球形 돔의 근사고유모드 작성 및 응용에 관한 연구

A study on the Approximate Eigen Modes and Application of Spherical Domes

한 상 을*, 권 택 진**, 최 옥 훈***
Han, Sang-Eul, Kwun, Taek-Jin, Choi, Ok-Hun

ABSTRACT

The purpose of this paper is to get a powerful tool for response analysis of a spherical dome subjected to dynamic excitation based on mathematically analytical method, i. e., the Galerkin procedure in modal analysis, with sufficient accuracy and practicality.

At first, this paper provides an approximate solution of eigen modes, which has sufficient accuracy and praticallity for response analysis in symmetric and antisymmetric state.

In the second stage of this paper, response analysis of a dome subjected to horizontal earthquakes is executed as the application of these approximate modes. Many important response characteristics may manifest themselves through parametric survey of material and geometric properties.

1. 서 론

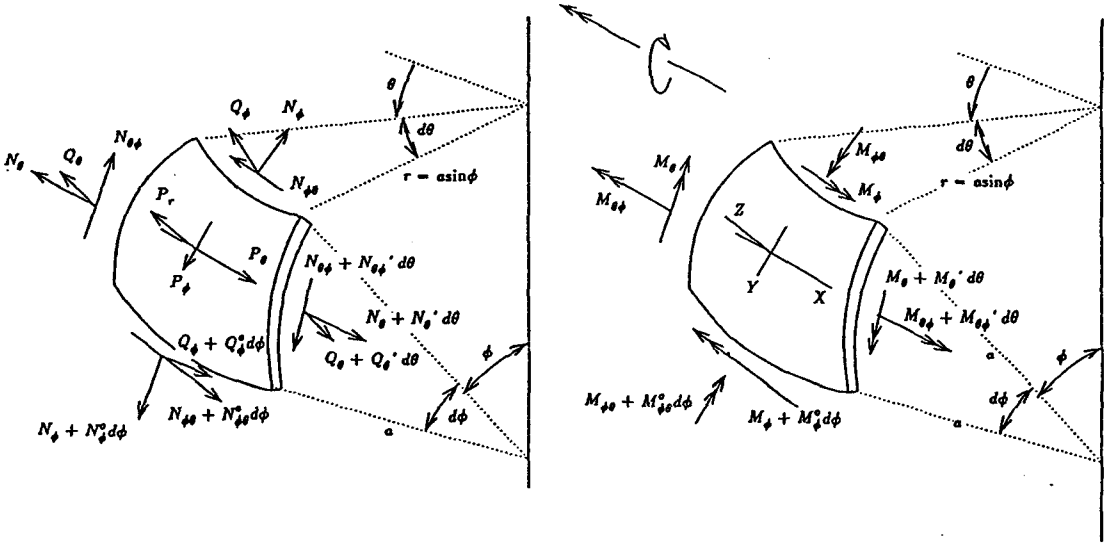
돔형 쉘을 포함한 일반 대스팬구조물을 설계하는 경우, 외부하중인 지진하중이나 풍하중은 무시할 수 없으며, 일반적으로 이들 하중을 정적외력으로 치환하여 취급한다. 그러나, 이들 동적하중의 크기에 대한 평가는 주파수특성과 구조물의 고유진동수와의 관계에 따라 결정되기 때문에 대단히 어려운 실정이다. 또한, 구조물 설계에 있어서는 강도뿐만 아니라 기능성등을 고려할 때 동적하중의 영향이 충분히 해석되어야 하며, 따라서, 구조물의 응답거동에 대한 연구의 필요성이 강조되고 있다.

