

탄성지지된 특별직교 이방성 복합판의 구조해석

Structural Analysis of Elastic supported Special Orthotropic Composite Plates

김 덕현¹⁾ 박 제선²⁾ 심 도식³⁾ 이 정호⁴⁾
Kim, Duk-Hyun Park, Je-Sun Sim, Do-Sik Lee, Jung-Ho

ABSTRACT

This paper presents the result of analysis of special orthotropic plates supported by elastic foundation and simple supported edges.

Convergence and accuracy of the solution are examined and it is verified that the solution obtained is sufficiently accurate. The effect of the spring constant, k , on deflection is studied.

1. 서론

특별직교 복합판의 휨에 대한 지배방정식은 처짐 w 에 관한 4차의 단일 미분항을 갖는다. 따라서 중심차분법을 사용한다 하더라도 소요되는 pivotal point의 수가 5개가 되므로, 가상점을 소거시키는데 계산상 번잡을 일으킨다. 그러나 평형방정식을 사용하여 3개의 종속변수 w , M_x , M_y 를 가진 2차 연립편미분 방정식으로 나타낼 수 있다. 그래서 이 3개의 방정식을 풀게 되면 최종적으로 처짐과 모멘트를 한 번에 구할 수 있는 장점이 있다. 차분법에 의한 matrix는 경계 조건 등을 포함하고, tri-diagonal matrix를 만들 수 있으며 해법 또한 간단하다^[3].

이 논문에서 나오는 결과는 처짐과 M_x , M_y 가 출력되며, 처짐값을 사용해 응력과 전단력, M_{xy} 를 모두 구할 수 있다. 특별직교 이방성 판을 F.D.M으로 해석하여 energy 방법인 Navier의 해와 비교하여 정확도를 고찰하였으며, 지반상수의 변화에 따른 처짐값을 비교하여 half range sine 함수로 가정된 Navier 해의 한계를 살펴 보았다.

-
- 1) KOREA COMPOSITES
 - 2) 강원대학교 토목공학과 교수
 - 3) 강원대학교 토목공학과 시간강사
 - 4) 강원대학교 토목공학과 박사과정

2. 탄성지지된 특별직교 이방성 복합판의 유한차분법에 의한 해석

탄성지지된 특별직교 이방성 판의 지배 방정식은 다음과 같다.

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(x, y) - kw \quad (1)$$

여기서 $D_1 = D_{11}$, $D_2 = D_{22}$, $D_3 = 2(D_{12} + 2D_{66})$ 이다.

위의식 (1)은 4차의 단일 미분항을 갖기 때문에 중앙 차분식을 사용하여도 소요되는 점의수가 5개가 되어 계산상 혼잡을 일으킨다. 그러한 혼잡을 피하기 위해서 다음과 같이 세 개의 종속변수 w , M_x , M_y 를 가진 세 개의 2차 연립 편미분 방정식으로 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 4D_{66} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial M_y}{\partial y^2} = -q(x, y) + kw(x, y) \quad (2)$$

$$M_x = -D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (3)$$

$$M_y = -D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (4)$$

첫 번째식의 $4D_{66} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}$ 항은 4차 편미분 방정식이지만 2차 차분식으로 표기되므로 가상 경계 조건을 줄일 수 있다.

2차원 좌표계를 사용할 때 요소 크기는 각각 X와 Y의 증분인 ΔX 와 ΔY 로 주어질 수 있으며, MI를 X방향에 주어진 점의수라 하고 MJ를 Y방향의 점의수로 하여 판의 구간을 나누었다.

우선 각 경계 라인을 제외한 전형적인 구간에 대하여 J방향으로 차분식을 세우면 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(\Delta x)^2} [M_x(i-1, j) - 2M_x(i, j) + M_x(i+1, j)] \\ & - \frac{4D_{66}}{(\Delta x)^2 (\Delta y)^2} \begin{vmatrix} w(i-1, j+1) & -2w(i, j+1) & w(i+1, j+1) \\ -2w(i-1, j) & 4w(i, j) & -2w(i+1, j) \\ w(i-1, j-1) & -2w(i, j-1) & w(i+1, j-1) \end{vmatrix} \\ & + \frac{1}{(\Delta y)^2} \begin{bmatrix} M_y(i, j+1) \\ -2M_y(i, j) \\ M_y(i, j-1) \end{bmatrix} - kw(i, j) = -q(i, j) \end{aligned} \quad (5)$$

