복합재 구조물의 국부좌굴 해석을 위한 간략화한 판연결법

김 건 인, 정 백 기*

* 육군사관학교 무기공학과

ABSTRACT

A new buckling analysis procedure which is suitable for use with reinforced composite plates and features an attractive blend of accuracy, computational economy and ease of modeling is developed in this research. The goal of this research is achieved by developing the simplified linked plate method(SLPM) for local mode buckling of a stiffened panel. The SLPM method is based on the elastically constrained boundary condition described by three constrained factors. This new method is simple and relatively accurate. Predictions obtained using the SLPM are favorably compared to those obtained using FEM and VIPASA analyses as well as available experimental measurements.

1. 서론

압축력을 받는 복합재 보강판의 좌굴해석은 실제 구조물에 있어서 자주 발생하는 문제로서 여러 가지 해석방법들이 연구되어 왔다. 보강판의 좌굴현상을 크게 나누면 전체좌굴과 국부좌굴로 나눌 수 있는데, 이러한 좌굴 현상의 해석법을 크게 분류하면 다음과 같이 세가지로 분류할 수 있다.

첫 번째 방법은 가장 간단한 방법으로써, 보강판의 강성을 등가의 평판으로 치환하여, 좌굴응력을 계산하는 "등가 강성법"이라고 불리우는 방법이다.[1, 2] 이러한 방법중에서 국부좌굴이 일어난 후에도 전체좌굴응력을 계산하는 방법으로써 "유효 넓이"개념을 이용하여 좌굴응력을 계산하는 방법은 von Karman, Secher, Donnell 등에 의하여 1932년에 소개되었다.[3] 이 방법은 실험에 의하여 결정된 계수를 사용하여 좌굴응력을 계산하는데, 전체좌굴응력을 구하는데는 비교적 정확한 것으로 알려져 있으며, 계산이 간단하다는 장점을 가지므로 초기설계용으로 널리 사용되고 있다. 하지만 국부좌굴이 전체좌굴형태를 지배하는 경우에는 사용할 수 없다는 단점을 가지고 있다.

두 번째 방법으로는 유한 띠법(finite strip method)을 이용한 방법들이 있다. 유한요소법과 차이점은 요소의 모양이 띠처럼 생긴 것을 제외하고는 같은 방법이다. 하지만 유한요소법보다는 요소의 숫자가 작으므로 계산시간이 적게 걸리는 장점을 지니고 있다. 또 다른 이름으로는 판연결법이라고도 불린다. [4] 이러한 방법을 이용하여 여러 가지 하중조건에서 보강판의 좌굴해석을 한 경우는 여러 논문에서 찾아볼 수 있다. [5, 6] 또한 이 방법을 이용한 보강판 해석용 프로그램에는 VIPASA, BUCLASP2, PASCO, 그리고 PANDA2등이 있다.

이 방법은 보강판의 좌굴문제를 해결하는데는 상당한 공헌을 한 방법이며, 그 정확성도 여러 연구자들에 의하여 입증되었고, 보다 정확한 해를 구하기 위한 많은 노력들이 이루어졌다. 하지만 아직도 계산시간이 많이 소요되는 단점을 가지고 있다.

마지막 방법들로는 유한요소법이 있다. 유한요소법에 대하여는 너무도 잘 알려져 있으므로 자세한 내용은 언급하지 않지만, 보강판의 좌굴해석을 유한요소법을 이용하여, 국부좌굴과 전체좌굴이 동시에 일어나는 경우를 해석하는 것은 전자계산기의 발전에도 불구하고, 쉽게 사용할 수 있는 방법은 아니며, 초기설계용이나 현장에서 쉽게 사용할 수 있는 방법은 더욱더 아니다.

본 논문에서는 보강판의 좌굴해석용으로 널리 사용되는 판연결법을 간략화 함으로, 보강판의 국부좌굴 해석을 쉽게 할 수 있는 방법에 대하여 생각하여 보았다. 개발된 방법의 정확성을 규명하기 위하여 유한요소법과 유한띠법 그리고 다른 연구자들에 의하여 수행된 실험 결과들과 비교하였다.