* 인하대학교 건축공학과 교수
** 성균관대학교 건축공학과 교수
*** 안동공업전문대학 건축공학과 교수

이에 관한 연구로, 이미 H. Kunieda는 구형 쉘의 응답해석을 위하여 취급이 간편하고 정밀도가 높은 축대칭 근사 고유모드작성법을 제시하고 있다. 이 기법을 확장하여 일반 고유모드 작성도 수행할 수 있지만, 본 논문에서는 축대칭, 역대칭모드만으로도 거동파악이 충분하다고 사료되므로 역대칭 진동시의 근사 고유모드를 작성하고, 축 및 역대칭 근사 고유모드를 이용한 모드해석을 수행한다. 특히, 역대칭 진동시의 정해에서는 축대칭 진동시 포함되어있지 않는 u, v의 강체이동 항이 존재하지만, 본 논문의 근사법에는 나타나지 않는 항이므로 정해에서 구한 값을 이용하기로 한다. 이 강체변위의 항은 본래 계산결과로부터 구해지는 고유진동수의 함수이며, 본 논문에서는 처음에 적당한 값을 고유진동수로 주고, 계산결과로 구한 고유진동수를 다시 대입하여 계산하는 반복법을 이용한다.

2. 구형 쉘의 역대칭 자유진동시의 근사 고유모드 작성

정밀해에 기초를 둔 고유진동 모드의 계산결과에 의하면, 접선방향 변위 성분 u, v의 관성 항을 포함한 normal 진동과 이것을 무시한 flexural진동의 차이는 일반적으로 설계하는 구형 쉘의 기하학적 형상 및 재료 상수의 범위내에서 극히 경미하다는 것이 H. Kunieda[4] 에 의해 밝혀졌다. 또한, flexural진동의 가정을 도입하면 응답해석이 대단히 간략화 되므로 본 논문에서는 flexural진동의 가정을 도입한다.



(a) 합응력 (b) 합모멘트

그림 1. 연속체 쉘의 기하형상 및 내력

구형 돔의 지배식은 flexural 진동의 가정을 도입하면 다음의 형태로 표현할 수 있다.

$$H_2 H_2(w) - \frac{a}{D} H_2(\phi) + \frac{ma^4}{gD} \ddot{w} = 0 \qquad (1)$$

$$H_2 H_1(\phi) - (1-\nu) \frac{D}{a} H_2 H_2(w) + EhaH_2(w) = 0 \qquad (2)$$

여기에서 취급하는 구형 쉘은 정상부가 닫혀있고, 경계부분이 하나인 돔형 쉘구조이다. 식(1) 및 식(2)의 역대칭시 (n=1)의 해 w는 Legendre 陪多項式(bi-polynomial)을 이용하여 다음식과 같이 표현할 수 있다.

$$w = \sum_{i=1}^{N} B_i \ \hat{W}_i(\phi)\, T_i(t) \cos\theta, \qquad \hat{W}_i(\phi) = \sum_{j=J_i}^{K_i} F_{ji}\, P_j^1(\phi) \qquad (3)$$

여기에서, N은 모드계산에 사용하는 모드의 수, P_j^n는 Legendre 배함수를 표현하고, $\hat{W}_i$는 가상 모드이다. Legendre 배함수의 조합에 의해 하나의 모드를 표현하고, 그 모드의 조합에 의해 해 w를 표현하고 있다. 이 가상 모드에 포함된 J_i, K_i의 선정법이 최종적으로 해의 정밀도를 결정하게 된다. 여기에서, n=1일 때의 Legendre 배함수는

$$P_m^1(\cos\phi) = D_m \sin m\phi + \ \text{Func.}\,(\sin k\phi;\ k = 0 \sim (m-1)) \qquad (4)$$

와 같이 급수 전개된다. 즉, P_m^1의 곡선을 그리면, $0 < \phi \leq 90°$의 영역에서 이 곡선에는 $m/2$ 개의 절점이 존재한다. 여기에서, 이 절점이 0부터 90°의 사이에 균등히 분포하고 있다고 가정한다(단, 충분히 큰 m에 대해서). 따라서, $0 < \phi \leq \phi_o$의 영역에 i개의 절점이 있는 상황을 생각하면 상기의 m을 대신해서 $2i \cdot (90°/\phi_o) + 2$를 사용하면 된다. 식(3)의 $\hat{W}_i$를 i번째 모드에 임시적으로 대응해보면

$$K_i = \ \text{int.}\,[\frac{180\,i}{\phi_o} + 2] \qquad (5)$$

$\hat{W}_i$는 i차 모드를 표현하여 얻는 Legendre 배다항식 $P_{K_i}^1$을 포함하는 것이 된다. 그렇지만, n=1일 때의 Legendre 배다항식이 $\phi = 90°$에서 반드시 0이 되며, m이 작을 때는 그 절점이 ϕ=0, 180°의 부근에 집중해 버리기 때문에 ϕ_o가 90° 근접할 때 식(5)를 수정해야 할 필요가 있으며, 해석결과로부터 $90° < \phi_o < 120°$일 때 m이 작게 되는 제 1모드에 대해서만,

$$K_1 = K_1 + 1 \qquad (6)$$

로 한다.

