조립판 구조물 해석을 위한 경계요소법의 적용

Application of the Boundary Element Method to Analysis of Assembled plate structures

권 택진* 서 일교** 이 동우*** 김 도훈****

Kwun, Taek-Jin Suh, Ill-Gyo Lee, Dong-Woo Kim, Do-Hun

ABSTRACT

The Boundary Element Method(BEM) has many advantages. Nevertheless the applicability of BEM to structural analysis is seemed to be behind the other methods. This study presents the application of the BEM for analysis of assembled plate structures which is light weight and has a great loading capacity.

Firstly, we formulate the boundary integral equation of the single plate, using the biharmonic fundamental solution for plate bending and internal force problems. Nextly, each plates are assembled on 3-dimensional space. In this process, the boundary conditions on assembled line are used. To verify the objectivity and universal validity of analysis by BEM, the results of BEM was compared to that of SAP90 by using FEM.

1. 서 론

1960년을 전후하여 컴퓨터의 발달을 계기로 수치해석법은 탄성문제뿐만 아니라, 복잡한 기하학적 형상과 하중 및 경계조건을 가진 구조물의 해석문제에 적용되어 상당히 발전하였다. 현재 구조 해석 분야에서 널리 알려져 있는 수치해석법으로는 유한요소법, 유한차분법, 경계요소법이 있다. 유한차분법은 모델링이 쉬운 반면 곡면 경계의 형상표현이 부정확하다는 단점을 가지는 해석법이고, 유한요소법은 구조해석분야 뿐만 아니라 공학 전반에 걸쳐서 가장 널리 사용되는 범용성이 뛰어난 수치해석법이다. 그리고, 경계요소법은 대상문제를 경계상에 있는 요소 절점의 미지량만으로 다루어 문제의 차원을 한 차원 낮게 해석하는 경계형 해석법으로 선형문제, 반무한·무한 공간문제, 유체-고체 및 지반-구조물의 상호작용문제 등에 있어서는 그 우수성이 입증되고 있다.

* 성균관대학교 건축공학과 교수
** 제주대학교 건축공학과 교수
*** (주)청구 기술연구소 팀장
**** (주)청구 기술연구소 연구원

그러나, 현재 경계요소법은 그 적용문제에 대한 연구실적이 적어서 유한요소법에 비해 범용성이 떨어지는 단점이 있다. 이러한 단점을 보완하기위해 다양한 문제와 분야로 적용 범위를 넓히기 위한 방법들이 계속 연구개발되고 있다. 본 연구는 이러한 적용법 개발의 한 분야로 많은 개발 가능성이 있는 조립판 구조물 해석을 수행한다. 조립판 구조물은 경량이면서도 적재능력이 커다는 이점을 가지는 구조물로서 그 적용범위는 넓다. 현재 조립판 구조물의 해석법으로 가장 많이 사용되는 것은 유한요소법이다. 이것은 접합부에서의 응력을 추가적으로 근사화하므로 해석의 정도가 떨어질 뿐만 아니라 해석의 정도를 높이기 위해 많은 요소분할을 해야하므로 막대한 데이터 처리의 문제와 대용량의 컴퓨터 메모리 요구의 문제가 있다. 그러므로 본 연구는 이러한 단점을 해결할 수 있도록 경계요소법을 적용하는 방법을 개발할 뿐만 아니라, 현재 실 구조물에 적용되고 있는 해석법의 보완 및 구조 해석결과의 타당성과 객관성을 검증하는 것이다.

2. 판의 경계적분방정식 정식화

본 연구에서 다루는 판은 키르히호프가정과 미소변형이론을 적용하고, 재료는 Hooke의 법칙을 따르는 것으로 가정한다. 먼저 면내력에 의한 평면탄성문제와 면외력에 의한 박판의 휨문제에 대해서 경계적분방정식을 유도한다.

