

물성치가 상이한 계에서 응력장 개선 연구

송기남

한국원자력연구소

대전광역시 유성구 덕진동 150

요 약

물성치가 상이한 계에서 접합면을 포함한 전 영역내의 연속 응력장 개선방안을 제안하였다. 재료의 물성치가 100배 차이가 나는 직선보 예제에 대해 변위형 유한요소해에서는 접착면 상·하측에서 응력들이 불연속이며 상당한 차이를 보이고 있는데 반하여 본 연구에서의 응력장은 연속이며 접합면의 절점응력들이 이론해에 근접하고 있다. 또한 본 연구에서의 연속 응력장으로 계산한 변형률 에너지는 수회 이내의 반복계산에서 이론해에 수렴하고 있다.

1. 서 론

상이한 물성치를 갖는 재료들로 구성된 구조물들이 산업 전반에 걸쳐서 널리 사용되고 있으며 공학적인 관심이 점차 고조되고 있다. 이러한 구조물들의 예로는 재료의 열팽창 차이에 따른 변형률의 차이를 이용하여 온도측정에 사용하는 서머스탯(thermostat)용 바이메탈을 비롯하여 반도체산업, 항공우주산업 및 인체공학 등에 이용되고 있으며 원자력 산업의 핵연료에도 종래에 사용되오던 지르칼로이-4 피복관의 내면에 연성이 좋은 지르코늄을 덧 붙인(lining) 피복관의 사용 등을 예로 들 수 있다.

상이 재질로 구성된 구조물의 구조적 건전성을 평가하는데 중요한 요체는 접합부를 비롯한 주요 부위에서 응력을 신뢰할 수 있게 평가하는 방법을 확보하는 것이다. 그런데 이러한 구조물에서 접합부위는 연속인 응력성분과 불연속한 응력성분이 있어서 해석에 어려움이 존재한다. 즉, 접착면에서 정의된 수직응력 성분과 전단응력 성분은 연속이나 접착면에 수직인 평면에서 정의되는 수직응력 성분과 전단응력 성분은 불연속이다.¹⁾ 그런데 요소간의 변위 연속성(C^0 continuity)에 근거하여 형성된 변위형 유한요소법의 변위해나 이에 근거하여 후처리과정(postprocess)에서 구한 통상적인 연속 응력장은 재료의 물성치 차이가 크지 않으면 믿을 만한 결과를 주지만 재료의 물성치 차이가 크게 다르면 신뢰할 수 없는 결과를 줄 수도 있을 뿐만 아니라 접합면을 따라 두 재료에서 심한 응력의 피리가 발생하며 진동현상이 발생하기도 한다.²⁾ 또한 전체 영역에서 연속인 응력장을 가정한 혼합 유한요소법에서도 불연속한 응력성분에 대한 조건을 만족시킬 수 없으

므로 해석시 오차를 수반하게 된다. 이러한 응력의 불연속에 대한 문제는 이론해나 특수한 수식으로만 해결할 수 있으며 이론해는 형상이 단순하고 간단한 경계조건에서만 제한적으로 이용될 수 있고 정확한 해를 얻기 위해서는 엄밀한 가정이 요구된다.³⁾

본 연구에서는 접합면 양측의 접합응력이 같다는 조건을²⁾ 벌칙함수로 포텐셜 범함수에 부과하여 구한 변위해와 접합면에서 접합응력에 근거하여 Loubignac의 반복계산법⁴⁾으로 변위장을 개선하고 접합면에서 연속인 응력성분과 불연속한 응력성분에 대응되는 방향으로의 변형률이 접합면 양측에서 같다는 조건을 응력 평탄화과정⁵⁾의 범함수에 벌칙함수로 적용하여 접합면의 모든 절점을 포함한 전체 영역에서 신뢰성있게 연속 응력장을 구할 수 있는 방법을 제안하였다.

