

Junger and Feit의 실린더운동방정식과 새로이 유도된 방정식에서
실린더좌표방향의 진폭항 비교 연구

The Study of The Comparision By The Displacement Term at
Cylindercoordination Between The Junger and Feit's Cylinder Motion Equation
and Newly produced Cylinder Motion Equation

조 형 국

(Jo Heung-Kuk)

동서대학교 전자기계공학부 정보통신전공

요 약

실린더 형태의 관은 산업체나 일반가정에서 자주 사용되어 진다. 이러한 실린더형태의 관들은 유체나 기체를 운반하는데 쓰이며, 운반과정에서 소음이 발생한다. 이러한 소음들의 해석은 우선 실린더운동방정식을 유도하여야 한다. 음향학 분야에서 여러 가지 다른 형태의 실린더운동방정식이 소개되었다. 예로써, Junger and Feit는 실린더의 벽이 매우 얇고, 무한히 긴 실린더를 가정하여 실린더운동방정식을 유도하였다.

본 논문에서는 참고문헌[5]에서 유도된 실린더운동방정식과 Junger and Feit의 실린더운동방정식에서 실린더 좌표 방향으로 향하는 변위의 항을 비교하고, 임의의 실린더 크기를 가정하여 항의 차이를 그래프로 보였다.

ABSTRACT

Cylindrical shells are usually used for transporting gas or fluid in the industries or houses. A Cylindrical shell equation turns out to be important in noise generating and noise controlling. The analysis of the noise need to the cylinder motion equation. Several different types of cylindrical shell equation has been introduced in the field of acoustics. As are example, Junger and Feit derived the cylindrical equation on assumption that the cylinder is thin and infinite long.

Two different sets of displacements in cylindrical coordinates, are produced in the Junger and Feit's equation and in the new cylindrical equation, respectively. These two sets of solutions will be compared in this paper. The difference in the two sets of solution will be show in the several graphs.

1. 서 론

실린더운동방정식은 실린더에서 일어나는 현상을 해석키 위해서 매우 중요하다. 이러한 실린더 운동방정식들은 Leissa[1]에 의해 소개되었다. 참고 문헌[1]에서 보여 준 실린더운동방정식들은 차이가 있으며, 그 차이는 실린더 형태의 가정에 의해 나타난다. 본 논문에서는 Junger and Feit의 실린더운동 방정식과 새로이 유도된 방정식을 실린더 좌표방향으로 향하는 변위항(u, v 그리고 w)로써 비교하고, 또한 임의의 실린더의 크기를 대입하여 그림으로 비교하였다. 이러한 두 실린더방

정식의 비교로 두 실린더 운동방식의 차이를 정확히 알수 있었다.

2. Matrix로 표현한 실린더운동 방정식

Junger nad Feit의 실린더 운동방정식은 그림(1)에서와 같이 실린더 벽 두께(h)가 매우 얇다고 가정하였기 때문에 두께의 개념을 없애고 단지 모든 방향의 변위를 실린더 벽 두께의 중간점에서 표현하였다. 이로 인해 그림 2에서 두께가 없는 실린더로 접근된 것을 보인다.

