

# 콘크리트 변형률국소화영역의 유한요소모델링

## Finite Element Modeling of Strain Localization Zone in Concrete

송하원\*                      나웅진\*\*  
Song, Ha-Won              Na, Ung-Jin

---

### ABSTRACT

The strain localization of concrete is a phenomenon such that the deformation of concrete is localized in finite region along with softening behavior. The objective of this paper is to develop a consistent algorithm for the finite element modeling of localized zone in the analysis of the strain-localization in concrete.

For modeling of the localized zone in concrete under strain localization, a general Drucker-Prager failure criterion which can consider nonlinear strain softening behavior of concrete after peak-stress is introduced. The return-mapping algorithm is used for the integration of the elasto-plastic rate equation and the consistent tangent modulus is derived.

Using finite element program implemented with the developed algorithms, strain localization behaviors for the different sizes of concrete specimen under compression are simulated.

---

### 1. 서론

변형률 국소화현상은 최대응력 이후 발생하는 연화거동에 수반되어 변형이 국부적으로 집중되는 현상을 의미하며 콘크리트와 같은 준취성재료에서 일반적으로 발견된다. 특히 콘크리트의 변형률 국소화현상은 재료의 강도 및 전체적인 파괴 거동을 지배하게 되므로 실험이나 해석을 통해 이를 규명하는 것은 매우 중요하다. 변형률 국소화현상이 발생한 콘크리트는 변형률이 집중되는 국소화영역과 그외의 영역인 비국소화영역으로 크게 구분할 수 있으며 국소화영역에서는 연화현상을 포함하는 탄소성거동을 하게 되며 비국소화영역은 손상제하거동을 수반하게 된다. 따라서 콘크리트의 변형률 국소화현상을 해석적으로 모델링하기 위해서는 국소화영역에서의 변형률 연화거동과 비국소화영역에서의 손상제하거동을 재현할 수 있는 일관된 알고리즘이 필요하며 이를 근거로 한 수치해석 프로그램들이 필요하다. 본 논문은 콘크리트에서 발생하는 변형률 국소화현상을 유한요소해석하기 위해서 국소화영역에서 발생하는 변형률 연화현상을 재현할 수 있는 일관된 탄소성 알고리즘을 개발하고, 개발된 알고리즘에 의한 유한요소해석을 통해 콘크리트 압축부재에 발생하는 변형률 국소화현상을 재현하는데 목적을 둔다. 이를 위해 변형이 국부적으로 집중되는 국소화영역의 모델링에는 비선형 연화현상을 포함하는 일반적인 Drucker-Prager 항복기준에 의한 소

---

\* 연세대학교 토목공학과 부교수

\*\* 연세대학교 대학원 토목공학과 석사

성해석 알고리즘을 적용하였다. 소성해석에서는 return-mapping 알고리즘을 사용하여 탄소성문제의 단계별 수치적분을 수행하였으며, 일관된 접선탄성계수를 도입함으로써 수치해석상의 수렴속도 및 반복계산의 효율을 꾀하였다. 또한 개발된 알고리즘에 의해 작성한 유한요소 프로그램을 통해 압축을 받는 콘크리트 부재의 국소화영역 크기에 따른 변형률 국소화현상을 재현하였다.

## 2. 변형률국소화현상

콘크리트의 압축파괴현상을 살펴보면 변형이 균일한 모드에서 불균일하게 이행하면서 파괴패턴이 형성되며, 하중이 최대가 되는 응력까지의 과정과 최대응력이후의 연화과정으로 나누어진다. 최대응력까지는 연속체이론을 적용한 균등한 변형률의 분포에 의한 해석으로 재료거동의 예측이 가능하다. 그러나, 극한응력이후에서는 변형률 국소화현상이 발생하여 국소화된 영역은 응력의 감소에도 불구하고 변형률이 증가하며, 그 외의 영역에서는 변형률이 감소하는 거동을 나타내며 크기효과도 나타난다<sup>1)</sup>.