2. 간략화한 판연결법

국부좌굴이 발생하는 보강판에서의 국부좌굴 해석방법을 표현하는 방법으로 가장 많이 쓰이는 방법이 4변이 모두 단순지지되었다고 가정하고, 좌굴이 발생하는 부재의 좌굴응력을 계산한 후에, 이를 이용

하여 전체 보강판에 걸리는 하중을 계산하는 방법이다. 하지만 보강판의 부재의 경계조건은 단순지지도 고정단도 아니고, 인접판에 의하여 구속을 받는 형태이다. 따라서 이러한 경계조건을 적절히 표시할 수 있다면 국부좌굴이 발생한 보강판의 좌굴응력을 계산할 수 있다. 본 연구에서는 세가지 형태의 구속조건을 정의하여, 보강판의 좌굴을 해석하였다. 첫째는 회전저항 조건, 면외저항 조건, 그리고 면내 저항조건이다. 이러한 저항조건들을 스프링으로 가정하여 저항계수들을 유도하였다. 이러한 경계조건은 그림 1에서 보여주고 있다.

대칭적층판의 좌굴에 대한 지배방정식은 다음과 같다.

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2(D_{12}+2D_{66})\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (1)$$

전단응력에 의한 좌굴의 경우는 고려하지 않고, 양방향의 하중은 $N_y=\zeta N_x$ 의 관계가 있다고 가정하면, 주어진 지배방정식을 풀기 위한 경계조건을 다음과 같이 가정한다.

회전저항 경계조건 (rotationally constrained boundary condition)

보강판의 국부좌굴을 해석하는 전통적인 방법은 부재들이 서로 단순지지되어 있다고 가정하여, 부재의 좌굴응력을 계산하는 것이다. 하지만 실제는 단순지지가 아니고, 인접부재에 의하여 구속을 받는다. 그 중 첫 번째로 고려해야 할 구속이 단순지지의 모멘트를 받지 못한다는 가정이다. 실제는 모멘트를 받게 됨으로 어느 정도의 각도만큼만 회전한다고 가정할 수 있다. [7]

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\theta_i \quad i=1,2 \quad (2)$$

여기서 θ_1, θ_2 는 경계에서의 구배를 나타내며, $\theta_1=\theta_2=0$ 이면, 고정단 (Clamped) 경계조건을 표시한다. 이 경계조건은 모멘트 연속조건을 적용하여 변위의 항으로 바꿀 수 있다.

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}-bC_{ri}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{y=0,b}=0 \quad i=1,2 \quad (3)$$

여기서 b 는 보강판 부재의 폭을 나타내고, i 는 위치를 나타낸다. C_{ri}는 회전저항계수로써 $C_r=0$이면, 구배가 영이 되므로, 고정단 경계조건을 표시하고, $C_r\to\infty$이면, 모멘트가 영으로 수렴하므로 단순지지 조건을 나타내게 된다.

면외저항 경계조건 (out-of-plane boundary condition)

두 번째 구속조건으로는 단순지지에서 가정하는 면외변위는 영이라고 가정하지만, 실제는 좌굴에 의하여, 좌굴모드와 같은 변위를 지니게 된다. 그 변위는 다음과 같다고 가정할 수 있다.

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}+Q_y=C_{ki}w \quad i=1,2 \quad (4)$$

여기서 C_{k1}, C_{k2}는 면외저항계수이다.

주어진 경계조건을 지배방정식에 적용하기 위하여, 식(2)와 (3)을 변위의 항으로 바꾸어 쓸 수 있다. 첫째 식의 좌항은 감소된 전단력(reduced shear force)으로써, Kirchhoff의 조건을 사용하면 쉽게 변위의 항으로 표시할 수 있다.

$$Q_y+\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}=-(D_{12}+D_{66})\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}-D_{22}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}=C_{ki}w \quad (5)$$

면외저항계수인 C_k가 영이면, 감소된 전단력은 영이 되어서, 자유단 경계조건이 되고, C_k가 무한히 큰 수로 접근하게 되면, 면외변위 w가 영으로 수렴하게 됨으로 단순지지 경계조전이 된다.

따라서 자유경계조건으로부터 고정단 경계조건까지를 두 개의 저항계수를 결정함으로써 표시할 수 있다.

면내저항 경계조건 (in-plane constrained boundary condition)

보강판의 경우 단축하중이 작용한다 하더라도, 각 부재에 걸리는 힘은 Poisson의 효과로 인하여 양축하중으로 변하게 된다. 이러한 효과는 Sherbourne[8]에 의하여 처음으로 고려되었으나, 부재의 경계조건이 고정되어 있다고 봄으로 인하여, 양축응력의 효과가 실재보다 과장되었다. 양축응력이 발생하는 정도를 보강재의 형태와 인접부재의 강도를 고려하여 구성방정식을 이용하여 다음과 같이 결정하였다.

$$\zeta=\frac{N_y}{N_0} =\frac{\nu_{yx}}{1-\left(\frac{c^3 Sin^2\beta}{3b_{22}}+\frac{1}{bA_{22}}Cos^2\beta\right)\left(\frac{A_{12}^2}{A_{11}}-A_{22}\right)} =\frac{\nu_{yx}}{(1+\alpha)} \quad (6)$$

여기서 N_0는 판의 단축 좌굴하중이고, α 는 적층판의 적층조건에 따라 양 또는 음의 값을 가질 수 있다. 복합재 적층판의 경우에는 Poisson비가 일반적인 재료에 비하여, 상당히 클 때가 있으므로 반드시 고

려되어야 한다.

