fig. 1의 x축과 입사파가 이루는 각도를 나타낸다.(반시계 방향)  $\beta$ 는 입사파의 반사각으로  $2\pi - \alpha$ 이다.

$$f_i(x, y) = \exp[ik(x \cos \alpha + y \sin \alpha)] \quad (12)$$

$$f_r(x, y) = \exp[ik(x \cos \beta + y \sin \beta)] \quad (13)$$

입사파  $f_i$ 와 반사파  $f_r$ 을 알고 있으므로 파동 함수  $f_1$ 을 제대로 평가하기 위해서는 산란파  $f_3$ 를 결정하면 된다. Helmholtz 방정식이 선형이므로  $f_3$ 도 Helmholtz 방정식을 만족한다고 할 수 있다. 여기에 적용된 기본가정은 항의 입구부에서  $\partial f_1 / \partial n = -\partial f_2 / \partial n$ ,  $f_1 = f_2$ , 항외측 해안선에서  $\partial f_1 / \partial n = 0$ 이며, 사용되는 경계조건에는

$$\partial f_3 / \partial n = -\partial f_2 / \partial n \quad ; \text{ 항의 입구부에서} \quad (14)$$

$$\partial f_1 / \partial n = 0 \quad ; \text{ 항외측 해안선} \quad (15)$$

$$f_2 = f_1 = a(x, y) + f_3 \quad (16)$$

여기서,  $a(x, y) = f_i + f_r$ 이다.

식 (8)과 같이 위의 조건들을 Weber의 해에 적용하여 행렬화하면 다음과 같이 나타나며,

$$\{X_3\} = -[\overline{C}_P]^{-1} G_P P_2 = -[\overline{C}_P]^{-1} G_P C_m \quad (17)$$

식 (16)에 식 (17)을 적용하면 식 (18)과 같이 정리된다.

$$\{X_1\} = A - [\overline{C}_P]^{-1} G_P C_m \quad (18)$$

여기서,  $A$ 는 요소가  $a_i(x, y)$ 인 행렬이고,  $X_3 = \{f_3(x_i)\}$ 이다. ( $i = 1 \sim P$ )

항 입구에서  $\{X_2\}_P = M_P \cdot C_m$ 이므로

$$M_P C_m = A - [\overline{C}_P]^{-1} G_P C_m \quad (19)$$

$$C_m = [M_P + [\overline{C}_P]^{-1} G_P]^{-1} A \quad (20)$$

식 (20)으로  $C_m (= \partial f_2(x) / \partial n)$ 을 구하고 식 (10)으로 항만 입구 및 내부경계에서의  $f_2(x)$ 값을 구한다. 항만 입구 및 경계의  $f_2(x)$ 와  $f_2(x) / \partial n$ 값을 구하게 되면 항만 내부의  $f_2(x)$ 값은 다음 식으로 계산된다.

$$f_2(x) = -\frac{i}{4} \left\{ \sum_{j=1}^N \left[ f_2(x_j) \left[ -k H_1^{(1)}(kr) \frac{\partial r}{\partial n} \right] \right] - \sum_{j=1}^P H_0^{(1)}(kr) C_m \Delta s_j \right\} \quad (21)$$

여기서,  $H_1^{(1)}(kr)$ 은 1차 Hankel 함수이다.

입사파에 대한 항만의 응답은 항의 입구가 닫혀 있을 때의 입사파와 반사파 파고의 합과 항만 내부의 파고비로 나타낸다.

$$\text{Amplification Ratio (R)} = \frac{|\eta_2|}{2\zeta} \quad (22)$$

여기서,  $\eta_2$ 는 항만 내부의 파고,  $\zeta$ 는 입사파고이다.

### 3. 비교 및 고찰

Fig. 2는 길이가 일정하지 않은 74개의 요소를 사용한 경계요소법에 의한 결과와 박 등(1994)의 유한요소법에 의한 결과를 비교하여 나타낸 것이다.