2.1 평면 탄성 문제에 대한 경계 적분식

평면내에서 탄성체가 폐곡선 Γ 로 둘러쌓인 영역 Ω 를 갖는 정적 하중계에 대하여, 내부 응력 텐서 σ_{ij} 와 물체력 벡터 b_j 와의 평형 조건은 다음의 식으로 주어진다.

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \ , \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \tag{2.1}$$

영역의 경계조건은 전체 경계 Γ 를 변위 경계 Γ_u 와 표면력 경계 Γ_σ 로 분할하였을 때 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u_i &= \bar{u}_i \quad \text{on} \quad \Gamma_u \\ \sigma_i &\equiv \sigma_{ij} n_j = \bar{\sigma}_i \quad \text{on} \quad \Gamma_\sigma \end{aligned} \tag{2.2}$$

식(2.1)을 이용하여 영역 Ω 의 문제를 경계 Γ 만의 문제로 전환하면 다음의 경계적분방정식을 유도할 수 있다.

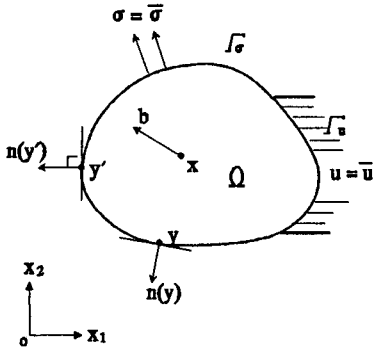


그림 1 평면 탄성체

$$c^i u_l^i + \int_\Gamma u_k p_{lk}^* d\Gamma = \int_\Gamma p_k u_{lk}^* d\Gamma + \int_\Omega b_k u_{lk}^* d\Omega \quad (l=1\sim2) \tag{2.3}$$

여기서, u_{lk}^*와 p_{lk}^*는 i점에서 x_l방향으로 작용하는 단위집중력에 의한 처짐과 표면력을 나타내는 것으로 Kelvin의 기본해로부터 구할 수 있다. 그리고, 계수 c^i는 i점의 형태에 따라 매끄러운 표면은 1/2이고 내부점에서는 1이다.

$$u_{lk}^{*} = \frac{1}{8\pi(1-\nu)G}\left\{(3-4\nu)\log\left(\frac{1}{r}\right)\Delta + r_{,l}r_{,k}\right\}$$

$$p_{lk}^{*} = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r}\left\{\frac{\partial r}{\partial n}\left[(1-2\nu)\Delta_{lk}+2r_{,k}r_{,l}\right]-(1-2\nu)\left(r_{,l}n_{k}-r_{,k}n_{l}\right)\right\} \qquad (2.4)$$

2.2 판의 휨 문제에 대한 경계적분식

판의 중립면의 처짐 w는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\nabla^{4}w = \frac{q}{D} \qquad \text{in } \Omega \qquad (2.5)$$

여기서, D는 $Eh^{3}/12(1-\nu^{2})$ 으로 판의 휨강성을 나타내고, q는 횡하중, ∇^{4}은 쌍조화 연산자이다. 판의 휨문제에 대한 적분방정식의 정식화는 쌍조화 미분연산자 ∇^{4}의 기본해 w^{*}를 가중함수로 한 가중잔차식에서 시작한다.

$$\int_{\Omega}\left(\nabla^{4}w-\frac{q}{D}\right)w^{*}d\,\Omega = 0 \qquad (2.6)$$

이 식을 4회 부분적분하면 다음의 식 유도할 수 있다.