3. 보강판 부재의 국부좌굴 해석

보강판 부재가 지탱할 수 있는 국부좌굴 응력을 계산하기 위하여, 다음과 같은 것을 가정하였다. 적층판은 대칭으로 적층되었고, 직교이방성을 갖는다. 또한 하중이 가해지는 부분의 경계조건은 단순지지이며, 하중이 가해지지 않는 부분의 경계조건은 앞절에서 유도된 경계조건을 갖는다.

따라서 지배방정식은 다음과 같은 형태의 해를 갖게 된다.

$$w = f(y) Sin\frac{m\pi x}{a} \tag{7}$$

여기서 f(y)는 결정되어져야 하는 함수이다. 식(7)을 지배방정식에 대입하고, 특성방정식을 풀면, 해는 다음과 같은 형태를 갖는다.

$$\begin{aligned} f(y) = & A_1 Cosh\lambda_1 y + A_2 Sinh\lambda_1 y \\ & + A_3 Cos\lambda_2 y + A_4 Sin\lambda_2 y \end{aligned} \tag{8}$$

여기서

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{m\pi}{a}\sqrt{\sqrt{(\alpha - \frac{\gamma\zeta N_0}{2})^2 - \beta + \gamma N_0 + (\frac{\alpha - \gamma\zeta N_0}{2})}} \\ \lambda_2 &= \frac{m\pi}{a}\sqrt{\sqrt{(\alpha - \frac{\gamma\zeta N_0}{2})^2 - \beta + \gamma N_0 - (\frac{\alpha - \gamma\zeta N_0}{2})}} \end{aligned} \tag{9}$$

여기서

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{D_{12} + D_{66}}{D_{22}} \\ \beta &= \frac{D_{11}}{D_{22}} \\ \gamma &= \frac{1}{D_{22}}(\frac{a}{m\pi})^2 \end{aligned} \tag{10}$$

결정된 변위함수를 길이방향 y = (0,b) 의 경계조건에 대입하면 다음과 같은 4개의 연립방정식을 얻게 되고, 해가 존재하려면 계수의 행렬식의 determinant가 영이 되어야 하며, 이로부터 비선형 방정식을 얻게되고 이를 만족하는 가장 작은 해가 임계좌굴하중이 된다. 계수값들은 표1에 수록되어 있다.

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

표1 탄성적으로 지지된 경계조건의 계수들

$$\begin{aligned} C_{11} &= -C_{k1} \\ C_{12} &= (D_{12} + 4D_{66})(\frac{m\pi}{a})^2\lambda_1 - D_{22}\lambda_1^3 \\ C_{13} &= -C_{k1} \\ C_{14} &= (D_{12} + 4D_{66})(\frac{m\pi}{a})^2\lambda_2 + D_{22}\lambda_2^3 \\ C_{21} &= -bC_{r1}\lambda_1^2 \\ C_{22} &= \lambda_1 \\ C_{23} &= bC_{r1}\lambda_2^2 \\ C_{24} &= \lambda_2 \\ C_{31} &= C_{12}\sinh(\lambda_1 b) - C_{k2}\cosh(\lambda_1 b) \\ C_{32} &= C_{12}\cosh(\lambda_1 b) - C_{k2}\sinh(\lambda_1 b) \\ C_{33} &= -C_{14}\sin(\lambda_2 b) - C_{k2}\cos(\lambda_2 b) \\ C_{34} &= C_{14}\cos(\lambda_2 b) - C_{k2}\sin(\lambda_2 b) \\ C_{41} &= \lambda_1\sinh(\lambda_1 b) - bC_{r2}\lambda_1^2\cosh(\lambda_1 b) \\ C_{42} &= \lambda_1\cosh(\lambda_1 b) - bC_{r2}\lambda_1^2\sinh(\lambda_1 b) \\ C_{43} &= -\lambda_2\sin(\lambda_2 b) + bC_{r2}\lambda_2^2\cos(\lambda_2 b) \\ C_{44} &= \lambda_2\cos(\lambda_2 b) + bC_{r2}\lambda_2^2\sin(\lambda_2 b) \end{aligned}$$