그림 1은 콘크리트 시편의 압축에 의한 국소화 파괴와 시편 길이에 따른 응력-변형률관계를 보여준다. 콘크리트 시편은 국소화된 파괴와 더불어 최대응력이후의 연화(softening) 거동이 시편의 길이에 따라 다른 크기효과가 있음을 보여준다. 그림 2에 일축압축상태에서 변형률 국소화현상이 발생한 콘크리트시편을 이상화하여 도시하였다. 콘크리트 시편(그림2(a))의 A와 B부분에서 변위를 측정하여, 각각의 부분의 길이로부터 변형률을 계산할 수 있다. 시편의 B부분에서는 제하(unloading)거동이 일어났으며, 국소화된 영역 A에서는 변형률 국소화에 의한 연화현상이 발생하였다. 즉, 시편 A와 B 영역에서의 응력-변형률곡선은 그림 2(b)에서 보이는 것처럼 극한응력이전에서는 동일한 반면에, 극한응력이후에서는 뚜렷한 차이를 나타낸다. 그림 2(b)에서 C곡선은 시편의 평균화된 응력-변형률곡선을 보여준다.

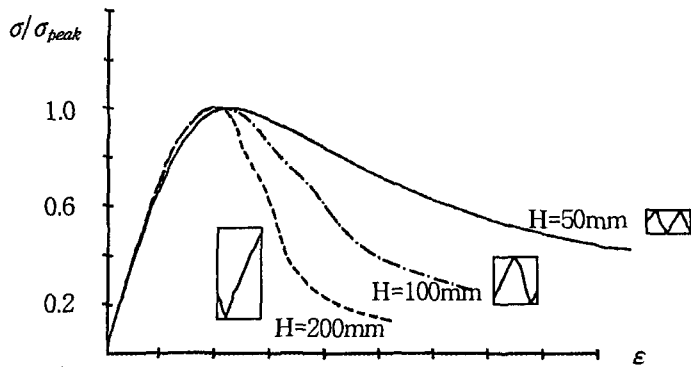
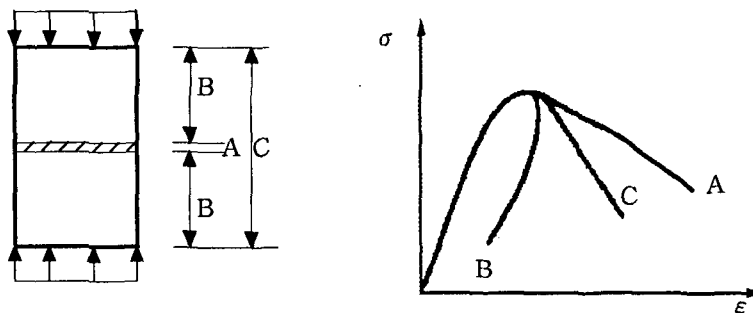


그림 1 시편길이에 따른 응력-변형률 곡선<sup>2)</sup>



(a) failure in uniaxial compression (b) stress-strain curve for different region

그림 2 변형률 국소화현상

### 3. 국소화영역의 모델링

변형을 국소화현상에 의해 콘크리트 시편에 발생하는 불균등한 거동을 모델링하기 위하여, 변형을 국소화현상에 의해 콘크리트 시편의 거동이 국소화영역과 비국소화영역의 2개 영역으로 크게 나누어지는 것으로 가정하였다. 콘크리트 시편 중앙의 국소화영역은 그림 2(b)에서 A의 응력-변형률관계, 즉 변형률의 집중에 의한 소성변형의 증가와 연화현상이 발생하고, 나머지 부분인 비국소화영역에서는 그림 2(b)의 B와 같이 손상제하거동이 발생하는 것으로 이상화하여 유효요소해석을 실시하였다.