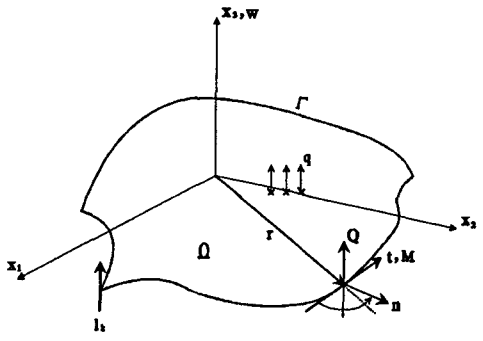


그림 2 판의 좌표계와 기호

$$\begin{aligned} &D\int_{\Gamma}(w\nabla^{4}w^{*}-w^{*}\nabla^{4}w)d\Omega-\int_{\Gamma}\frac{\partial}{\partial t}[w^{*}M_{nt}(w)-wM_{nt}(w^{*})]d\Gamma \\ &=\int_{\Gamma}\left[w^{*}V_{n}(w)-\frac{\partial w^{*}}{\partial n}M_{n}(w)+\frac{\partial w}{\partial n}M_{n}(w^{*})-wV_{n}(w^{*})\right]d\Gamma \end{aligned} \qquad (2.7)$$

여기서, V_{n}과 M_{n}은 경계 Γ상에서의 등가전단력과 휨모멘트를 의미하고, M_{nt}는 비틀림 모멘트를 나타낸다. 그리고 w^{*}는 판의 기본해로 다음과 같다.

$$w^{*}(x,x') = \frac{r^{2}}{8\pi D}\log r \qquad (2.8)$$

기본해 식(2.8)을 식(2.7)에 대입하고, 경계상의 임의의 점에서 극한 조작을 하면 다음의 경계적분방정식을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}w(y)+\int_{\Gamma}\left(V_{n}^{*}(y,y')w(y')-M_{n}^{*}(y,y')\theta(y')\right)d\Gamma(y') \\ &=\int_{\Gamma}\left(w^{*}(y,y')V_{n}(y')-\theta_{n}^{*}(y,y')M_{n}(y')\right)d\Gamma(y')+\int_{\Omega}w^{*}(y,x')q(x')\,d\Omega(x') \end{aligned} \qquad (2.9)$$

판의 휨문제는 경계조건으로부터 w, θ_{n}, M_{n}, V_{n}중에서 2가지 값이 규정되기 때문에 경계상의 임의의 점에서 미지수는 2개가 된다. 따라서 식과는 별도로 독립된 경계적분방정식을 필요로 한다. 이를위해 y점에서 단위법선벡터인 n_{y}방향으로 방향적분한 것을 이용하여 다음의 경계적분방정식을 유도한다.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\widetilde{w}_{1}(y)+\int_{\Gamma}\left(\widehat{V}_{n}^{*}(y,y')\hat{w}(y')-\widetilde{M}_{n}^{*}(y,y')\theta(y')\right)d\Gamma(y') \\ &=\int_{\Gamma}\left(\widetilde{w}^{*}(y,y')V_{n}(y')-\widehat{\theta}^{*}(y,y')M_{n}(y')\right)d\Gamma(y')+\int_{\Omega}\widetilde{w}^{*}(y,x)q(x)\,d\Omega(x) \end{aligned} \qquad (2.10)$$

3. 판 해석에 경계요소법 적용

경계요소법을 이용해서 하나의 판을 해석하기위해 먼저 평면탄성문제와 판의 휨문제에 대한 경계적분 방정식을 이산화(discretization)하여 근사적으로 푼다. 요소내에서 함수값이 일정하다고 가정하는 일정요소를 사용하여 이산화하면 경계요소상의 절점은 전부 평활점이 된다. 이 과정에서 소스점(source point)이 적분대상요소 Γ_j에 포함되지 않을때는 수치적분법을 사용하여 계산할 수 있으나, 포함되어 있는 경우는 그 요소에 대해 특이적분이 되므로 영향계수들을 해석적으로 계산하여야 한다.