한편, F_{ij}를 구하기 위한 조건식의 수는 직교조건 (i-1)개와 경계조건 4개 (미지 적분정수 G를 포함해서) 로 합계 (i+3) 개이므로

$$J_i = K_i - (i+3) \tag{7}$$

가 있으면 되지만, Legendre 배함수를 전부 사용하기 위해서는

$$J_i = \min.\,[K_i - (i+3),\ K_{i-1} + 1] \tag{8}$$

로 한다.

고유모드는 다음의 2개의 과정을 거쳐서 결정한다. 먼저 가상모드 $\hat{W}_i$는 경계조건(아래식(13))과 상호 직교조건 ((아래식(15))을 만족하도록 결정한다. 다음에는 이런 가상모드를 자유진동 지배방정식에 대입하고, Galerkin법을 적용해서 일반화좌표(계수 B_i)를 정하며, 최종적으로 고유모드 $W_i(\phi)$를 구한다.

2.1 가상모드 $\hat{W}_i$의 가정

경계조건 중의 미지상수 G가 포함되어 있는 항부터 다음과 같이 첫 번째 모드와 그 이하의 모드로 나누어 생각한다. 여기에서 주의할 점은 경계조건에 포함되는 $P^{n}_{\mu_i}$이 실제 계산결과로서 구해지는 Ω_i의 함수라고 하는 것이다. 근사해를 구하기 위해서 여기에서는 정해를 참조해서 Ω_i에 미리 0.7 ~ 1.7 의 값을 주고, 그 결과로부터 구해지는 Ω_i값을 다시 사용하여 계산을 실행하는 방법을 사용하였다(약 5회정도로 충분히 수렴되었다.).

여기에서, $\Omega_i^2 = \dfrac{m a^2}{E h g}\,\omega^2$

1) 첫번째 모드에 대해 $F_{j1}\,|_{j=J_1} = 1$과 다음의 식(13)의 4개의 경계조건을 사용해서 $F_{j1}(j \neq J_1)$의 미지상수 G (경계조건 참조) 를 구한다.

2) 제 k번째의 모드에 대해서 1)에서 구한 G 및 다음의 (k-1)개의 직교조건과 4개의 경계조건을 만족하는 F_{jk}를 구한다.

2.2 경계조건

정밀해에서 식(1), (2)에서 구해지지 않는 u, v의 성분은 참고문헌[1, 2]에서 일반적으로

$$u = \frac{1+\nu}{E h a}\, G P^{n}_{\mu_i} \frac{n}{\sin\phi} \cos n\theta \cos wt \tag{9}$$

$$v = -\frac{1+\nu}{Eha} G P^{n}_{\mu_4,\phi} \sin n\theta \cos wt \qquad (10)$$

여기에서, $\mu_4 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda_4}$, $\lambda_4 = -\{2+2(1+\nu)\Omega^2\}$

따라서, 식(3)과 같이 전개할 때, 예를 들어 고정경계조건 ($w = u = v = w^o = 0$) 은

$$\begin{aligned} &\tilde{W}_i = 0 && (w=0) \\ &-\lambda_i \tilde{W}_{i,\phi} + G\frac{1}{\sin\phi} P^1_{\mu_4} = 0 && (u=0) \\ &\lambda_i \frac{n}{\sin\phi} \tilde{W}_i - G P^1_{\mu_4,\phi} = 0 && (v=0) \\ &\tilde{W}_{i,\phi} = 0 && (w^o=0) \end{aligned} \qquad (11)$$

과 같이 표현할 수 있다.