$$M_x(i, j) + \frac{D_{11}}{(\Delta x)^2} [w(i-1, j) - 2w(i, j) + w(i+1, j)]$$

$$+ \frac{D_{12}}{(\Delta y)^2} \begin{vmatrix} w(i, j+1) \\ -2w(i, j) \\ w(i, j-1) \end{vmatrix} = 0 \quad (6)$$

$$M_y(i, j) + \frac{D_{12}}{(\Delta x)^2} [w(i-1, j) - 2w(i, j) + w(i+1, j)] \\ + \frac{D_{22}}{(\Delta y)^2} \begin{vmatrix} w(i, j+1) \\ -2w(i, j) \\ w(i, j-1) \end{vmatrix} = 0 \quad (7)$$

$$C_1 = \frac{1}{(\Delta x)^2}, \quad C_2 = \frac{1}{(\Delta y)^2}, \quad C_3 = \frac{4D_{66}}{(\Delta x)^2 (\Delta y)^2}, \\ C_4 = \frac{D_{11}}{(\Delta x)^2}, \quad C_5 = \frac{D_{12}}{(\Delta y)^2}, \quad C_6 = \frac{D_{12}}{(\Delta x)^2}, \quad C_7 = \frac{D_{22}}{(\Delta y)^2}, \\ E_1 = C_4 + C_5, \quad E_2 = C_6 + C_7, \quad E_3 = (4C_3 + k)^{\frac{1}{2}}$$

로 정의 하면 다음과 같이 정리된다.

$$C_1 |Mx_j|_{i\pm 1} - 2C_1 |Mx_j|_i - C_3 \begin{vmatrix} w_{j+1} \\ -2w_j \\ w_{j-1} \end{vmatrix}_{i\pm 1} \\ - 2 \begin{vmatrix} -C_3 w_{j+1} \\ E_3 w_j \\ -C_3 w_{j-1} \end{vmatrix}_i + C_2 \begin{vmatrix} My_{j+1} \\ -2My_j \\ My_{j-1} \end{vmatrix}_i = -|q_j|_i \quad (8)$$

$$|Mx_j|_i - C_4 |w_j|_{i\pm 1} - \begin{vmatrix} C_5 w_{j+1} \\ -2E_1 w_j \\ C_5 w_{j-1} \end{vmatrix}_{i\pm 1} = 0 \quad (9)$$

$$|My_j|_i - C_6 |w_j|_{i\pm 1} - \begin{vmatrix} C_7 w_{j+1} \\ -2E_2 w_j \\ C_7 w_{j-1} \end{vmatrix}_{i\pm 1} = 0 \quad (10)$$

식(8),(9),(10)은 경계 라인을 제외한 전형적인 선에서의 차분식이다.

어떤 전형적인 선을 고려하고, $x=0$ 인 원점으로부터 I 번째의 것이라고 하자. 모든 선이 MJ 개의 균등한 거리를 가진 점으로 대치된다고 가정하면, 각점에서 평형방정식 (2),(3),(4)식이 만족되어야 한다. 또한 경계라인에서는 각 라인의 경계조건을 만족 시켜야 한다. $j=1$ 부터 j 가 증가하는 방향으로 먼저 (2)식을 적용시키고, 다음에 (3)과 (4)를 차례로 적용시키면서 순서대로 배열하면 새로운 matrix X_I 는 다음과 같이 정의할 수 있다.

3. 수치 해석

3.1 프로그램의 오차 계산

임의의 경계조건을 갖는 판에 대한 해석해가 없기 때문에 부득이하게 네변이 모두 단순지지 되었을 경우의 Navier해법과 비교하였다. 여기서 집중하중 1N이 판의 정 중앙에 재하되었을 때, 각 mesh의 중간점에서의 처짐을 Navier해법과 비교하였다. 이 때, 판의 자중은 무시하였고 프로그램의 오차를 계산하였다.

고려된 특별직교이방성 적층판의 물성은 다음과 같다.

$$E_1 = 67.36 \text{ Gpa}, \quad E_2 = 8.12 \text{ Gpa}$$

$$G_{12} = 3.0217 \text{ Gpa}, \quad \nu_{12} = 0.272, \quad \nu_{21} = 0.0328$$

적층형태는 $[A/B/A]_r$ 이다. 여기서 보강각도 $A = 0^\circ$, $B = 90^\circ$ 이고, 적층수 $r = 1$ 이다. 한 개의 ply두께는 0.005m, 판의 형상은 1m×1m로 하였다. 요소의 수는 10×10, 20×20, 40×40으로 분할하여 mesh중앙점의 처짐값을 비교하였다.