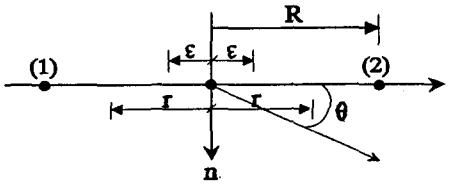


그림 3 경계요소에서의 특이적분

이렇게 구한 영향계수들을 중첩하여 판의 해석에 대한 연립 대수방정식을 구성하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & 0 & 0 \\ h_{21} & h_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_{11} & H_{12} \\ 0 & 0 & H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ w \\ \theta_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}/h & g_{12}/h & 0 & 0 \\ g_{21}/h & g_{22}/h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{11} & G_{12} \\ 0 & 0 & G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 h \\ P_2 h \\ V_n \\ M_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} \tag{3.1}$$

여기서, h_{ij}와 g_{ij}는 평면 탄성문제에서 얻어진 영향계수이고, H_{ij}와 G_{ij}는 판의 휨문제에서 구해지는 영향 계수이다. 이것을 하나의 대수방정식의 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\mathbf{H\ U = G\ P + b} \tag{3.2}$$

이제 식(3.2)를 주어진 경계조건을 고려하여 미지량을 좌변으로, 기지량을 우변으로 옮기면

$$\mathbf{A\ X = F} \tag{3.3}$$

의 단일판의 해석을 위한 연립1차방정식을 얻는다. 여기서 **X**는 미지절점벡터를 나타낸다.

4. 조립판 구조물의 해석

4.1 변수의 좌표 변환

복수의 박판을 접합한 조립판 구조물의 해석에 경계요소법을 적용하기위해서는 각 판의 국소좌표계에서 구한 연립1차방정식에서 경계변수인 변위 u_i(i=1-3), 표면력 p_i, 처짐각 θ_n, 휨모멘트 M_n를 전체좌표계로 좌표변환해서 조립판 구조물의 전체 방정식계를 형성한다.

먼저, 각 판의 국소좌표계에서의 판 경계상의 절점 변위 및 표면력 벡터를 $\mathbf{u}^n$, $\mathbf{p}^n$으로 하고 전체 좌표계로의 변환 성분을 오른쪽 아래 첨자에 o를 붙여 ${}_o\mathbf{u}^n$와 ${}_o\mathbf{p}^n$로 표시하고, 각 판의

국소좌표계와 구조물 전체 좌표계의 관계를 나타내면 다음과 같다.

$$\mathbf{u}^n = \mathbf{L}^n {}_o\mathbf{u}^n \tag{4.1}$$

$$\mathbf{p}^n = \mathbf{L}^n {}_o\mathbf{p}^n \tag{4.2}$$

여기서, 위첨자 n은 판번호를 나타내고, $\mathbf{L}^n$은 n번판의 법선방향여현이다.

$$\mathbf{L}^n = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 & 0 \\ l_2 & m_2 & n_2 & 0 \\ l_3 & m_3 & n_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}^n = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ w \\ \theta_n \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{p}^n = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ M_n \\ \theta_n \end{Bmatrix}$$

l_i, m_i, n_i (i=1-3) : 국소좌표계 x_1, x_2, x_3 축에 관한 법선 방향여현

다음으로, 좌표변환된 각각의 판에 대한 경계적분방정식을 이산화하여 전체 구조물로 중첩하여 일반화된 연립1차방정식의 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\mathbf{H}\ \mathbf{L}\ \mathbf{U} = \mathbf{G}\ \mathbf{L}\ \mathbf{P} \tag{4.3}$$

따라서 실제로 다루는 변수는 전체좌표계에서 본 변위 ${}_ou_i$와 표면력 ${}_op_i$ 및 국소좌표계에서 본 처짐각 θ_n과 휨모멘트 M_n으로 8개이다.

4.2 접합선상의 경계조건 적용

조립판 구조물의 경계조건으로는 일반적인 경계조건과 접합선상에서의 경계조건을 들수 있다. 일반적인 경계조건은 구조물의 외연(外緣)조건이라고도 하며, 지지 형태에 따라 적용되는 경계조건을 말한다. 접합선상에서의 경계조건은 판과 판이 접하는 접합선상의 임의의 점에서 적용되는 경계조건을 말한다.

조립판 구조물에서 접합선상의 임의의 점은 n개의 판에 속하게 되어 경계변수는 전체 8n개가 된다. 이 중에서 경계적분방정식에 의한 관계식이 4n개이므로 접합선에서의 경계조건을 적용하여 나머지 4n개의 관계식이 주어져야 한다.