2.3 직교조건

직교조건은 다음 식으로 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} &\int_0^{\phi_0} [H_2 H_2(\tilde{W}_p) - \frac{a}{D} H_2(\Psi_p)] \tilde{W}_k \sin\phi \, d\phi \\ &= \int_0^{\phi_0} [H_2 H_2(\tilde{W}_k) - \frac{a}{D} H_2(\Psi_k)] \tilde{W}_p \sin\phi \, d\phi \quad (p = 1 \sim (k-1)) \end{aligned} \qquad (12)$$

적분을 실행하여 위의 식을 다시 쓰면, 다음의 閉形(closed form)함수가 주어진다.

$$\begin{aligned} &\sum_{q=J_k}^{K_k} F_{qk} \sum_{q=J_p}^{K_p} F_{jp} [\{2-q(q+1)\}^2 - x\lambda_q \{2-q(q+1)\} \\ &\quad -\{2-j(j+1)\}^2 + x\lambda_j \{2-j(j+1)\}] S^n(q,j) = 0 \end{aligned} \qquad (13)$$

이상의 방정식에서 4개의 경계조건식(11)과 직교조건식(13)을 사용하여 F_{ji}를 i에 대해서 순서에 따라 구할 수 있다. 단, F_{ji}를 결정하는 연립방정식의 계수행렬은 일반적으로 정칙이 되지 않으며, 그 이유는 K_i를 식 (5)와 같이 결정하고 있기 때문이다.

2.4 고유모드 W_i의 결정

제 1단계에서 결정한 F_{ji}를 사용해서 식 (3)을 식 (1), 식 (2)에 대입하고, Galerkin법을

적용하면 B_j에 관한 다음의 식이 얻어진다.

$$-\Omega^2[m_{ij}]\{B_j\}+[k_{ij}]\{B_j\}=0 \qquad (14)$$

여기에서,

$$m_{ij}=m_{ji}=\sum_{r=J_i}^{K_i}\sum_{s=J_j}^{K_j}F_{ri}F_{sj}S^1(r,s)$$

$$K_{ij}=K_{ji}=\sum_{r=J_i}^{K_i}\sum_{s=J_j}^{K_j}F_{ri}F_{sj}[2-r(r+1)][\frac{2-r(r+1)}{k}-\lambda_r]S^1(r,s)$$

$$S^n(r,s)=\int_0^{\phi_0}P_s^n(\cos\phi)P_r^n(\cos\phi)\sin\phi\,d\phi$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{r(r+1)-s(s+1)}[(s-r)\cos\phi P_s^nP_r^n \\ -(s+n)P_{s-1}^nP_r^n+(r+n)P_s^nP_{r-1}^n]_{\phi=\phi_0} & (r\neq s)\\ -[P_r^nP_r^{n-1}\sin\phi]_{\phi=\phi_0}+(r+n)(r-n+1)S^{n-1}(r,r) & (r=s)\end{cases}$$

$$S^o(r,s)=\int_0^{\phi_0}P_s(\cos\phi)P_r(\cos\phi)\sin\phi\,d\phi$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{r(r+1)-s(s+1)}[(s-r)\cos\phi P_sP_r \\ -sP_{s-1}P_r+rP_sP_{r-1}]_{\phi=\phi_0} & (r\neq s)\\ \dfrac{1}{2r+1}[1-P_rP_r\cos\phi]_{\phi=\phi_0}-2\sum_{p=1}^{r/2}(2r+1-4p)S^o(r,r-2p) & (r=s)\end{cases}$$

식(14)의 k_{ij}가 대칭이 되는 것은 식(12)를 이용하기 때문이다. 식(14)에서 고유진동수 Ω_i와 일반화 좌표 벡터 $\{B_j\}_i$가 통상의 수법으로 계산되므로, $\{B_j\}_i$를 식(3)에 대입하면 최종적으로 다음과 같이 고유모드가 계산된다.

$$w=\sum_{i=1}^{N}A_iW_i(\phi)\cos\phi,$$

$$W_i(\phi)=\{B_s\}_i^T\{\hat{W}_s\}=\sum_{j=1}^{K_N}G_{ji}P_j^1(\cos\phi),\qquad G_{ji}=\sum_{s=1}^{N}\{B_s\}_i^TF_{js} \qquad (15)$$

여기에서, $W_i(\phi_o)$는 고유모드이며, $A_i=A_i(t)$이다.

