

$$\kappa^6 + \frac{L^2(2\gamma\varepsilon - \alpha\eta - \beta\tau)\omega^2}{\varepsilon^2 - \beta\eta} \kappa^4 + \frac{L^4\{\gamma^2\omega^4 + \alpha(\beta - \tau\omega^2)\}\omega^2}{\varepsilon^2 - \beta\eta} \kappa^2 + \frac{L^6\alpha^2\omega^4}{\varepsilon^2 - \beta\eta} = 0 \quad (11)$$

따라서, 임의의 주파수에 대한 파수는 식 (11)을 이용해서 구할 수 있다.

식 (10)의 가정된 해와 식 (11)의 해를 이용하면 모우드형상함수를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$U(x) = \sum_{i=1}^3 (B_i e^{\kappa_i x/L} + B_{2i} e^{-\kappa_i x/L}) \quad (12)$$

$$W(x) = \sum_{i=1}^3 (A_i e^{\kappa_i x/L} + A_{2i} e^{-\kappa_i x/L})$$

여기서, A_i 와 B_i 는 경계조건으로부터 구해지는 상수이다. 따라서, 식 (10)은 다음과 나타낼 수 있다.

$$u_a(x, t) = U(x) e^{i\omega t} \quad (13)$$

$$w(x, t) = W(x) e^{i\omega t}$$

식 (13)을 이용하여, 식 (5)~(6)의 일반해를 얻을 수 있다. 이때, A_i 와 B_i 의 관계는 다음과 같다.

$$B_i = (-1)^i \frac{(L^4\alpha\omega^2 + L^2\tau\omega^2\kappa_i^2 + \eta\kappa_i^4)}{L(L^2\gamma\omega^2 + \varepsilon\kappa_i^2)} A_i \quad (14)$$

여기서, i 는 1, 2, ... 6 이다.

Fig. 2 에 나타낸 자유물체도에 근거하여, 스펙트럴요소를 유도하기 위해 식 (7)~(9)와 식 (13), (14)를 이용하여 노드에서의 외력과 미지계수 A_i 의 관계를 다음과 같은 행렬식의 형태로 나타낼 수 있다.

$$\{\mathbf{F}\} = [\mathbf{K}] \cdot \{\mathbf{A}\} \quad (15)$$

같은 방법으로, 노드에서의 변위와 미지계수 A_i 의 관계를 다음과 같은 행렬식의 형태로 나타낼 수 있다.

$$\{\mathbf{Y}\} = [\mathbf{I}] \cdot \{\mathbf{A}\} \quad (16)$$

식 (15)와 (16)을 이용하여 미지계수 A_i 가 소거된

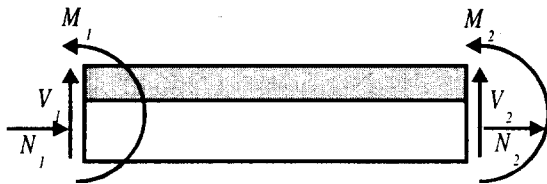


Fig. 2 Free Body Diagram

형태로 노드에서의 외력과 변위를 관계를 나타내는 스펙트럴요소를 유도할 수 있다.

$$\{\mathbf{F}\} = [\mathbf{D}] \{\mathbf{Y}\} \quad (17)$$

여기서, d_{ij} 는 일반적으로 간단한 보나 봉의 경우 이외에는 수식으로 표현하기가 어려우며, 수치적인 방법으로 처리한다.

4. 모달해석

모달해석^(16,17)을 수행하기 위해서는 고유진동수와 그에 해당하는 고유모우드를 알아야만 한다. 고유진동수는 식 (17)에 나타낸 스펙트럴요소를 이용하거나, 식 (13)와 (14)를 응용해서 계산할 수 있다. 그러나, 고유모우드는 모우드형상함수의 계수의 비로서 결정되기 때문에 적절한 정규화가 필요하다.