#### 3.1 일반화된 Drucker-Prager 파괴기준

본 연구에서는 Drucker-Prager 파괴기준을 수정하여 콘크리트의 비선형 경화 및 연화를 고려할 수 있는 일반화된 비선형 파괴기준식을 도입하였다. 일반적인 Drucker-Prager 파괴기준은 다음과 같이 정수응력  $p$ , 유효소성변형률  $\bar{e}^p$ 의 연관된 식으로 쓸 수 있다.

$$f(s, p, \bar{e}^p) = \|s\| - \sqrt{\frac{2}{3}} k(p, \bar{e}^p) = 0 \quad (1)$$

여기서  $\|s\| = [s:s]^{1/2} = \sqrt{2}J_2 = R$ 이며 편차응력  $s$ 의 norm 이다.  $k(p, \bar{e}^p)$ 를  $p$ 와  $\bar{e}^p$ 의 함수로 분리하여 표현하면 다음 식과 같다.

$$\begin{aligned} k(p, \bar{e}^p) &= k(\bar{e}^p) - \sqrt{\frac{3}{2}} \alpha \cdot p \\ &= \sigma_0 + \bar{\sigma} \bar{e}^p + (\sigma_\infty - \sigma_0)[1 - e^{-\beta \bar{e}^p}] - \sqrt{\frac{3}{2}} \alpha \cdot p \end{aligned} \quad (2)$$

여기서,  $\sigma_0$ 는 초기항복응력,  $\bar{\sigma}$ 는 선형항복응력 계수,  $\sigma_\infty$ 는 최종항복응력,  $\beta$ 는 saturation 계수이다. 위의 수식에서  $\alpha=0$ 인 경우는 변형을 경화 및 연화를 고려할 수 있는 비선형 von Mises 파괴기준과 같게 된다. 식(2)의  $k(p, \bar{e}^p)$ 를 사용하여 콘크리트의 변형률국소화 영역의 변형을 경화와 연화현상을 고려한 소성해석에 적용하였다.

#### 3.2 Return-mapping 알고리즘

본 논문에서는 연관 흐름법칙이 적용되는 모델의 소성에 관한 기본이론에 return-mapping 알고리즘<sup>3)</sup>을 도입하였으며, 비선형 경화를 고려한다. 경화법칙을 표현하는 유효소성변형률은 아래 식과 같다.

$$\bar{e}^p = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3}} |d^p(\tau)| d\tau \quad (3)$$

또한 정수응력, 편차응력의 변화률로 표현되는 소성전개법칙은 각각 다음식과 같다.

$$\dot{p} = \frac{1}{3} tr \dot{\sigma} = K tr \dot{\epsilon} \quad (4a)$$

$$\dot{s} = 2G(\dot{\epsilon} - d^p) \quad (4b)$$

$$d^p = \gamma \frac{\partial f}{\partial s} = \gamma \hat{n} \quad (4c)$$

위식에서  $e$ 는 편차변형률이며,  $\hat{n} = s / \|s\|$ 로서 항복면에 수직인 단위벡터이다. 또  $K$ 와  $G$ 는 각각 bulk 계수와 전단계수를 의미한다.

위와 같이 정식화된 소성문제에서의 return-mapping 알고리즘은 탄성추정(elastic prediction)과 소성교정(plastic correction)의 2 단계로 표현할 수 있다. 즉

$$\mathbf{s}_{n+1}^T = \mathbf{s}_n + 2G\Delta \mathbf{e}_{n+1} \quad (5a)$$

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1}^T - \gamma \Delta t 2G \hat{\mathbf{n}} \quad (5b)$$

또한  $t_{n+1}$ 에서  $\bar{\mathbf{e}}_{n+1}^p$ 은 다음과 같다.

$$\bar{\mathbf{e}}_{n+1}^p = \bar{\mathbf{e}}_n^p + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \sqrt{\frac{2}{3}} |d^p(\tau)| d\tau = \bar{\mathbf{e}}_n^p + \sqrt{\frac{2}{3}} [\gamma \Delta t] \quad (6)$$

Return-mapping 알고리즘에 의한 계산순서를 요약하면 표 1과 같다.