1) 변위 적합 조건 : 접합선상의 점에서는 전체좌표계에서 본 각 판의 변위가 같게 된다.

$${}_0u_i^1 = {}_0u_i^2 = \cdots = {}_0u_i^n \quad (i=1\sim3) \tag{4.4}$$

2) 표면력 평형 조건 : 접합선상의 점에서의 표면력 ${}_op_i$의 합력은 그 점에 가해지는 외력${}_op_i^o$와 평형을 이룬다.

$${}_0p_i^1 + {}_0p_i^2 + \cdots + {}_0p_i^n = {}_0p_i^0 \quad (i=1\sim3) \tag{4.5}$$

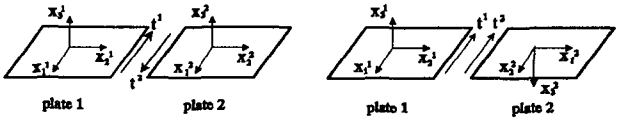
3) *처짐각 적합 조건 : 접합선에서 판과 판이 이루는 각은 변형후에도 변하지 않는다고 가정*하면 다음의 관계 만족한다.

$$\beta^1\theta_n^1 = \beta^2\theta_n^2 = \cdots = \beta^n\theta_n^n \tag{4.6}$$

4) 휨 모멘트에 관한 평형 조건

$$\beta^1 M_n^1 + \beta^2 M_n^2 + \cdots + \beta^n M_n^n = M_n^0 \qquad (4.7)$$

여기서, 처짐각과 모멘트의 조건에 나타나는 β^j(j=1, · · ·, n)는 기준으로한 판의 경계방향과 같은 경계방향이라면 +1, 반대방향이라면 -1로 한다. 그리고 휨모멘트 M_n^0는 기준면의 휨모멘트와 같은 방향일 때 양(+)으로 한다. 아래의 그림에서 판 1을 기준으로 하면 β 의 값은 다음과 같이 된다.



(a) 반대경계방향 (b) 같은 경계방향

$\beta^1 = 1,\ \beta^2 = -1$ (a)

$\beta^1 = 1,\ \beta^2 = 1$ (b)

그림 4 판요소 경계의 접선방향

5. 예제 해석 및 검증

이상의 과정을 통해 조립판 구조물해석에 경계요소법을 적용한 방법을 검증하기위해 예제 해석을 수행한다. 먼저 면내력과 면외력이 각각 작용하는 판의 해석을 수행하고, 여러 개의 판이 접합되는 조립판 구조물 모델을 설정하여 해석하였다. 그리고 경계요소는 일정요소를 이용하였으며 재료성질은 프와송비(ν)를 0.3, 종탄성계수(E)를 2.1×10^6 kg/cm^{2}로 하였다.

1) 예제해석 1 : 면내력과 면외력을 받는 판

자유단에 면내응력이 작용하는 경우와 면외 응력이 작용하는 경우에 대해 각각 해석을 수행한다. 판은 정방형판으로 판의 길이와 두께 비(l/h)는 100으로 설정하였다. 판에 대한 요소분할은 40개의 일정요소를 사용하였으며, 비교 검토위한 유한요소법은 100개의 사각형 쉘요소를 사용하여 모델링하였다.

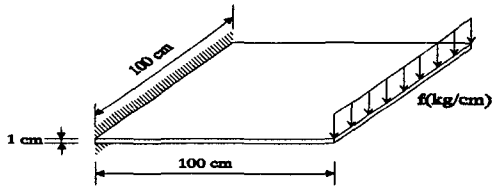


그림 5 면외력을 받는 판

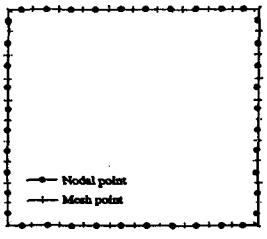
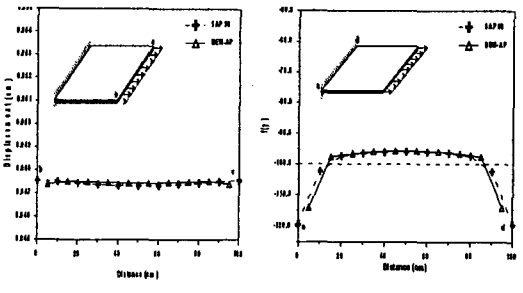