임의의 모우드에 대한 고유진동수를 ω_n 으로 가정하면, 식 (5)와 (6)은 식 (13)을 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$-\omega_n^2 \alpha U_n - \beta U_n'' + \omega_n^2 \gamma W_n' + \varepsilon W_n'' = 0$$

$$-\omega_n^2 \alpha W_n + \eta W_n'''' + \omega_n^2 (\tau W_n'' - \gamma U_n') - \varepsilon U_n'' = 0 \quad (18)$$

식 (18)은 식 (7)~(9)를 이용해서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\omega_n^2 (\alpha U_n - \gamma W_n') = -N_n' \quad (19)$$

$$\omega_n^2 (\alpha W_n + \gamma U_n') = M_n'' + \omega_n^2 \tau W_n'' \quad (20)$$

식 (19)와 (20)에 고유진동수 ω_n 과 다른 고유진동수 ω_m 에 대한 U_m 과 W_m 을 각각 곱하고, 부분적분을 하면 다음과 같다.

$$\omega_n^2 \int_0^L (\alpha U_n U_m - \gamma W_n' U_m) dx = - \int_0^L N_n' U_m dx \quad (21)$$

$$\omega_n^2 \int_0^L (\alpha W_n W_m + \gamma U_n' W_m) dx = \int_0^L M_n'' W_m dx + \omega_n^2 \int_0^L \tau W_n'' W_m dx \quad (22)$$

식 (21)과 (22)를 더하면 다음과 같다.

$$\omega_n^2 \int_0^L (\alpha U_n U_m + \alpha W_n W_m + \gamma U_n' W_m - \gamma W_n' U_m) dx = - \int_0^L N_n' U_m dx + \int_0^L M_n'' W_m dx + \omega_n^2 \int_0^L \tau W_n'' W_m dx \quad (23)$$

식 (23)에서 고유진동수 ω_n 과 ω_m 을 서로 교체해서 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \omega_m^2 \int_0^L (\alpha U_n U_m + \alpha W_n W_m + \gamma U_n' W_m - \gamma W_n' U_m) dx \\ &= - \int_0^L N_m' U_n dx + \int_0^L M_m' W_n dx + \omega_m^2 \int_0^L \tau W_m'' W_n dx \end{aligned} \quad (24)$$

식 (24)를 식 (23)에서 대해서 뺀 후, 경계조건을 이용하여 정리하면 다음과 같은 정규화된 모달함수(Modal Function)를 유도할 수 있다.

$$NM = \int_0^L \{ \alpha (U_n^2 + W_n^2) - 2\gamma U_n W_n' + \tau (W_n')^2 \} dx \quad (25)$$

식 (13)과 식 (25)를 이용하여 식 (5)와 (6)은 다음과 같은 모달식(Modal Equation)으로 나타낼 수 있다.

$$\ddot{T}_n(t) + \omega_n^2 T_n(t) = \frac{F_g}{NM} \quad (26)$$

여기서, $F_g = \int_0^L \{ N(x,t)U_n + M(x,t)W_n' + S(x,t)W_n \} dx$ 이다.

5. 수치예제

서로 다른 재질로 구성된 적층보는 축 방향과 굽힘 방향의 연성으로 인해 단일한 재질로 구성된 보와는 고유진동수나 고유모우드 등과 같은 동특성에서 상당히 다른 양상을 나타낸다. 이러한 차이점을 앞서 개발한 스펙트럴요소를 이용하여 확인하고, 모달해석을 통해서 스펙트럴요소해석을 결과를 검증하였다.