표 1 Return-mapping 알고리즘

① 탄성시험응력의 계산
$\mathbf{s}_{n+1}^T = \mathbf{s}_n + 2G\Delta \mathbf{e}_{n+1}$
$p_{n+1}^T = p_n + Ktr\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$
② 단위벡터 $\hat{\mathbf{n}}$ 의 계산
$\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{s}_{n+1}^T / \ \mathbf{s}_{n+1}^T\ $
③ $[\gamma \Delta t]$ 를 사용한 $\bar{\mathbf{e}}_{n+1}^p$ 계산
$\bar{\mathbf{e}}_{n+1}^p = \bar{\mathbf{e}}_n^p + \sqrt{\frac{2}{3}} [\gamma \Delta t]$
④ 편차응력의 계산
$\mathbf{s}_{n+1} = [-\alpha p_{n+1} + \sqrt{\frac{2}{3}} k(\bar{\mathbf{e}}_{n+1}^p)] \hat{\mathbf{n}}$
⑤ 응력계산
$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1} + K(tr\Delta \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1}$

표 1의 return-mapping 알고리즘에서 ③의  $[\gamma \Delta t]$ 는 Newton-Raphson method를 사용하여 consistency 조건에 의한 scalar 식

$$g(\gamma \Delta t) = -\sqrt{\frac{2}{3}} k(\bar{\mathbf{e}}_{n+1}^p) + \|\mathbf{s}_{n+1}^T\| + \alpha p_{n+1} - 2G[\gamma \Delta t] = 0 \quad (7)$$

으로 부터 구할 수 있다.

### 3.3 일관된 접선탄성계수의 유도

일관된 접선탄성계수(consistent tangent modulus)는 return-mapping 알고리즘의  $k+1$ 번째 반복

계산에서 산정된 응력과 변형률의 관계로부터 유도되며, 반복계산의 빠른 수렴성(quadratic convergence)을 보장한다<sup>3,4)</sup>. 적용한 항복기준에 의한 구성방정식으로 부터 응력은 다음과 같이 표현된다.

$$\tilde{\sigma}(\sigma_n, \varepsilon_n, \bar{e}_n^p, \varepsilon - \varepsilon_n) = K(\text{tr} \Delta \varepsilon_{n+1}) \mathbf{1} + R_{n+1} \hat{\mathbf{n}} \quad (8)$$

여기서  $R_{n+1} = \sqrt{\frac{2}{3}} k(\bar{e}_{n+1}^p) - \alpha p_{n+1}$  이다. 여기서 응력을 변형률에 대해 미분함으로서 다음과 같은 일관된 접선탄성계수를 유도할 수 있다. 즉,

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{n+1} = & K \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2G \frac{R_{n+1}}{\|s_{n+1}^T\|} \left[ \mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right] - 2G \frac{R_{n+1}}{\|s_{n+1}^T\|} \hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}} \\ & + \hat{\mathbf{n}} \otimes \frac{\partial R_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} \end{aligned} \quad (9)$$

식(9)에 일반화된 Drucker-Prager의 파괴기준식(2)를 적용하면, 식(9)의  $\hat{\mathbf{n}} \otimes \frac{\partial R_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}}$ 은 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} \otimes \frac{\partial R_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} &= \hat{\mathbf{n}} \otimes \left( -\frac{\alpha \partial p_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} + \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\partial k}{\partial \bar{e}^p} \frac{\partial \bar{e}^p}{\partial \gamma \Delta t} \frac{\partial \gamma \Delta t}{\partial \varepsilon_{n+1}} \right) \\ &= \hat{\mathbf{n}} \otimes \left( -\alpha K \mathbf{1} + \frac{2}{3} k' \frac{\partial \gamma \Delta t}{\partial \varepsilon_{n+1}} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

Chain rule을 적용하여 (9)식을 전개하면, 일관된 접선탄성계수  $\mathbf{C}_{n+1}$ 은 다음과 같다.