4가지 경우 처짐의 비교치를 표 1에서부터 표 3에 나타내었다.

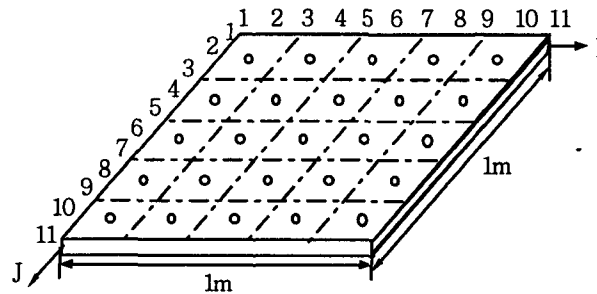


그림 1. I, J의 좌표

표 1. Navier의 해와 유한차분법과의 처짐비(10×10 mesh size)

		F. D. M./NAVIER				
J \ I		2	4	6	8	10
1	1	1.0041	1.0028	1.0020	1.0028	1.0041
	3	0.9954	0.9945	0.9927	0.9945	0.9954
	5	0.9767	0.9684	0.9495	0.9684	0.9767
	7	0.9954	0.9945	0.9927	0.9945	0.9954
	9	1.0041	1.0028	1.0020	1.0028	1.0041

표 2. Navier의 해와 유한차분법과의 처짐비(20×20 mesh size)

		F. D. M./NAVIER				
J \ I		2	4	6	8	10
1	1	1.0016	1.0006	1.0003	1.0006	1.0016
	3	0.9989	0.9984	0.9984	0.9984	0.9989
	5	0.9946	0.9927	0.9780	0.9927	0.9946
	7	0.9989	0.9984	0.9984	0.9984	0.9989
	9	1.0016	1.0006	1.0003	1.0006	1.0016

3. Navier의 해와 유한차분법과의 처짐비(40×40 mesh size)

		F. D. M./NAVIER				
J \ I		2	4	6	8	10
1		1.0016	1.0013	1.0010	1.0013	1.0016
3		1.0011	1.0008	1.0008	1.0008	1.0011
5		1.0000	0.9993	0.9897	0.9993	1.0000
7		1.0011	1.0008	1.0008	1.0008	1.0011
9		1.0016	1.0013	1.0010	1.0013	1.0016

표 1~3에서 10×10mesh로 나뉘었을 경우는 최대 5%, 20×20mesh는 2.1%, 40×40mesh는 1%의 오차를 나타냈다.

표 4. K=10 N/m³ 일 때 Navier의 해와 유한차분법과의 처짐비

		F. D. M./NAVIER				
J \ I		2	4	6	8	10
2		0.9959	0.9972	0.9980	0.9972	0.9959
4		1.0046	1.0055	1.0074	1.0055	1.0046
6		1.0239	1.0327	1.0571	1.0327	1.0239
8		1.0046	1.0055	1.0074	1.0055	1.0046
10		0.9959	0.9972	0.9980	0.9972	0.9959

표 5. K=10000 N/m³ 일 때 Navier의 해와 유한차분법과의 처짐비

		F. D. M./NAVIER				
J \ I		2	4	6	8	10
2		0.9959	0.9968	0.9979	0.9968	0.9959
4		1.0046	1.0053	1.0074	1.0053	1.0046
6		1.0238	1.0328	1.0573	1.0328	1.0238
8		1.0046	1.0053	1.0074	1.0053	1.0046
10		0.9959	0.9968	0.9979	0.9968	0.9959

표 6. K=10000000 N/m³ 일 때 Navier의 해와 유한차분법과의 처짐비

		F. D. M./NAVIER				
J \ I		2	4	6	8	10
2		0.9077	0.9185	0.9276	0.9185	0.9077
4		0.9475	0.9529	0.9683	0.9529	0.9475
6		1.0168	1.0501	1.1283	1.0501	1.0168
8		0.9475	0.9529	0.9683	0.9529	0.9475
10		0.9077	0.9185	0.9276	0.9185	0.9077