Fig. 3에 나타낸 외팔보는 아래 층의 강성, 밀도, 폭, 높이, 길이가 각각 120 MPa, 8900 Kg/m³, 0.012 m, 0.0025 m, 0.5 m 이고, 위 층의 강성, 밀도는 70 GPa, 2700 Kg/m³이며, 폭과 길이는 아래 층과 같다. Fig. 3.에서 보의 오른쪽 끝에 충격력이 가해졌을 때 적층된 보의 두께의 비에 따라 주파수응답함수(Frequency Response Function)를 구하면 Fig. 4~7과 같다. 이 때, 충격력은 0.1 초부터 0.006 초간 사

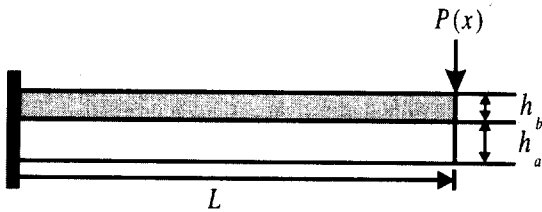


Fig. 3 Schematic of a Cantilever Beam

각과의 형태로 가진했다. Fig. 4,5에서 알 수 있듯이 축 방향의 주파수응답함수는 위 보의 두께가 얇아짐에 따라 응답의 크기가 작아지며, $r \rightarrow 0$ 따라 응답의 크기도 0으로 수렴한다. 이와 같은 현상은 외력이 굽힘 방향으로만 가해졌기 때문에, 연성효과가 감소함에 따라 축 방향의 운동이 굽힘방향의 운동과 분리되어지기 때문이다. 그러나, 굽힘 방향의 주파수응답함수는 Fig. 6,7에서 보인 바와 같이 순수한 보의 주파수응답함수로 수렴한다. 또한, Fig. 8,9에 비교된 바와 같이 모달해석에 의한 주파수응답함수보다 스펙트럴요소법의 것이 더 정확한 결과를 보여주고 있다. 이러한 결과는 모달해석이 모우드의 합으로 해를 나타내야 하기 때문에 발생한다. Fig. 10,11은 모달해석에 사용한 모우드의 수에 따른 수렴정도를 보여주고 있다. 모우드 수가 증가 함에 따라, 스펙트럴요소법의 결과값에 수렴함을 알 수 있다.

6. 결론

서로 다른 재질로 구성된 탄성 적층보에 대한 운동방정식을 유도하였다. 유도된 운동방정식에 대한 모달해석을 수행하고 스펙트럴요소를 개발하였다. 개발된 스펙트럴요소를 이용하여 동특성 해석을 수행하였고, 이 결과를 모달해석에 의한 동특성 해석 결과와 비교하여 운동방정식의 타당성과 스펙트럴요소의 정확성을 확인할 수 있었다.

참고문헌

1. Timoshenko, S., 1925, "Analysis of Bi-Metal Thermostats," *Journal of Optical Society of America*, Vol. 11, pp. 233-256.
2. Hess, M.S., 1969, "The End Problem for a Laminated Elastic Strip - I. The General Solution," *Journal of Composite Materials*, Vol. 3, pp. 262-280.
3. Hess, M.S., 1969, "The End Problem for a Laminated Elastic Strip - II. Differential Expansion Series," *Journal of Composite Materials*, Vol. 3, pp. 630-641.
4. Kerwin, E.D., Jr., 1959, "Damping of Flexural Waves by a Constrained Viscoelastic Layer," *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 31, No. 7, pp. 952-962.