4. 저항계수들의 결정

저항계수들 (constrained factors)은 보강재의 형상과 강성들로부터 구하였다. 식(3)에 사용된 회전저항계수는 무차원으로써, 먼저 좌굴되는 판을 좌굴판이라고하고, 좌굴되지 않는 부재를 구속판이라고 할 경우, 구속판의 형상과 강성에 의하여 결정된다. 그림에서와 같이 모자모양으로 보강된 보강판을 예로들면, 캡부분이 먼저 좌굴된다고 가정하고, 웹부분에 의한 구속계수를 구해보면 다음과 같다. 좌굴판이 좌굴됨으로 인하여, 경계에서 모멘트가 발생하게 되고, 구속판의 경계조건을 단순지지라고 가정하여, 모멘트에 의한 변위를 계산하여, 미분함으로 경계에서 굽힘각을 구한 후, 식(2)과 비교하면 다음과 같은 저항계수를 구할 수 있다.

$$C_r = \frac{c}{b}\frac{D_{22}^c}{D_{22}^w} \tag{12}$$

면외저항계수의 경우에는 그림과 같이 좌굴판의 좌굴로 인하여, 구속판에 전단력을 가하게 된다고 가정하여, 이 전단력에 얼마나 변형하는지를 계산하여, 저항계수를 산출하였다. 이 때 구속판의 한쪽 단은 고정되어 있다고 가정하였다. 발생된 전단력은 좌굴모드에 의하여 싸인함수와 같은 형태를 가지게 된다.

$$V_x = V_x^* \sin\frac{m\pi x}{\ell} \tag{13}$$

구속판인 웹의 경계조건은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$At \quad y' = 0$$

$$w' = 0, \qquad \frac{\partial w'}{\partial y'} = 0 \tag{14}$$

$$At \quad y' = c$$

$$\frac{\partial^2 w'}{\partial y'^2} = 0, \quad \frac{\partial M_{x'y'}}{\partial x'} + Q_{y'} = V_z$$

좌굴판인 캡의 변위는 다음과 같다.

$$w = \sqrt{v'^2 + w'^2} = \sqrt{\left(\frac{c^3}{3D_{22}} V_z \cos\beta\right)^2 + \left(\frac{V_z}{A_{22}} \sin\beta\right)^2} \tag{15}$$

따라서 면외저항계수는 다음과 같다.

$$C_{ki} = \frac{V_z}{w} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{c^3}{3D_{22}} V_z \cos\beta\right)^2 + \left(\frac{V_z}{A_{22}} \sin\beta\right)^2}} \tag{16}$$

다른 부재에서 국부좌굴이 발생한다면, 그 부재에 대한 저항계수는 앞에서 설명한 방법과 동일하게 결정할 수 있다. 복합재 보강판의 국부좌굴응력을 결정하기 위한 방법을 요약하면 다음과 같다.

① 보강판을 평판 부재로 구분한다.

② 부재들간의 저항계수를 계산한다.

③ 저항계수를 이용하여 부재의 좌굴응력을 결정한다.

④ 보강재 사이의 평판은 좌굴을 허용하고, 보강재가 하중을 받는다고 가정한다.

⑤ 좌굴이 발생한 부재는 저항효과를 상실하여, 단순지지로 가정한다.

⑥ 보강재중 가장 취약한 좌굴응력을 결정한다.

⑦ 취약한 보강재를 기준으로 전체 보강판에 걸리는 하중을 계산한다.

5. 보강판의 좌굴하중 계산 예

채널과 Z모양 보강재의 좌굴

채널(channel)과 Z모양 보강재의 좌굴응력을 계산에 개발된 방법을 적용하였다. 채널과 Z모양 보강재의 국부좌굴 현상에 관하여는 Spier와 Arnold[9]가 연구하였으며, 그들의 논문에 실린 실험 결과와 비교하였다. 표2에서는 실험편의 물성치를 보여주고 있다.

비교대상으로 삼은 시편들은 국부좌굴이 일어나도록 제작되었다. 표3은 채널의 좌굴하중을 결정하는 과정을 보여주고 있다.

Table 2 Typical lamina properties of Gr/Ep composite

	E_{11}^t	E_{22}^t	E_{11}^c	G_{12}	ν_{12}
English units	20.0 Msi	1.4 Msi	18.0 Msi	0.74 Msi	0.3
SI units	138GPa	9.6 GPa	124GPa	5.1 GPa	0.3

Table 3 Solution Procedure for Channel

부재	치수	적층각	저항계수	좌굴하중	부재수	하중
1	1.5	$[\pm 45/0_3/90]s$	1.333	3376lb/in	1	1840
2	1.0		3.0		2	2454
좌굴하중						4294

실험결과와 계산값을 표4에 수록하였다. 연결부분을 단순지지라고 가정한 값은 실제 실험치보다 적은 값을 나타내고 있다.