이 근사해는 직교계의 Legendre 배다항식을 사용하고 있으며, $\hat{W}_i$는 완전계를 구성하지만, Legendre 배함수식의 유한 개를 사용하고, Galerkin법을 적용하고 있는 것 등에서 식(17)로부터 구해진 고유치가 완전히 적절하다고는 말할 수 없다. 즉, 복소 고유치가 구해졌을 가능성도 있기 때문이다. 그러므로, 구해진 고유치의 유효성, 적절성을 검토할 필요가 있며, 다음 과정에 따라 실행된다.

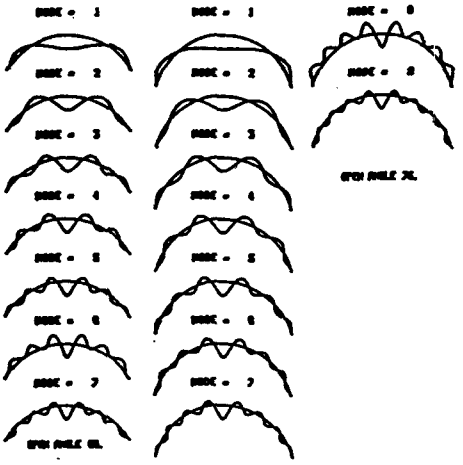


그림 2. 근사이론에 의한 구형돔의 대칭 처짐모드의 형상

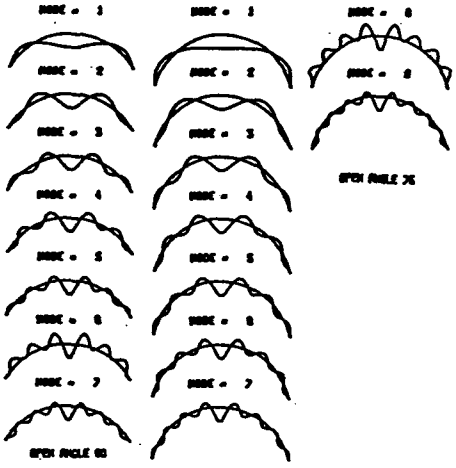


그림 3. 정밀이론에 의한 구형돔의 대칭 처짐모드의 형상

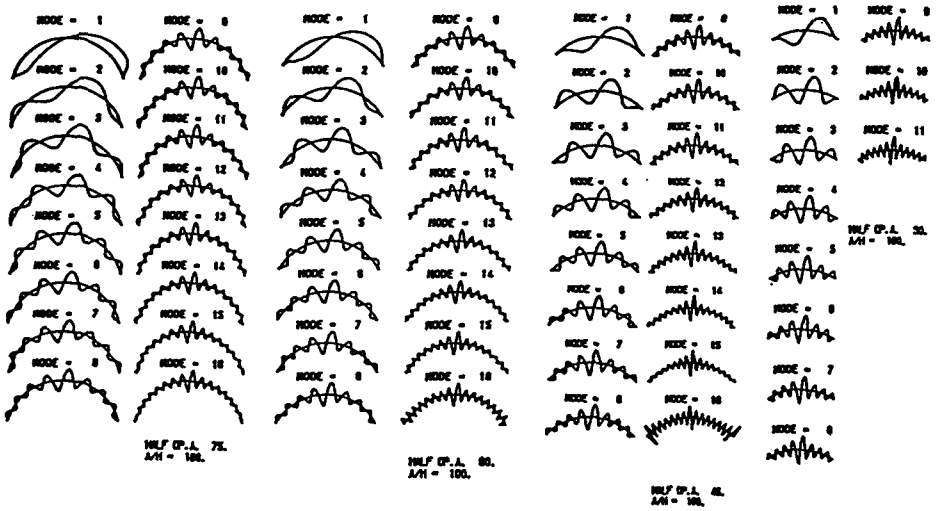


그림 4. 근사 이론에 의한 구형돔의 역대칭휨 모드의 형태 (고정지지, R / h = 100, 30°~75°)

다음 식에서 Ω_i를 계산하고,

$$\Omega_i^2 = [\{B\}_i^T [(m_{pq})]\{B\}_i]^{-1}[\{B\}_i^T [(k_{pq})]\{B\}_i] \qquad (16)$$

Ω_i와 고유치 ω_i를 비교하여 그 차이가 무시할 수 있는 정도로 작을 때, 대응하는 ω_i는 유효하다고 할 수 있다.