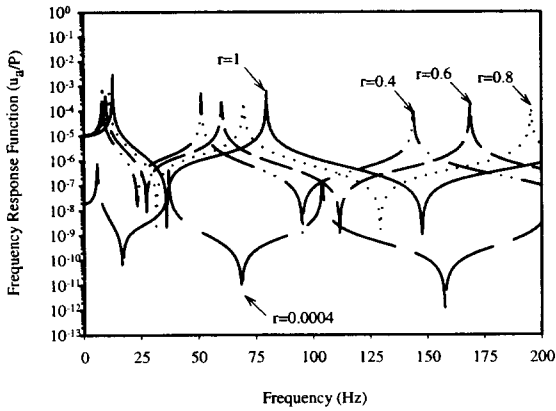


Fig. 4 Frequency Response Function of Axial Motion by Using Modal Analysis

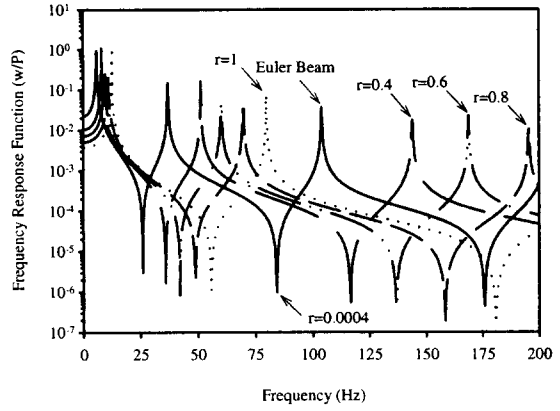


Fig. 7 Frequency Response Function of Bending Motion by Using Spectral Element Method

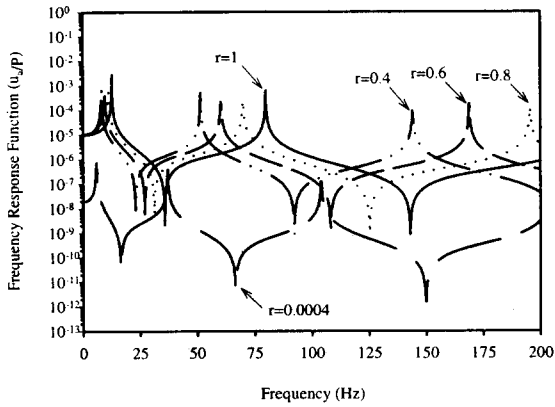


Fig. 5 Frequency Response Function of Axial Motion by Using Spectral Element Method