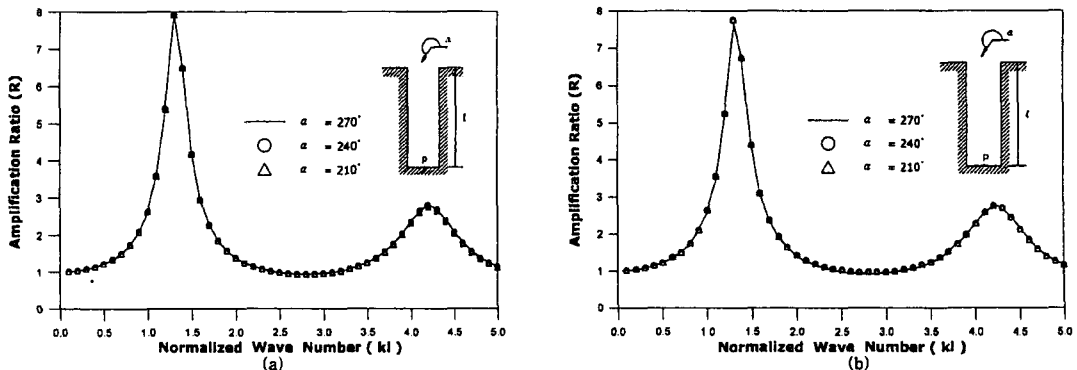


Fig. 2. Amplification ratios at the center of the backwall (point P) of a fully-open rectangular harbour for three different angles of wave attack,  $\alpha$ : (a) Boundary element method, (b) Finite element method by Park et al. (1994).

그림에서 경계요소법에 의한 결과와 유한요소법에 의한 결과는 거의 일치함을 알 수 있다. Fig. 2

(a)의 결과가 파수  $k$ 가 커질수록 Fig. 2 (b)의 결과와 약간의 차이를 보이는데 이는 경계요소법에서 경계를 많은 요소로 나누지 않았기 때문이라고 생각된다.

Fig. 3은 감포항에 경계요소법을 적용하기 위하여 설정한 계산영역을 나타낸 것이다. Fig. 4는 국립 건설 시험소에서 실시한 감포항의 수리모형 실험결과 (1997)와 수치모형 실험결과를 비교하여 나타낸 것이다. Fig. 4 (a)가 수치 해석결과이고 Fig. 4 (b)가 수리모형 실험결과이다. 그림에서 나타난 것처럼 대체적으로 비슷한 성향을 보임을 알 수 있다. 파고비는 대체적으로 수치모형 실험결과가 약간 큰 데 이는 수치모형에서 완전반사를 가정하고 있기 때문이라고 생각된다.

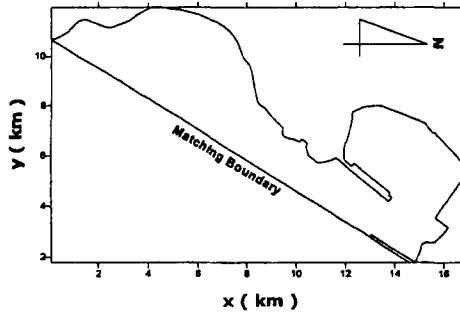


Fig. 3. Establishment of computational area in Gampo harbour.

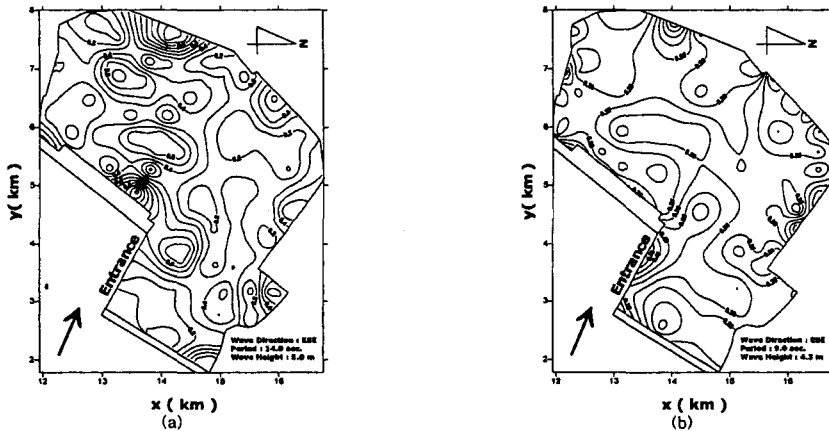


Fig. 4. Wave height ratio in Gampo harbour : (a) Results of boundary element method, (b) Results of hydraulic model experiment.

#### 4. 결론

감포항을 대상으로 수치모형실험을 실시하여 입사각이  $\alpha$ 인 입사파가 항만 내부에 미치는 영향을 검토하였다. 성향은 대체로 일치하고 있으나 방파제 등의 경계에서 약간의 왜곡이 나타나는 것은 수치모형실험에서 완전반사를 가정하고 있기 때문이며, 향후 경계조건에 실제와 가까운 반사율을 적용하면 더욱 좋은 결과를 얻을 수 있을 것이다.

#### 5. 참고문헌

- Lee,j.j.(1971) : Wave induced oscillations in harbours of arbitrary geometry, J.Fluid Mech. Vol. 45, pp. 375-394.
- Park,W-S., Chun,I-S., Jeong,W-M (1994) : Infinite element for the analysis of harbor resonances, J. Korean Soc. Coastal Ocean Engrs., Vol.6, No. 2, pp. 139-149.
- 國立建設試驗所, 甘浦港의 靜穩度改善을 위한 水理模型實驗, 1997 발간예정.