Table 4 Comparison with Experiments

	실험값	계산값	단순지지
시편 #1	4.3, 3.6 kips	4.3 kips	3.4 kips
시편 #2	2.57, 3.0 kips	3.1 kips	2.3 kips
시편 #3	5.03, 4.98 kips	4.9 kips	4.6 kips

보강판의 경우

그림*에서 보강판의 모양을 보여주고 있으며, 전체길이는 17인치이고, 실험값은 50.6과 56.5kips 였다. 표5에서 계산 결과를 보여주고 있다. 이 시편의 좌굴은 web부분에서 발생되었는데, 계산값과 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 하지만 전통적인 방법인 단순지지를 가정하는 경우는 모자부분의 하단이 먼저 좌굴하는 것으로 나타나고 있다. 이는 주변 부재의 구속효과를 고려하지 않았기 때문이다.

Table 5 Prediction for hat shape stiffened panel

	Size	Stacking Sequence	Cr only	Cr &Co	SSSS
1&2	3.85	[0/±45/90]s	178	148	109
3	1.10	[0/±45/90]s	2120	2114	1337
4	1.10	[±45/0_3/90]s	5798	5752	5435
5	2.00	[±45/0_3/90]s	2176	1945	1710
6	0.70	[0/±45/90/±45/0_3/90]s	61547	57984	56555
Total			53.6 kips	49.2 kips	33.8 kips

모자모양으로 보강된 보강판의 국부좌굴 현상을 관찰하기 위하여 여러 가지 실험이 수행되었으며, FEM과 VIPASA (Vibration and Instability of Plate Assembles includinf Shear and Anisotropy)를 사용하여 계산하였다. 그림 *은 시편의 모양과 적층각을 보여주고 있으며, 실험 및 계산 결과를 그림*에서 보여주고 있다.

6. 결론

본 논문에서는 국부좌굴이 발생하는 보강판의 국부좌굴 해석방법을 개발하였다. 해석방법을 검증하기 위하여, 다른 연구자에 의하여 수행된 실험결과와 본 연구가 수행된 연구과제중 수행된 실험결과와 비교하였으며, 또한 다른 연구자들에 의하여 동일한 시험편에 대하여 FEM과 FSM에 기초를 둔 VIPASA에 의하여 수행된 수치해석 결과와도 비교하였다. 본 논문에서 개발된 방법이 회전저항만을 고려한 것은 FSM을 간략화한 것이므로 FSM해석 결과와 5%이내의 오차를 가지고 잘 일치하고 있음을 보여주고 있고, 실험결과와는 탄성적 지지를 가정한 해석 결과가 잘 일치하고 있음을 알 수 있었다. 또한 계산시간을 비교할 경우, 본 연구에서 개발된 방법은 해석적인 방법이므로, 매우 빠르다는 장점을 갖는다. 따라서 보강판의 초기설계용으로 적합하다.

참고문헌

1. Troisky, M.S., "Stiffened Plates-Bending, Stability and Vibrations", Elsevier Scientific Publishing Company, 1976.
2. Stroud, W. J., and Anderson, M. S,. " PASCO : Structural Panel Analysis and Sizing Code-Capability and Analytical Foundations", NASA TM 80181, January, 1980.
3. Karman, T.V., Secher, E.E., and Donnell, L.H., "The Strength of Thin Plates in Compression", Transactions, ASME, Vol.54, 1932.
4. Peshkam, V. and Dawe, D.J., "Buckling and Vibration of Finite-Length Composite Prismatic Plate Structures with Diaphragm Ends Part II : Buckling Applications ", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 77, pp. 227-252, 1989.
5. Wittrick, W.H., and Williams, F.W., "Buckling and Vibration of Anisotropic or Isotropic Plate Assemblies under Combined Loadings", Int. J. Mech. Sci., Vol. 16, 1974.
6. Stoll, F., and Gurdal, Z., "Nonlinear Analysis of Compressively Loaded Linked Plate Structures", AIAA 90-0968, 1990.
7. Bleich, F. "Buckling Strength of Metal Structures", Ch. IX, New York, McGraw-Hill, 1952.
8. Sherbourne, A.N., and Pandey, M.D., "Effects of In-Plane Restraints on the Stability of Laminated Composite Plates", Composite Structures, Vol.20, pp.73-81, 1992.
9. Spier, E.E., Arnold, R.A., and Kedward, M.S., "Stability Critical Compression Members", Handbook of Composites, Structures and Design, p. 583-622, 1981.