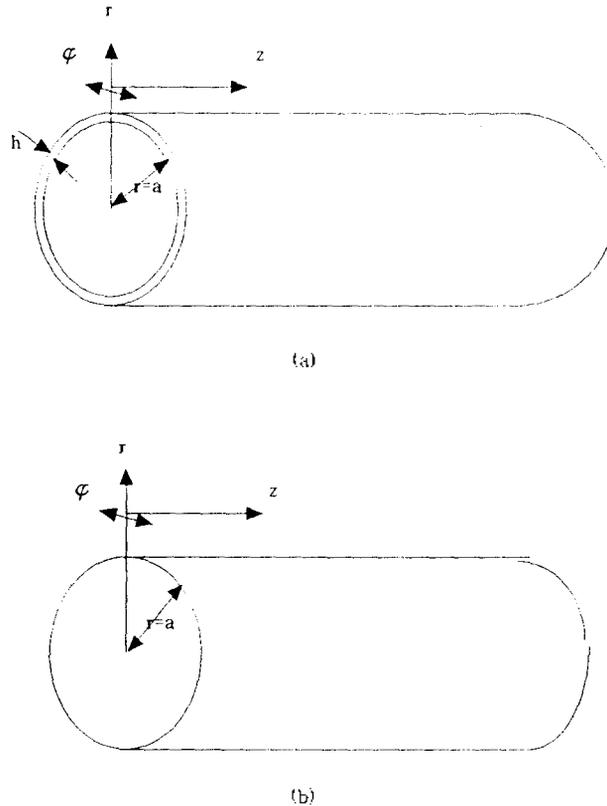


그림 1. 실린더 형태 (a) 실린더 운동방정식을 위한 실린더좌표 및 변위
(b)실린더 운동방식에 의한 접근된 실린더

Fig. 1 Cylindrical Model. (a) cylinder coordination and displacement

for the cylinder motion equation. (b) approximately cylinder by assumption of the Eq 1.

그림 1의 (a)에서 실린더 형태를 보인다. 여기서 r , φ 그리고 z 는 실린더 좌표이고, 이 각 방향의 변위는 w , v 그리고 u 이다. 이 실린더의 반경은 a 이고, 실린더의 벽의 두께는 h 이다. 그림 1의 (b)는 실린더의 두께가 매우 얇다는 가정으로 인해, 얇은 종이(두께가 없음)와 같이 간주된 실린더를 보인다. 이와 가정으로 유도된 Junger and Feit의 실린더운동방정식을 식(1)에 보이며, 식을 Matrix 형태로 보인다.

$$\begin{pmatrix} \left\{ k_z^2 a^2 + \frac{1-\mu}{2} n^2 - \nu^2 \right\} & \left\{ j \frac{1+\mu}{2} n k_z a \right\} & \{ j \mu k_z a \} \\ \left\{ -j \frac{1+\mu}{2} n k_z a \right\} & \left\{ \frac{1-\mu}{2} (1 + \beta^2 k_z^2 a^2 + (1 + \beta^2) n^2 - \nu^2) \right\} & \{ n + \beta^2 (n k_z^2 a^2 + n^3) \} \\ \{ -j \mu k_z a \} & \{ n + \beta^2 (n k_z^2 a^2 + n^3) \} & \{ (1 - \nu^2 + (n^2 + k_z^2 a^2)^2 \beta^2) \} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \\ W_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{(1-\mu^2)}{2} a^2 P_{an} \end{pmatrix} \quad (1)$$

식 (1)에 보인 Matrix에서 M_{11} (식 1의 첫항 상단 왼쪽항), M_{12} (식 1의 첫항 상단 중앙항) 그리고 M_{13} (식 1의 첫항 상단 오른쪽항)는 z방향으로 향하는 에너지를 표현하고, M_{21} (식 1의 첫항 중앙 왼쪽항), M_{22} (식 1의 첫항 중앙 중앙항) 그리고 M_{23} (식 1의 첫항 중앙 오른쪽항)는 φ 방향으로 향하는 에너지를 표현한 것이다. 또한 M_{31} (식 1의 첫항 하단 왼쪽항), M_{32} (식 1의 첫항 하단 중앙항) 그리고 M_{33} (식 1의 첫항 하단 오른쪽항)는 r방향으로 향하는 에너지를 표현하였다. 여기서 P_{an} 은 실린더에 가한 힘이다.

참고 문헌[5]에서 유도된 실린더 운동 방정식은 실린더 벽의 두께($r = h/2 \sim -h/2$)의 임의의 점에서 z방향과 φ 방향으로 변위에 대해서도 고려한 운동방정식이다. (그림 2 참조)



그림 2. 실린더 두께내의 임의의 점에서 변위

(a) φ 방향의 변위 (b) z방향의 변위

Fig. 2 The displacement an any point in cylinder wall.

(a) Displacement in direction φ (b) displacement in direction z

그림 2에서 보인 것은 실린더 두께내의 임의의 점에서 변위를 보이며, 그림 2의 (a)는 φ 방향으로 향하는 변위이다. 그림에서 V 는 $r=a$ 점에서 φ 방향으로 향하는 진폭이며, V_b 는 실린더두께 h 사이의 임의의 점에서 φ 방향으로 향하는 진폭이다. 그림 (b)는 z방향으로 향하는 변위이다. 여기서 U 는 $r=a$ 점에서 z방향으로 향하는 변위이며, U_b 는 실린더 두께 h 의 임의의 점에서 z방향으로 향하는 변위이다. 이러한 임의의 점에서 두 변위를 고려하여 유도된 실린더운동방정식을 식(2)에서 보이며[5], 이 유도된 실린더 운동방정식을 Matrix형식으로 표현하였다. 이 식 (2)의 의미도 식 (1)의 Matrix항과 같다. 물리적인 의미에서 두식의 차이는 다음과 같다. 그림 1의 (b)에서 실린더에 지지대를 부착시킨 시스템을 관찰한다면 지지대를 넘어서는 몸체파가 전달되지 못할 것이다. 그러나 그림 2에서는 실린더 두께를 고려하였기 때문에 실린더 외부에 지지대를 부착시킨 시