2. 벌칙함수에 의한 유한요소 수식화

그림 1은 물성치가 다른 재질로 구성된 계의 접합면에 작용하는 접착응력을 나타낸 것으로 접합면이 완전히 접착되어 있다고 가정하면 접착면에서 접착응력에 대한 제한 방정식은 다음과 같이 표현되어 질 수 있다.^{1,2)}

$$T_i^a + T_i^b = 0 \quad \text{----- (1)}$$

여기서 상첨자 a, b 는 그림 1에서 공통 접합면(ab)을 갖는 접합물질들을 각각 나타내며 하첨자 i 는 응력성분을 나타낸다. 상기 (1)식은 벌칙함수 과정에 따라 구속조건으로 부과하면 수정된 포텐셜 에너지 범함수(π_p^*)는 다음과 같이 표현된다.

$$\pi_p^* = \pi_p + \frac{1}{2} a \int_S (T_i^a + T_i^b)^2 dS \quad \text{----- (2)}$$

여기서 a 는 벌칙상수, S 는 공통 접합면을 나타내며 식 (2)의 둘째 항에서 T_i^a 와 T_i^b 는 다음과 같은 벡터로 표현된다.

$$\{T^a\} = [n^a][E^a][B^a]\{d^a\} \quad \text{----- (3)}$$

$$\{T^b\} = [n^b][E^b][B^b]\{d^b\} \quad \text{----- (4)}$$

여기서 $[n]$ 은 접합면에서 외향 방향으로의 수직 단위 벡터의 공간좌표 성분을 나타내는 행렬이며 $[E]$ 는 탄성행렬, $[B]$ 는 변위-변형률 구성행렬을 나타내며 $\{d\}$ 는 요소의 절점변위 벡터를 나타낸다. 접합면에서 마주보는 두 요소가 결합되었을 때 접합면(ab)에서의 변위 벡터 $\{d^{ab}\}$ 로 표시하면 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$\{T^a + T^b\} = [K^{ab}]\{d^{ab}\} \quad \text{----- (5)}$$

여기서 $[K^{ab}] = [n^a]([E^a][B^a][T^a] - [E^b][B^b][T^b])$ 이며 $[T^a]$ 및 $[T^b]$ 는 물질 a, b 의 각 요소에서 절점 자유도 벡터를 결합한 형태의 절점 자유도 벡터로 변환시키는 변환 행렬을 나타낸다. 식 (5)를 식(2)에 대입하고 변위 자유도에 대하여 범함수를 최소화하는 과정을 취하면 식(2)의 우변 첫째 항은 변위형 유한요소법에서 잘 알려진 요소 방정식으로 귀결되며 식(2)의

우변 둘째 항에서는 아래의 식(6)과 같은 벌칙함수에 의한 대칭 강성행렬이 만들어진다.

$$[K_p] = \int_S [K^{ab}]^T [K^{ab}] dS \quad \text{----- (6)}$$

따라서 다음과 같은 방정식을 풀면 변위해 및 접촉면에서 접촉응력이 구해진다.

$$[K]\{u\} = \{f\} \quad \text{----- (7)}$$

여기서 $[K] = [K_r] + \alpha[K_p]$ 이다.

3. 연속 응력장의 계산

영역내에서 연속인 응력장($\{\sigma^*\}$)의 절점에서 값을 ($\bar{\sigma}^*$)이라 하면 형상함수 벡터($[N^*]$)들의 선형조합으로 다음과 같이 표현된다.

$$\{\sigma^*\} = [N^*]\{\bar{\sigma}^*\} \quad \text{----- (8)}$$

변위형 유한요소해의 불연속한 변위기초응력장을 ($\{\sigma\}$)라 표시하면 절점응력 벡터($\bar{\sigma}^*$)는 다음과 같이 투사(projection)시켜서 얻어질 수 있다.⁶⁾

$$I = \int_{\Omega} [N^*]^T (\{\sigma^*\} - \{\sigma\}) d\Omega = 0 \quad \text{----- (9)}$$