표 7. K=30000000 N/m³ 일 때 Navier의 해와 유한차분법과의 처짐비

		F. D. M./NAVIER				
J \ I		2	4	6	8	10
2		0.9431	0.8029	0.7634	0.8029	0.9431
4		0.8665	0.8899	0.9368	0.8899	0.8665
6		1.0049	1.0668	1.1937	1.0668	1.0049
8		0.8665	0.8899	0.9368	0.8899	0.8665
10		0.9431	0.8029	0.7634	0.8029	0.9431

표 8. $K=60000000 \text{ N/m}^3$ 일 때 Navier의 해와 유한차분법과의 처짐비

		F. D. M./NAVIER				
J \ I		2	4	6	8	10
2	I	0.7581	0.7496	0.7376	0.7496	0.7581
4	I	0.7417	0.8134	0.9247	0.8134	0.7417
6	I	0.9875	1.0767	1.2403	1.0767	0.9875
8	I	0.7417	0.8134	0.9247	0.8134	0.7417
10	I	0.7581	0.7496	0.7376	0.7496	0.7581

표 4~8. 은 K 값 증가에 따른 Navier의 해와 유한해석법과의 처짐비를 나타낸 것인데 $K=10 \text{ N/m}^3$ 에서 60000000 N/m^3 으로 증가함에 따라 최대오차가 5%에서 24%로 증가함을 보여준다.

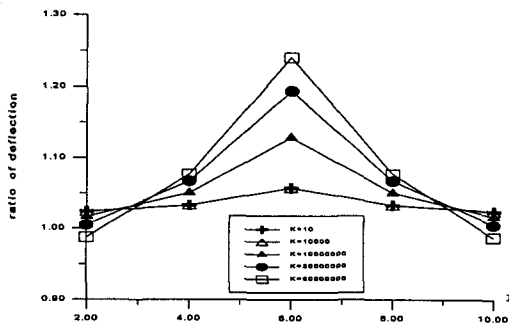


그림 2. k 값 증가에 따른 처짐비($J=6$)

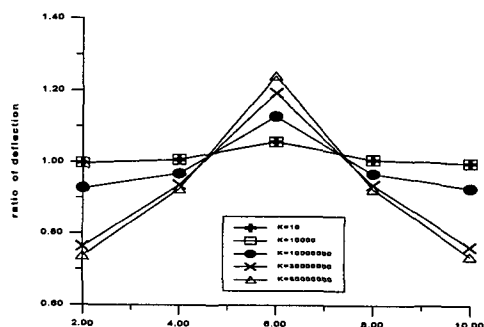


그림 3. k 값 증가에 따른 처짐비($I=6$)

4. 결론

이 논문은 정확한 해가 존재하지 않는 임의의 경계조건을 갖는 특별직교 이방성 적층판을 유한차분법을 사용하여 해석을 하고자 하였다. 프로그램의 정확도를 비교하기 위하여 네변이 단순지지된 경우에 대하여 Navier 해법과 비교해 본 결과 정확성이 입증되었다. 또한 판의 저면 전체가 지반 등에 탄성지지되었을 경우에 대하여 계산을 수행하여 본 결과 기초 지반 상수 K 값이 10 N/m^3 에서 60000000 N/m^3 로 증가함에 따라 오차가 5%~24%로 증가하였다. 그 이유는 Navier 해법이 half range-sine곡선으로 가정한 처짐값이므로 경계면에서 약간의 상향처짐이 있을 경우는 sine 곡선이 맞지 않음을 나타내고 있다. 양질의 Subgrade^[3]로 지지된 경우 $K=67750000 \text{ N/m}^3$ 인 것을 보면 Navier 해법은 탄성지지되었을 경우는 사용하기 힘든 것으로 결과가 나타났다.

참고 문헌

1. Kim Duk Hyun, "A Method of Vibration Analysis of Irregularly Shaped Structural Mechanics", 제 1차 산업기지 건설을 위한 국제회의.
2. Kim, D. H., Park, J. S., & Kim, K. J., "Wibration Analysis of Irregularly Shaped Laminated Thick Composite Plates II", JISSE2, Tokyo, 1991. 12. 14.
3. Kim, D. H., "Analysis of Triangularly Folded Plate Roofs of Umbrella Type," 16th Congress of Applied Mechanics, Tokyo, Japan, 1966. 10. 19.