스텝도 물체과기 지지대를 통과하는 영향을 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix}
 \left\{ k_1^2 a^2 - \frac{1-\mu}{2} n^2 (1+\beta^2) - \nu^2 \right\} & \left\{ j \left(\frac{1+\mu}{2} a^2 - \beta^2 \frac{1-\mu}{2} n k_1 a \right) \right\} & j(\mu k_1 a - (1-\mu) \beta^2 n^2 k_1 a) \\
 -j \left\{ \left(\frac{1-\mu}{2} - \beta^2 \frac{1-\mu}{2} \right) k_1 a \right\} & \left\{ n + \frac{1-\mu}{2} (1+\beta^2) k_1^2 a^2 + (1+\beta^2) \nu^2 \right\} & \left\{ n + (1-\mu) \beta^2 n k_1^2 a^2 - \beta^2 n \nu^2 \right\} \\
 j(-\mu k_1 a + (1-\mu) \beta^2 n k_1 a) & \left\{ n + (1-\mu) \beta^2 n k_1^2 a^2 + \beta^2 n \nu^2 \right\} & M_{33}
 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
 U_n \\
 V_n \\
 W_n
 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 \frac{(1-\mu^2)a^2}{E h} P_{an}
 \end{bmatrix} \quad (2)$$

여기서 M_{33} 는 다음과 같다.

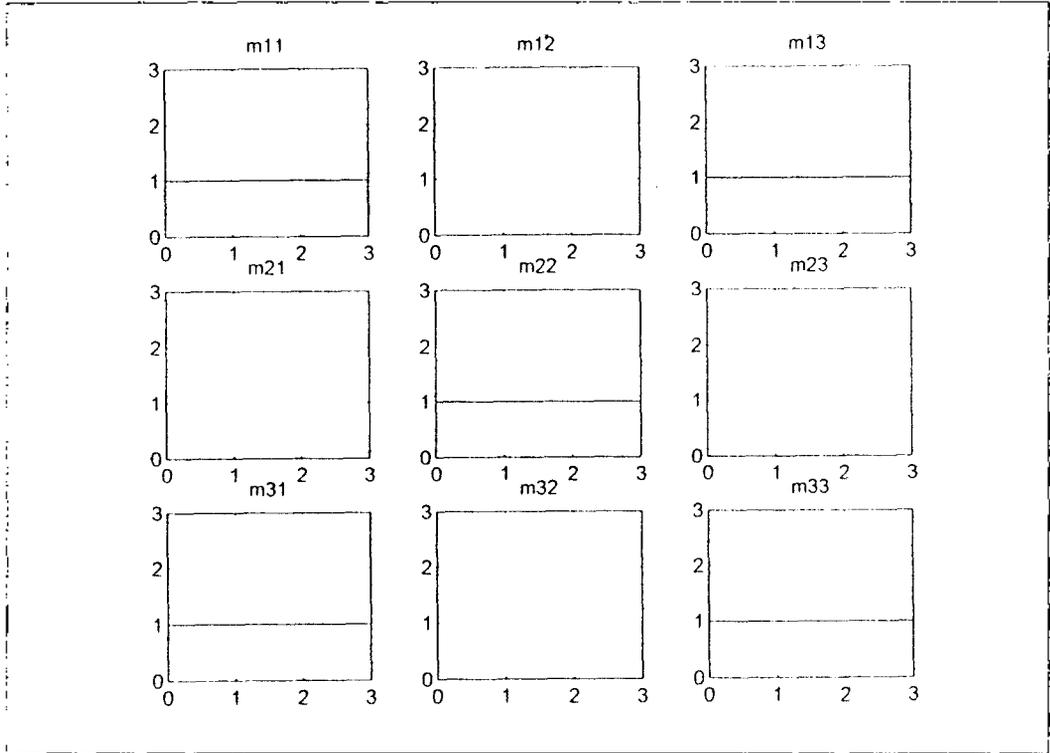
$$M_{33} = \{ (1+\beta^2) + \beta^2(n^4 + 2n^2 k_1^2 a^2 + k_1^4 a^4) - 2\beta^2 n^2 - 2\beta^2 \mu k_1^2 a^2 + (-1 - n^2 \beta^2) \nu^2 - \beta^2 \nu^2 k_1^2 a^2 \}$$

표 1은 식(1)과 (2)의 각 Matrix항을 보이고, 두식의 차이(식(1)에서 식(2)를 뺀 결과)을 보였다.