3. 수치해석결과 및 결론

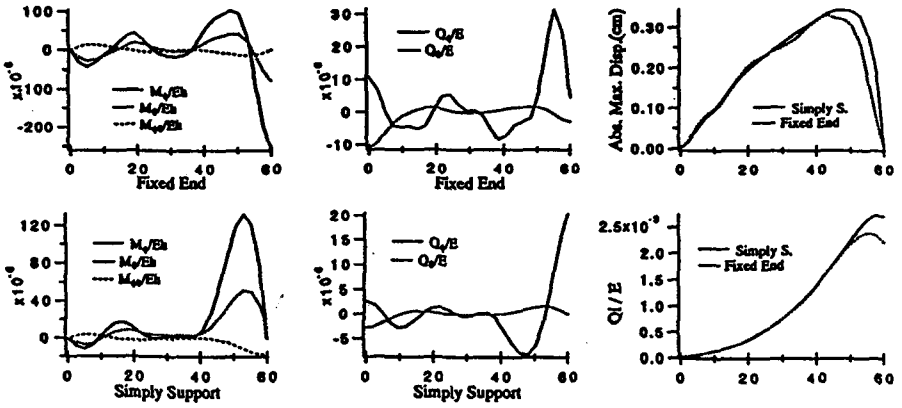


그림 5. 단부조건에 따른 합응력 및 변위분포

($\Phi_0 = 60^0$, $A = 6.5\times10^{-4}$, *El Centro*, $t = 4.94$sec.)

고유진동수, 고유모-드가 정밀해와 거의 일치하고 있으며, 얻어진 근사고유모-드의 타당성을 확인하였다. $\Phi_0 = 90^0$을 기준으로 한 Legendre 배함수의 절점분포 근사에 의한 K_r의 계산식은 역대칭 자유진동시 (n = 1)에는 충분히 실용적이라고 판단된다. 그러나, 비대칭 자유진동시 ($n \geq 2$) 동등한 방법으로 K_r를 계산하였지만 좋은 결과를 얻을 수 없었으며, 향후 연구과제이다. 또한, 역대칭선형강제진동응답해석에 근사고유모드를 사용함으로서 간단이 수행될 수 있고, 영역적분시 폐형함수형태로 정식화함으로서 대단히 단순화될 수 있음을 보였다. 축대칭시와 같이 본 논문의 모-드를 사용함으로서 비선형강제진동응답해석의 수행도 간편화할 수 있으며, 구형 쉘의 응답성상을 보다 명확히 규명할 수 있다고 사료된다.

참고문헌

1. Kunieda, H., Classical Buckling Load of Spherical Domes under Uniform Pressures, Proc., ASCE, Vol.118, No.EM8, August, 1992, pp. 1513 - 1525.
2. Han, Sang-Eul and Kunieda, H., Approximate Eigen Modes of a Spherical Domes in Antisymmetric Statenand Their Application to Linear Response Analysis, J. Struct. Eng., AIJ, No. 466, Dec. 1994, pp. 79 - 85
3. Riks, E., Some Computational Aspects of the Stability Analysis of Nonlinear Structures, Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg., Vol.47, 1984, pp. 219 - 259.
4. Murtha-Smith, E. and Bean, J.E., Double Layer Grid Space Frame Buckling. Int. J. Space Structures, Vol.4, No. 3, 1989, pp. 117 - 127.

감사의 글

본 연구는 1996년도 초대형구조시스템연구센타(STRESS)의 연구비지원에 의하여 수행되었으며, 이에 감사를 드립니다.