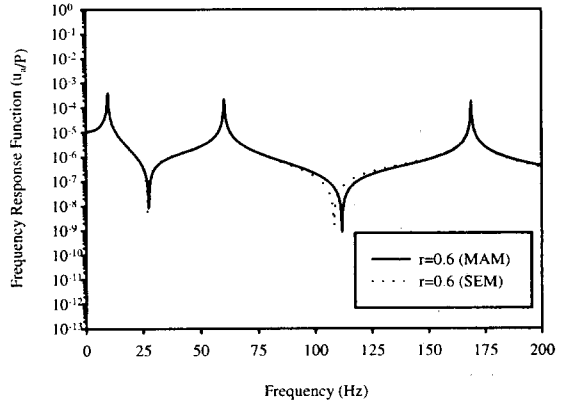


Fig. 8 Comparison of Modal Analysis and Spectral Element Method

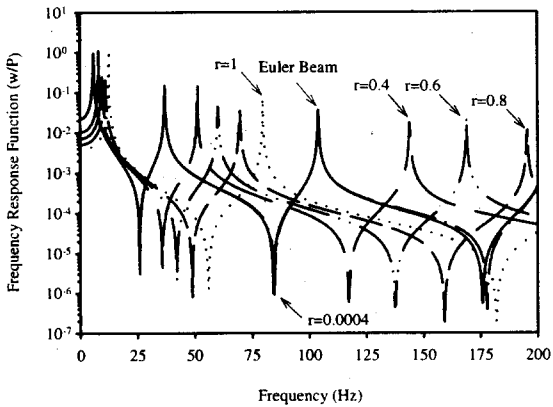


Fig. 6 Frequency Response Function of Bending Motion by Using Modal Analysis

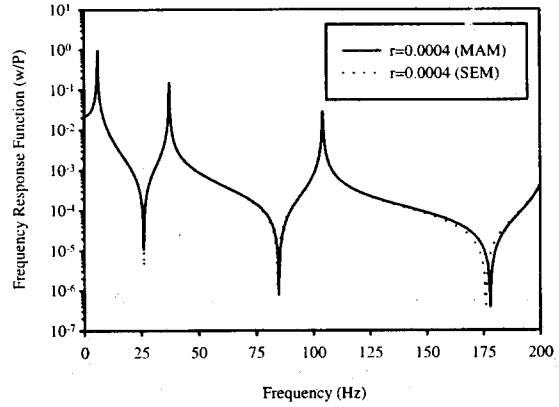


Fig. 9 Comparison of Modal Analysis and Spectral Element Method

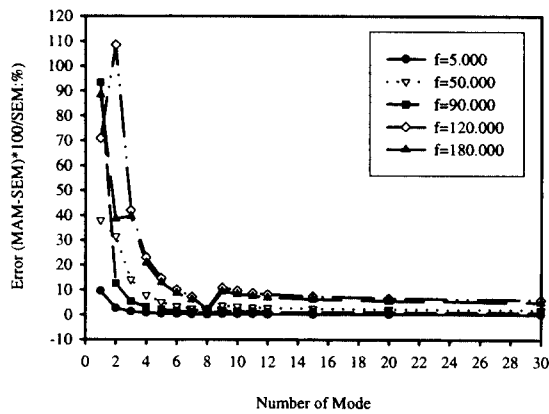


Fig. 10 Convergence Ratio for FRF of Axial Motion

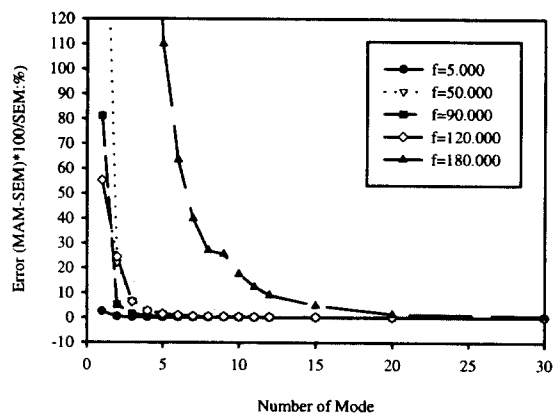


Fig. 11 Convergence Ratio for FRF of Bending Motion

5. DiTaranto, R.A., 1965, "Theory of Vibratory Bending for Elastic and Viscoelastic Layered Finite-Length Beams," *Journal of Applied Mechanics*, December, pp. 881-886.
6. Mead, D.J. and Marks, S., 1969, "The Forced Vibration of a Three-Layer, Damped Sandwich Beam with Arbitrary Boundary Conditions," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 10, No. 2, pp. 163-175.
7. Lu, Y.P. and Douglas, B.E., 1974, "On the Forced Vibrations of three-Layer Damped Sandwich Beams," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 32, No. 4, pp. 513-516.
8. Yan, M.J. and Dowell, E.H., 1972, "Governing Equations for Vibrating Constrained-Layer Damping Sandwich Plates and Beams," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 39, pp. 1041-1046.
9. Rao, Y.V.K.S. and Nakra, B.C., 1974, "Vibrations of Unsymmetrical Sandwich Beams and Plates with Viscoelastic Cores," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 34, No. 3, pp. 309-326.
10. Mead, D.J., 1982, "A Comparison of Some Equations for the Flexural Vibration of Damped Sandwich Beams," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 83, No. 3, pp. 363-377.
11. Bai, J.M. and Sun, C.T., 1993, "A Refined Theory of Flexural Vibration for Viscoelastic Damped Sandwich Beams," *Proceeding of Damping '93*, Vol. 3, pp. 319-329, San Francisco, CA.
12. Baz, A., 1993, "Active Constrained Layer Damping," *Proceeding of Damping '93*, Vol. 3, pp. 187-209, San Francisco, CA.
13. Nostrand, W.C.V. and Inman, D.J., 1994, "Finite Element Model for Active Constrained-Layer Damping," *Smart Structure and Materials 1994, Passive Damping*, pp. 126-137.
14. Rizzi, S.A. and Doyle, J.F., 1992, "A Spectral Element Approach to Wave Motion In Layered Solids," *Journal Vibration and Acoustics*, Vol. 114, pp. 569-577.
15. Banerjee, J.R., 1989, "Coupled Bending-Torsional Dynamic Stiffness Matrix for Beam Elements," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 28, pp. 1283-1298.
16. Dokumaci, E., 1987, "An Exact Solution for Coupled Bending and Torsion Vibrations of Uniform Beams Having Single Cross-Sectional Symmetry," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 119, No. 3, pp. 443-449.
17. Nayfeh, S.A. and Slocum, A.H., 1997, "Flexural Vibration of A Viscoelastic Sandwich Beam in Its Plane of Lamination," *Proceedings of DETC'97, 1997 ASME Design Engineering Technical Conferences*, September 14-17, 1997, Sacramento, California.