그러나 물성치가 다른 계의 접합면에서 접합응력이 같다는 조건을 이용하여 식 (9)의 범함수에 벌칙함수로 부과하면 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$I^* = I + \alpha_{\sigma} \int_S [N^*]^T (\{\sigma^*\} - \{\sigma_{\phi}\}) dS = 0 \quad \text{----- (10)}$$

여기서 α_{σ} 는 벌칙상수이며 식(10)을 절점응력 벡터($\bar{\sigma}^*$)에 대하여 정리하면 다음과 같다.

$$\bar{\sigma}^* \left(\int_{\Omega} [N^*]^T [N^*] d\Omega + \alpha_{\sigma} \int_S [N^*]^T [N^*] dS \right) = \left(\int_{\Omega} [N^*]^T \{\sigma\} d\Omega + \alpha_{\sigma} \int_S [N^*]^T \{\sigma_{\phi}\} dS \right) \quad \text{-- (11)}$$

4. 평형조건 만족에 의한 변위장의 반복개선

영역내에서 연속인 응력장에 의한 절점력은 다음과 같이 표시된다.

$$\int_{\Omega} [B]^T \{\sigma^*\} d\Omega = \{f^*\} \quad \text{----- (12)}$$

식(12)에서 구한 절점력($\{f^*\}$)은 유한요소 방정식의 원래 평형조건에서의 절점력($\{f\}$)과 일치하지 않기 때문에 다음과 같은 반복적인 알고리즘⁴⁾을 이용하여 변위장을 개선한다

$$\{\Delta u\}^i = [K]^{-1} (\{f\} - \sum_{\text{element}} \int_{\Omega_e} [B]^T \{\sigma^*\}^i d\Omega_e) \quad \text{----- (13)}$$

$$\{u\}^{i+1} = \{u\}^i + \{\Delta u\}^i, \quad i=1, 2, 3, \dots \quad \text{----- (14)}$$

$$\{\sigma\}^{i+1} = [D][B]\{u\}^{i+1} \quad \text{----- (15)}$$

식(8),(11),(15)를 이용하여 새로운 연속 응력장을 구하고 식(13)에서 구한 $\|\Delta u\|$ 가 미리 정해는 값보다 작을 때까지 상기 과정을 반복한다.

5. 수치계산 및 검토

그림 2는 물성치가 서로 다른 재질로 구성된 직선보로서 상단부의 재료상수가 하단부의 그것보다 100배 크며 직선보의 끝단에 전단하중이 작용하고 있다. 이 예제를 해석할 때 평면응력 상태로 가정하고 보 끝단에 전단력은 2차식 분포(quadratic distribution)로 가정하였으며 이론해는 Muskhelishvili의 결과를⁷⁾ 참조하였다. 그림 2에 도시된 유한요소 모델에 대하여 얻은 변위형 유한요소해의 응력장(ANSYS결과와⁸⁾ 동일함)과 벌칙함수를 이용하여 본 연구에서 얻은 응력장 그리고 이론해를 비교하였다. 그림 3과 4는 이론적으로는 연속이어야만 하는 접합면의 절점 응력성분들, 즉 접합면에 수직인 응력성분과 전단응력성분에 대한 응력해석 결과와 이론해를 비교한 것이다. 그림 3과 4에서 보면 변위형 유한요소법으로 얻은 접합면의 응력장에서 무른 재질 쪽(soft side)의 응력은 이론해($\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = 0.0216345\text{MPa}$)와 비슷하나 강한 재질 쪽(hard side)의 응력은 이론해와 상당한 차이를 보이고 있어서 이종재료의 접합면에서 변위형 유한요소법에 의한 응력해석은 적절하지 못함을 알 수 있으나, 본 연구에서 얻은 접합면의 응력장은 연속일 뿐만 아니라 이론해와 비교할 때 보의 양 끝단을 제외하고는 비교적 잘 일치하고 있다. 아울러 그림 5는 반복계산 횟수에 따른 계의 전체 변형률 에너지 변화를 나타낸 것으로 반복계산이 진행됨에 따라 이론해(0.14227E-1 MJ)에 근접하고 있어서 본 연구에서 얻은 연속 응력장은 접합면을 포함한 전 영역에서 반복계산 횟수가 증가함에 따라 개선되고 있다.