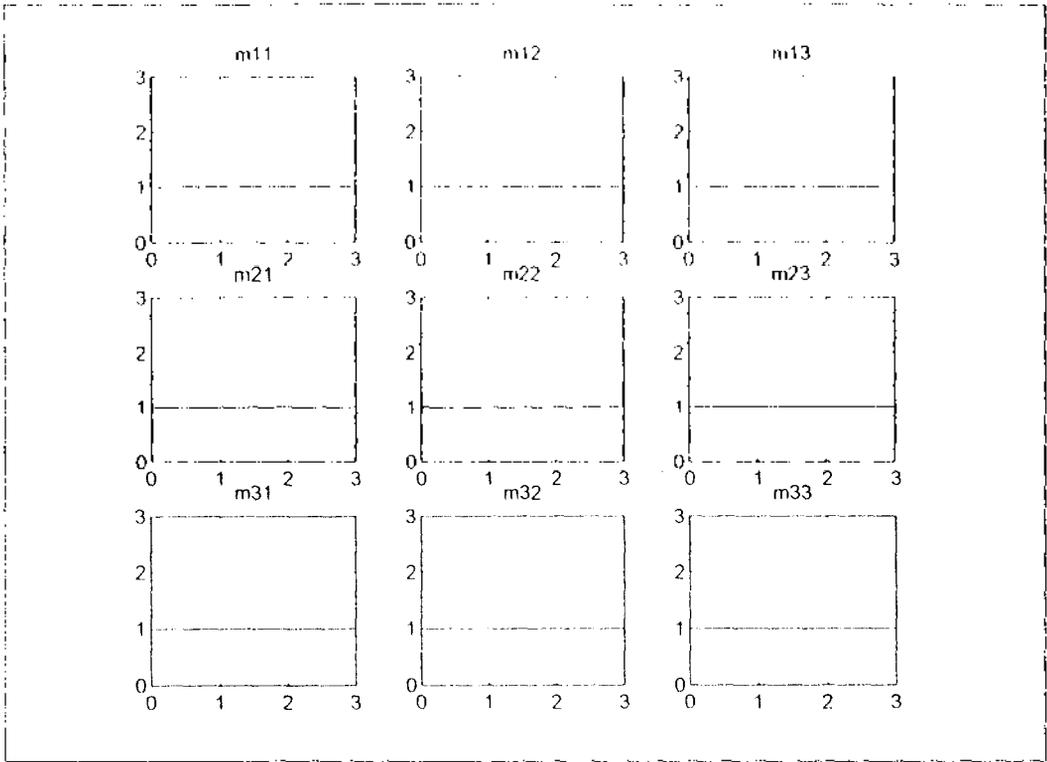
표 1. Junger and Feit식과 새로이 유도된 식의 비교

| Matrix 항 | 관계 식 | Matrix 항의 식 | 두식의 차이 |
|-----------------|------------------------|--|--|
| M ₁₁ | Junger and Feit 식 식(1) | $\left\{ k_1^2 a^2 + \frac{1-\mu}{2} n^2 - \nu^2 \right\}$ | $\frac{1-\mu}{2} n^2 \beta^2$ |
| | 새로이 유도한 식 식(2) | $\left\{ k_1^2 a^2 + \frac{1-\mu}{2} n^2 (1+\beta^2) - \nu^2 \right\}$ | |
| M ₁₂ | Junger and Feit 식 식(1) | $\left\{ j \frac{1+\mu}{2} n k_1 a \right\}$ | $\beta^2 n k_1 a$ |
| | 새로이 유도한 식 식(2) | $\left\{ j \left(\frac{1+\mu}{2} - \beta^2 \frac{1-\mu}{2} \right) n k_1 a \right\}$ | |
| M ₁₃ | Junger and Feit 식 식(1) | $\{ j \mu k_1 a \}$ | $j \beta^2 (1-\mu) n^2 k_1 a$ |
| | 새로이 유도한 식 식(2) | $\{ j(\mu k_1 a - (1-\mu) \beta^2 n^2 k_1 a) \}$ | |
| M ₂₁ | Junger and Feit 식 식(1) | $\left\{ -j \frac{1+\mu}{2} n k_1 a \right\}$ | $j \beta^2 \frac{1-\mu}{2} n k_1 a$ |
| | 새로이 유도한 식 식(2) | $\left\{ -j \left(\frac{1+\mu}{2} - \beta^2 \frac{1-\mu}{2} \right) k_1 a \right\}$ | |