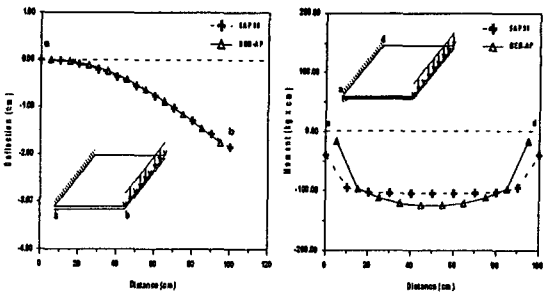
그림 6 판 경계의 요소분할

면내력을 받는 경우의 해석결과인 자유단에서의 변위와 표면력을 그림 7에 보여주며, 면외력이 작용하는 판의 처짐과 전단력을 그림 8에 나타내었다. 자유단에서의 변위와 전단력은 잘 일치하고 있지만, 표면력과 모멘트에서는 모서리 부분에서 편차를 보이는데 이것은 모서리점에서 절점을 두지않게되는 일정요소를 사용해서 모서리점의 응력을 고려않아 생기는 편차로 사료된다.



(1) 자유단의 변형　　(2) 고정단의 표면력

그림 7 면내력을 받는 판의 해석 결과

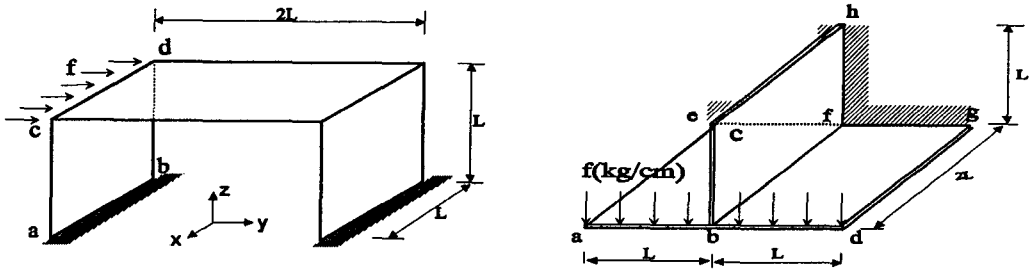


(1) a-b면에서의 처짐　　(2) 고정단의 모멘트

그림 8 면외력을 받는 판의 해석 결과

2) 예제해석 2 : 조립판 구조물

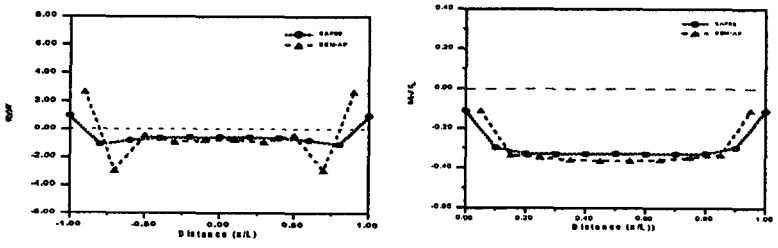
조립판 구조물의 해석모델로는 다음의 두 가지의 경우를 선택하였다. 각 구조물의 형상과 지지조건 및 하중형태는 그림 9와 같이 설정하였다.