7. 결론

물성치가 상이한 재질로 구성된 접합면에서 접합응력이 같다는 조건을 벌칙함수로 부과하여 구한 유한요소 변위해와 접합응력을 기초로 하여 응력 투사법에 의한 응력 평탄화 및 Loubignac의 변위장 반복개선 기법 등을 결합하여 구조물에서 접합면을 포함한 전 영역에서 연속인 응력장을 구하는 방법을 제안하였다. 재료의 물성치가 100배 차이가 나는 재질로 구성된 직선보에 대하여 응력해석을 수행한 결과, 변위형 유한요소해는 접합면 상·하측에서 응력이 불연속일 뿐만 아니라 심하게 차이가 나며 이론해와도 많은 차이를 보이고 있는 반면, 본 연구에서 얻은 응력장은 접합면을 포함한 전 영역에서 연속일 뿐만 아니라 접합면에서의 응력이 이론해에 근접하고 있음을 발견하였다. 또한 연속 응력장으로 부터 구한 변형률 에너지는 수회이내의 반복계산에서 이론해에 빠르게 수렴하고 있어서 본 연구에서 제안한 방법은 정확한 연속 응력장을 얻을 수 있는 효과적인 방법이다.

참 고 문 헌

1. A. Shirazi-Adl, 1992, "Finite element stress analysis of a push-out test Part I: Fixed interface

- using stress compatible elements," ASME Journal of Biomechanical Engineering, Vol.114, pp.111-118.
2. A. Shirazi-Adl, 1989, "An interface continuous stress penalty formulation for the finite element analysis of composite media," Computers & Structures, Vol.33, No.4, pp.951-956.
 3. D. S. Kim, 1994, "Finite element analysis of bonding problems based on a new mixed variational principle," Ph.D. Thesis, KAIST.
 4. G. Loubignac, G. Cantin and G. Touzot, 1977, "Continuous stress field in finite element analysis," AIAA Journal, Vol.15, No.11, pp.1645-1646.
 5. H. J. Brauchli and J. T. Oden, 1971, "Conjugate approximation function in finite-element analysis," Quarterly of Applied Mathematics, No.1, April, pp.65-90.
 6. O. C. Zienkiewicz, Li Xi-Kui and S. Nakazawa, 1985, "Iterative solution of mixed problems and the stress recovery procedures," Communications in Applied Numerical Method, Vol.1, pp.3-9.
 7. N. I. Muskhelishvili, 1963, "Some basic problems of mathematical theory of elasticity (Translated by J. R. M. Radok)," pp.641-649, Noordhoff, Groningen, Holland.
 8. ANSYS User's Manual for Revision 5.0, 1992, Swanson Analysis System, Inc.

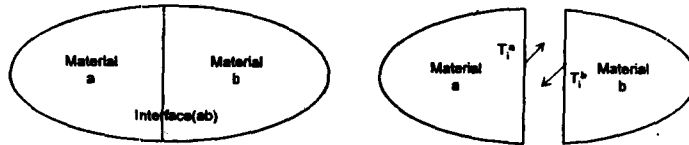


Fig.1 Interface traction acting on a bi-metallic interface between two region a and b