| M ₂₂ | Junger and Feit 식 식(1) | $\left\{ \frac{1-\mu}{2} (1+\beta^2) k_1^2 a^2 + (1+\beta^2) n^2 a^2 - \nu^2 \right\}$ | $n^2 a^2 - n + \beta^2 (n^2 a^2 + \nu^2)$ |
| | 새로이 유도한 식 식(2) | $\left\{ n + \frac{1-\mu}{2} (1+\beta^2) k_1^2 a^2 - (1+\beta^2) \nu^2 \right\}$ | |
| M ₂₃ | Junger and Feit 식 식(1) | $\{ n + \beta^2 (n k_1^2 a^2 + n^2) \}$ | $n^2 + \beta^2 (1 + n k_1^2 a^2 - n \nu^2)$ |
| | 새로이 유도한 식 식(2) | $\{ n + (1-\mu) \beta^2 n k_1^2 a^2 - \beta^2 n \nu^2 \}$ | |
| M ₃₁ | Junger and Feit 식 식(1) | $\{ -j \mu k_1 a \}$ | $j \beta^2 (1-\mu) n^2 k_1 a$ |
| | 새로이 유도한 식 식(2) | $\{ j(-\mu k_1 a + (1-\mu) \beta^2 n^2 k_1 a) \}$ | |
| M ₃₂ | Junger and Feit 식 식(1) | $\{ n + \beta^2 (n k_1^2 a^2 + n^2) \}$ | $\beta^2 (n^2 + n k_1^2 a^2 - n \nu^2)$ |
| | 새로이 유도한 식 식(2) | $\{ n + (1-\mu) \beta^2 n k_1^2 a^2 - \beta^2 n \nu^2 \}$ | |
| M ₃₃ | Junger and Feit 식 식(1) | $\{ (1-\nu^2 + (n^2 + k_1^2 a^2)^2 \beta^2) \}$ | $\beta^2 \{ k_1^2 a^2 (2\mu + \nu^2) - n^2 (2 - \nu^2) \}$ |
| | 새로이 유도한 식 식(2) | M_{33} | |