인터페이스 회로의 이득 최적화를 통한 분포형 모달 변환기의 설계

°김지철¹, 황준석², 유정규³, 김승조⁴

Design of Distributed Modal Transducer by Optimizing Gain-weights of Interface Circuit

Jichul Kim, Joon-Suk Hwang, Jung-Kyu Ryou, Seung Jo Kim

ABSTRACT

A modal transducer in two-dimensional structure can be implemented by varying the distributed transducer's gain spatially. In this paper, a method based on finite element method is developed for optimizing spatial gain distribution of PVDF transducer to create the modal transducer for specific modes. Using this concept, one can design the modal transducer in two-dimensional structure having arbitrary geometry and boundary conditions. As a practical means for implementing this continuous gain distribution without repoling the PVDF film, the gain distribution is approximated by optimizing gain-weights of interface circuit. The whole spatial area of the PVDF film is divided into several electrode segments and the signals from each segment are properly weighted and summed by interface circuit. This corresponds to the approximation of a continuous function using discrete values. The electrode partition is optimized using the genetic algorithm. Gain-weights are optimized using the simplex search method. A modal sensor for first to fourth modes of aluminum plate is designed using PVDF film with gain-weighted interface circuit. Various lamination angles of PVDF film are taken into consideration to utilize the anisotropy of the PVDF film. Performance of the optimized PVDF sensor is demonstrated by numerical simulations..

1. 서론

최근 들어 구조물의 진동 제어에 필요한 감지기 및 작동기로서 압전 재료는 그 효율성을 인정받고 있다. 이 중 얇고 유연한 형태의 압전 필름은 분포형 변환기에 실용적으로 활용 가능하다.

구조물의 진동제어 시 하드 웨어의 한계 및 모델링의 오차를 고려하여 특정한 몇 개의 모드만을 제어하게 되는데, 이 때 비제어 모드에 의한 스피얼 오버가 진동 제어 폐회로 시스템의 불안정을 유발시킬 수 있다[1]. 스피얼오버에 의한 역효과를 극복하기 위하여 공간 영역에서의 모달 감지기 개념이 도입되었다[2]. 모달 감지기를 사용하는 경우 제어 모드로부터의 신호만을 감지하게 되므로 관측 스피얼오버를 방지할 수 있다.

구조물의 진동을 감지하거나 구조물을 작동시

키는데 사용되는 변환기는 이산형과 분포형으로 나눌 수 있다. 이산형 변환기를 이용하여 모달 감지기를 구현하기 위해서는 많은 양의 신호 처리가 필요한데 이는 신호의 위상 지연을 수반하게 된다. 이러한 위상 지연은 제어 시스템의 강건성을 해치게 된다. 반면 분포형 변환기(Distributed Transducer)는 피측정 구조물에 대하여 알고 있는 구조 특성을 최대한 반영하여 공간 상에서 신호처리를 행한다는 측면에서 이산형 변환기에 비해 장점을 가지고 있다.