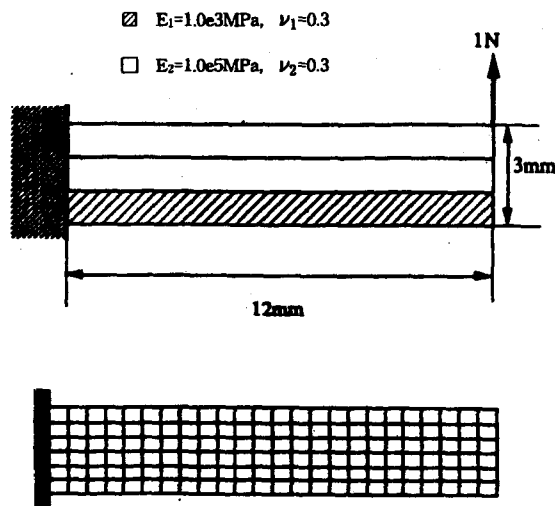


Fig.2 A two-material cantilever beam under end load

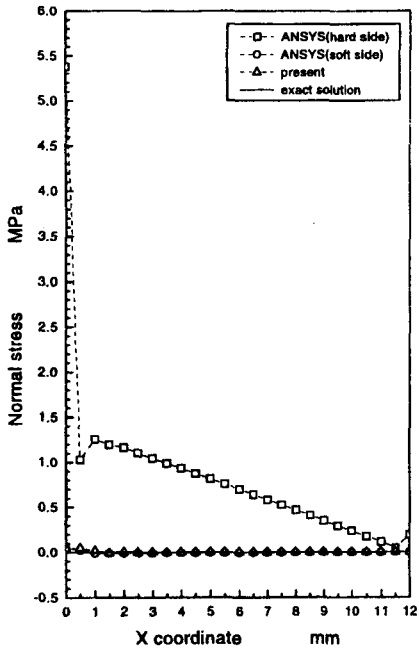


Fig. 3 Nodal normal stress on the interface
($E_2/E_1=100$)

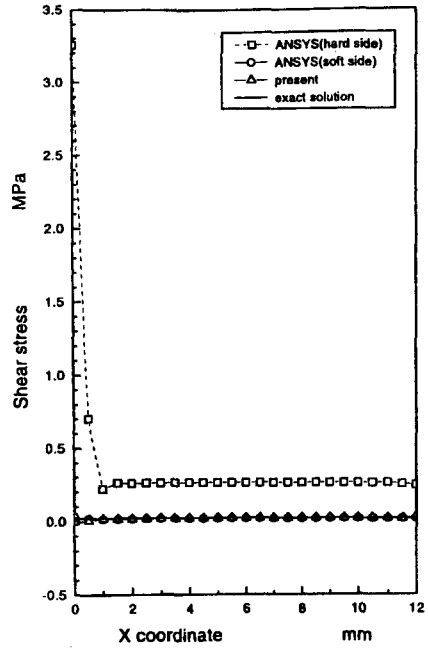


Fig. 4 Nodal shear stress on the interface
($E_2/E_1=100$)

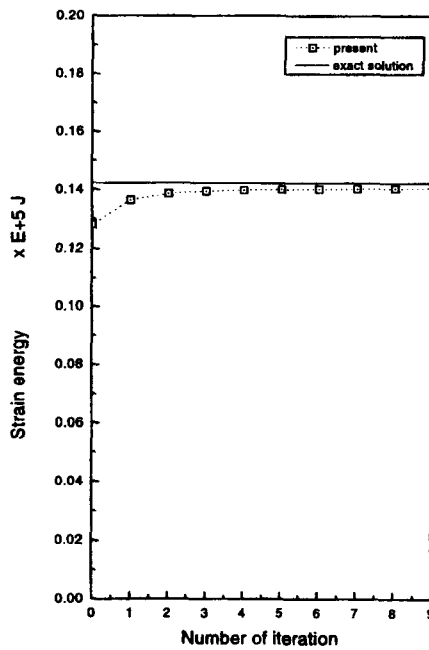


Fig. 5 Strain energy vs. iteration number
($E_2/E_1=100$)