$$\mathbf{C}_{n+1} = K \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2G\beta \left( \mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right) + \alpha K(\bar{r} - 1) \hat{\mathbf{n}} \otimes \mathbf{1} + 2G(\bar{r} - \beta) \hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}} \quad (11)$$

여기서  $\alpha, \beta, \bar{r}$ 는 다음식과 같다.

$$\alpha = \frac{6 \sin \phi}{3 - \sin \phi}, \quad \beta = \frac{-\alpha p + \sqrt{\frac{2}{3}} k}{\|s^T\|}, \quad \bar{r} = \frac{2}{3} \frac{k'}{2G + \frac{2}{3} k'} \quad (12)$$

### 3.4 알고리즘의 검증

국소화영역 모델링에 사용된 알고리즘을 검증하기 위해 1개의 4절점 isoparametric 유한요소를 사용하여 유한요소해석을 수행하였다. 응력이후의 변형률 연화현상을 나타내기 위해 변위를 제어하여 해석을 수행하였다. 그림 3은 Drucker-Prager 항복기준에서  $\alpha$ 의 변화(즉, 내부마찰각  $\phi$ 의 변화)에 따른 변위-응력의 관계를 보여준다. 여기서,  $\alpha=0$ (즉,  $\phi=0$ )인 경우는 von Mises 항복기준에 해당되며  $\alpha$  값에 따라 콘크리트의 소성거동을 다르게 재현할 수 있음을 알 수 있다.

표 2에는 본 연구에서 적용한 일관된 접선탄성계수의 수렴속도 향상 및 효율성을 입증하기 위해 연속체 접선탄성계수(continuum tangent modulus)를 사용한 계산결과와 비교하였다. 모형의 임의의 하중단계에 대해 위의 2가지 접선탄성계수에 의한 수치해석을 수행하여 각 반복계산 단계에서의 residual norm을 비교한 결과 표 2에서 처럼 일관된 접선탄성계수를 사용한 경우 훨씬 빠른 수렴성을 확인하였다.

표 2 접선탄성계수의 수렴성 비교

iteration number	norm of consistent tangent modulus	norm of continuum tangent modulus
1	0.549E-2	0.549E-2
2	0.364E-2	0.364E-2
3	0.575E-3	0.204E-2
4	0.250E-4	0.135E-2
5	0.644E-7	0.997E-3
6		0.777E-3
7		0.623E-3
8		0.506E-3
9		0.415E-3
10		0.343E-3
11		0.284E-3
12		0.235E-3
13		0.196E-3
14		0.163E-3
15		0.136E-3
16		0.114E-3
17		0.950E-4
18		0.796E-4
19		0.666E-4
20		0.558E-4

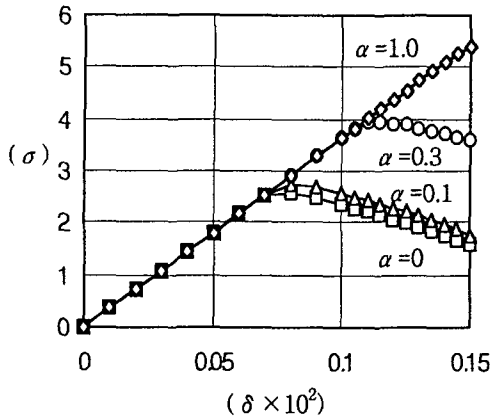


그림 3 국소화영역 요소의 응력-변위량 관계

#### 4. 국소화현상의 유한요소해석

본 절에서는 국소화영역의 요소와 비국소화영역의 요소를 적용하여 동일한 크기의 국소화영역에 대해 크기가 다른 콘크리트 시편의 수치해석을 수행하였다. 국소화영역의 크기는 일정하나 시편의 길이가 1 : 2 : 4로 변하는 콘크리트 부재에 대해 유한요소해석을 수행하였다. 변형을 국소화현상이 발생한 부재에 대해 3개의 요소를 사용하여 수치모형화 하였으며, 국소화영역과 비국소화영역을 구분하여 시편의 1/2에 대하여 그림 4와 같은 구속조건으로 모델링하였다. 국소화영역의 수치모형화를 위하여 일반화된 Drucker-Prager 식(2)에 사용한 계수는  $\alpha = 0.1$ ,  $\sigma_0 = 0.243$ ,  $\bar{\sigma} = -2$ ,  $\beta = 10$  이다.