(a) 모델 A　　(b) 모델 B

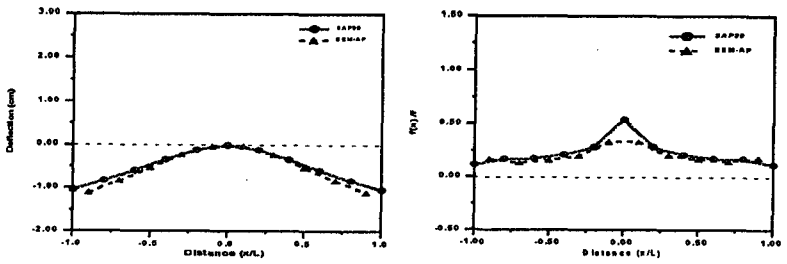
그림 9 조립판 구조물의 해석모델

그림 10 모델 A의 해석결과 ▷



(a) 고정단(a-b면) 전단력(fy)　　(b) 고정단(a-b면) 모멘트

그림 11 모델 B의 해석결과 ▷



(a) 자유단(a-b-c면)의 처짐　　(b) 고정단(e-g면) 표면력(fx)

위의 그림10 - 11은 두 예제모델의 해석결과를 보여주는 그래프이다. 모델A를 살펴보면 전단

력과 모멘트에서 유한요소법의 해석결과와 5% 이내의 편차를 가지고 일치하고 있으나, 전단력 분포에서 모서리점에서 급격한 차이를 보이고 있다. 모델B도 비슷한 결과를 보이고 있는데, 이것은 유한요소법의 접합부 응력 근사화와 본 연구의 일정요소의 사용에 기인하는 것으로 사료된다.

6. 결 론

본 연구는 조립판구조물의 해석을 위하여 수치해석법의 하나인 경계요소법을 적용하였다. 평면탄성문제와 판의 휨문제에 대한 경계적분방정식의 정식화를 통해 판의 해석을 수행하였고, 개개의 판을 3차원 공간에서 접합선상의 경계조건을 적용하여 조립판 구조물을 해석할 수 있는 프로그램을 개발하였다. 개발된 방법의 타당성과 객관성을 검증하기위하여 면내력과 면외력이 작용하는 단일판과 접합선상에 여러 개의 판이 접합된 조립판 구조물을 수치해석하여 그 결과를 유한요소법에 의한 SAP90의 결과와 비교하였다.

복잡한 이론의 정식화 과정을 거치는 경계요소법에 의해 조립판 구조물을 해석한 결과 적은 수의 일정요소를 사용하였음에도 많은 수의 요소로 모델링하여 해석한 유한요소법(SAP90)의 결과와 잘 일치하고 있었으며, 다만 모서리 부분에서 표면력과 모멘트의 값이 다소의 편차가 발생되었다. 이것은 모서리 부분의 응력을 고려할 수 있는 고차 요소가 아닌 일정요소를 사용하여 발생한 것으로 사료된다.

이상과 같이 본 연구는 경계요소법의 적용성을 넓히기위해 조립판 구조물의 해석에 적용하였고, 몇 가지의 예제를 수행하면서 그 적용성을 검증하였다. 그러나 본 연구는 앞으로 모서리점의 응력변화에 대한 영향을 고려할 수 있는 고차요소의 개발과 판 좌굴과 진동 문제를 적용해야하는 추후 연구 과제를 가진다.

참고 문헌

[1] 서일교, 권택진, "박판의 동적 휨문제에 대한 경계적분방정식 정식화", 대한건축학회 학술논문집, 제12권. 제1호, 1992, pp 303-308

[2] 최창근, 정기택, "경계요소법에 의한 얇은 평판의 휨 문제 해석," 대한건축학회학술발표논문집, 1990, 10.

[3] Brebbia, C.A., Tells, J.C.F., and Wrobel, L.C., "Boundary Element Technique," Spronger Verlag, Berlin, 1984.

[4] Stern, M., and Lin, T.L., "Thin Elastic Plates in Bending," Developments in Boundary Element Methods-4 1986, pp.91-119.

[5] D. E. Beskos "Boundary Element Analysis of Plates and shells", Springer-Verlag, pp1-34.

[6] Tanaka, M., "境界要素法たよる 組立板 構造物の 自由振動解析," 境界要素法研究會, 1986