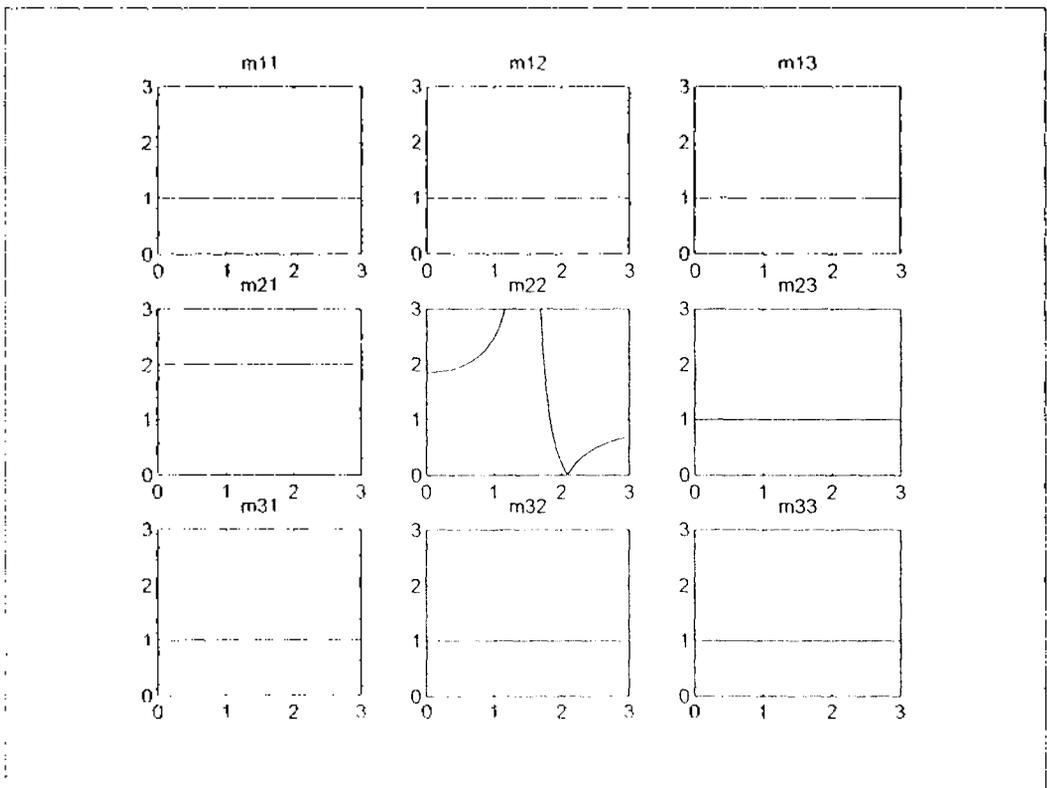
표 1에서 보인 것 처럼 두식의 차이는 대부분 β^2 항을 포함하고 있다. 이 β^2 항은 $h^2/12a^2$ 이며, 실린더의 두께가 실린더의 반지름보다 매우 얇을 때에는 무시할 수 있는 항이다. 이것을 다음과 같은 조건에서 계산결과를 그림 3에서 보인다. $k_2a=1$, $\nu=0.3$, $\beta^2=h^2/12a^2$, $r=1$, $h=0.1$ 이라고 가정하고, $n=0, 1$ 그리고 2일때의 값의 차이를 계산하여 그림 3, 4 그리고 5에 보였다.



(a)



(b)



(c)

그림 3. 모드 $n=0, 1$ 그리고 2일 때 식(1)과 식(2)의 차이

Fig. 3 The Difference between Eq.(1) and Eq.(2) by Mode $n=0, 1$ and 2

그림 3의 (a), (b) 그리고 (c)는 식 (1)에서 식 (2)를 각 항별로 나눈 값을 나타내었다. 수직축과 수평축은 각각 다음과 같다.

$$\text{수직축} = \frac{\text{Junger and Feil 식(식 (1))}}{\text{새로이 유도된 식(식 (2))}}, \quad \text{수평축} = \nu \left(= \frac{\omega}{c_L} \right)$$

그림 3의 (a)는 모드 $n=0$ 에서 두식의 차이를 나타내었다. 그림에서 M_{12} , M_{31} 그리고 M_{23} 을 제외하고는 주어진 조건에서 두 식이 같은 뜻이다. 이 때 M_{12} , M_{31} 그리고 M_{23} 은 이때 "0"이다. 표 1에서, 수식 계산의 결과는 β^2 항이 있지만 이 값이 약 8×10^{-3} 정도로 작은 값이기 때문에 두 식의 차이 항은 무시될 수 있다. 그림 3의 (b)는 모드 $n=1$ 일 때 두식의 차이를 나타내었으며, 그림에서 모든항은 "1"로 표현 되었다. 다시말하면, 두식의 차이는 없다는 의미이다. 그림 3의 (c)는 모드 $n=2$ 일때의 두식 차이를 나타내었으며, M_{21} 은 "2"이고, M_{22} 는 그림과 같은 차이를 나타낸다.

참 고 문 헌

- [1] A. N. Leissa, "Vibration of Shells", NASA, SP-288
- [2] M. C. Junger and Feit D., " Sound, Structures and Their Interaction", 2th edition, pp. 231-253.
- [3] M. Cremer, M. Heckl and E.E. Ungar, "Structure-Borne Sound", Springer Verlag Bertin 1988.
- [4] G. Pavic, "The Influence of Curvature on Structure-Borne Acoustical Power Propagation in a Cylindrical Shell", ICA, vol. 12, D6-6, TORONTO.
- [5] 조형국, 김정국, "z방향의 에너지 흐름을 위한 실린더 운동 방정식 유도", 한국음향학회 학술 논문 발표회 논문집, vol.12. No.1(s), 1993.
- [6] 조형국, 이채봉, 김정국, "실린더에서 점자극에 의한 어디미턴스와 자유파수", 한국음향학회지, vol. 14. No. 3, 1995