유한요소해석을 통해 얻어진 결과는 그림 5과 6에 도시하였다. 국소화영역의 크기는 일정하다고 가정하고, 부재의 크기  $L$ 을 1 : 2 : 4로 변화시키면서 계산한 응력과 변형률관계는 그림 5에

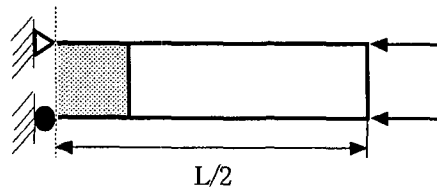


그림 4 변형을 국소화현상의 유한요소 모델링

서 각각 그래프 A, B, C이며, 응력과 총변위량의 관계 그래프를 그림 6에 도시하였다. 그림 5와 6에서 볼 수 있듯이, 해석프로그램은 변형률 국소화현상이 발생하는 부재의 거동에 부재의 치수에 따른 크기효과를 재현하고 있음을 알 수 있다. 즉, 그림 5의 응력-변형률관계 그래프를 통해 극한 응력이전의 거동은 부재의 치수에 관계없이 일정하나, 극한응력이후의 영역에서는 부재의 치수가 커질수록 실험에서 관찰한 것과 같이 응력-변형률관계의 그래프가 더 큰 경사를 이룸을 알 수 있다. 즉 부재의 크기가 커질수록 더 큰 연화현상이 발생함을 알 수 있다. 또한 그림 6을 보면 각각 부재의 치수에 따라 응력과 총변위량의 관계 그래프는 상이하나 최종적으로는 일정한 값을 향해 수렴함을 알 수 있다. 즉 부재의 최종적인 변위는 국소화영역의 크기에 의해 지배됨을 알 수 있다.

개발된 알고리즘에 의한 유한요소해석의 각 하중단계에 대해 국소화영역과 비국소화영역에서의 요소 응력과 변형률을 그림 7에 각각 도시하였다. 그림 7에서 극한응력이후 연화현상이 발생하는 국소화영역의 모델링이 정확하게 되었음을 알 수 있다. 비국소화영역에서의 손상제거거동 모델링과 개발된 알고리즘을 이용하여 국소화영역의 크기변화에 따른 영향을 분석하기 위해 국소화영역의 크기  $\Omega L$ 를  $0.1L : 0.2L : 0.4L$ 로 변화시키면서 동일한 크기의 시편에 대해 유한요소해석을 수행하여 국소화영역의 크기효과 또한 재현하였다<sup>5)</sup>.

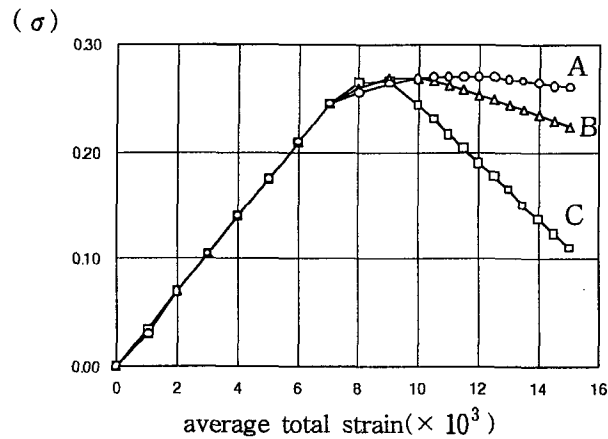


그림 5 유한요소해석에 의한 응력-변형률 그래프

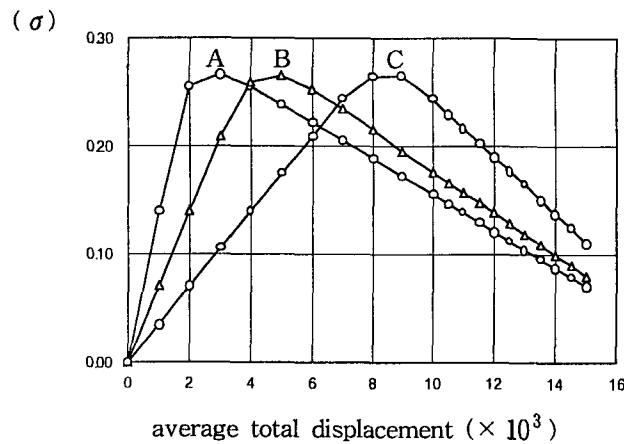


그림 6 유한요소해석에 의한 응력-총변위량 그래프

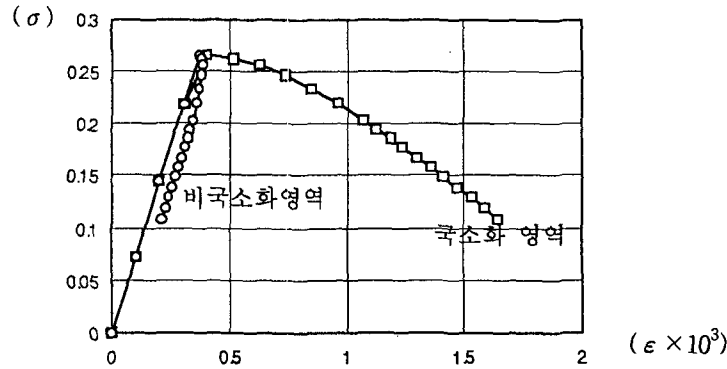


그림 7 국소화 및 비국소화영역의 응력-변형률 그래프

## 5. 결 론

콘크리트 변형을 국소화현상의 해석을 위해 국소화영역에서의 소성연화를 고려한 유한요소 모델링에 관한 연구를 통하여 얻어진 결론은 다음과 같다.

1. 콘크리트의 변형을 국소화해석에 필요한 국소화영역 유한요소 모델링을 위해 국소화영역의 연화거동을 나타낼 수 있는 일반적인 Drucker-Prager 모델을 도입하여 소성이론을 전개하였고 return-mapping 알고리즘에 의한 소성식의 적분을 수행하였다. 또한 수렴성이 우수한 일관된 접선탄성계수를 유도하여 향상된 수렴성을 갖는 유한요소 프로그램을 개발하였다.
2. 개발된 알고리즘에 의한 유한요소프로그램을 사용하여 변형을 국소화현상이 발생하는 콘크리트 압축부재에 대해 유한요소해석을 수행하였으며 본 논문의 모델링 기법이 부재의 크기효과를 포함하는 콘크리트의 변형을 국소화현상을 재현할 수 있음을 보였다.

## 6. 참고문헌

1. 송하원, 서철, "콘크리트의 변형을 국소화에 관한 연구", 콘크리트학회 논문집, Vol. 8, 1996, pp. 129~138.
2. van Mier, J. G. M., "Fracture of Concrete under Complex Stress", Heron, Heron Publication, Vol. 31, No. 3, 1986.
3. Simo, J. C. and Taylor, R. L., "Consistent Tangent Operators for Rate Independent Elastoplasticity", Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol. 48, 1985, pp. 101-108.
4. de Borst, R. and Groen, A. E., "A Note on the Calculation of Consistent Tangent Operators for von Mises and Drucker-Prager Plasticity", Comm. Num. Meth. Eng., Vol. 10, 1994, pp. 1021-1025.
5. 송하원, 김인순, 나웅진, "콘크리트의 변형을국소화 모델과 해석", 콘크리트학회 학술발표회 논문집, 1997, 인쇄중.