Lee[3]는 압전 필름을 이용한 분포형 변환기의 개념을 정립하고 구조물의 모드 형상간의 직교성을 이용하여 1차원 구조물에서 분포형 모달 감지기를 구현할 수 있음을 실증하였다. Burke와 Hubbard[4]는 압전 필름의 공간상 이득 분포가 평판 구조물의 진동제어에 미치는 영향을 고찰하였다. 이들 연구에서는 구조물의 동적 변형 형상의 엄밀해 또는 급수해가 필요하므로 대상 구조의 형상과 경계조건에 많은 제약을 받게 된다. Ryou, Park과 Kim[5]은 압전 필름의 전극 형상 및 적층 각을 최적화하여 2차원 구조물에서 모달 감지기를

- 1: 서울대학교 항공우주공학과 대학원
- 2: 서울대학교 항공우주공학과 대학원
- 3: 국방과학연구소
- 4: 정회원, 서울대학교 항공우주공학과

근사화하였다.

본 연구에서는 임의의 형상 및 경계 조건을 갖는 2차원 구조물에서의 모달 감지기 구현을 위해 요구되는 최적이득분포를 유한요소법을 이용하여 구하는 방법을 제시하였고, 계산된 최적이득분포를 실제 구조물에 적용하는 실용적인 방법으로서 압전 필름의 공간상 영역분할 및 각 영역에 대한 인터페이스 회로의 이득의 최적화를 통한 모달 감지기 설계를 수행하였다.

2. 구조물의 유한요소 모델

임의의 형상 및 경계 조건을 갖는 2차원 구조물에서 모달 감지기 구현을 위해 필요한 최적이득분포를 구하기 위해 유한요소법을 도입하였다. 주 구조물 및 압전 변환기로 구성된 2차원 평판 구조물을 4개의 절점을 갖는 사각형 Kirchhoff 평판 요소를 이용하여 모델링하였다. 각 절점 당 1개의 수직 변위와 2개의 회전각(w, θ_x, θ_y)을 자유도로 고려하였고, 압전 층의 이득분포는 각 요소마다 일정한 값($P^{(e)}$)을 갖도록 모델링하였다.

평판 요소 내에서의 변위는 식 (1)과 같이 각 절점에서의 자유도를 이용하여 보간된다.

$$w(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 f_i w_i + \sum_{i=1}^4 g_i \theta_{xi} + \sum_{i=1}^4 h_i \theta_{yi} \quad (1)$$

위 식에서 f_i, g_i, h_i 는 Hermite 보간함수이다. 평판 내에서의 일반화된 변위(generalized displacement)와 일반화된 변형률(generalized strain)은 각각 식 (2)와 식 (3)과 같이 보간된다.

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial w}{\partial x} & -\frac{\partial w}{\partial y} & w \end{bmatrix}^T = \mathbf{H}^{(e)} \mathbf{U} \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} & -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}^T = \mathbf{B}^{(e)} \mathbf{U} \quad (3)$$

여기서 위 첨자 e 는 해당 요소를 나타낸다. 위 식으로부터 시스템의 질량과 강성 행렬은 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{M} = \sum_e \int_{S^{(e)}} \mathbf{H}^{(e)T} \mathbf{I} \mathbf{H}^{(e)} dS^{(e)} \quad (4)$$

$$\mathbf{K} = \sum_e \int_{S^{(e)}} \mathbf{B}^{(e)T} \mathbf{D} \mathbf{B}^{(e)} dS^{(e)} \quad (5)$$

여기서 $\mathbf{I} = \text{diag}(I_2, I_2, I_0)$, \mathbf{D} 는 적층판의 굽힘 강성(bending rigidity)이다.

2차원 구조물의 표면에 위치한 압전 감지기에 유도되는 전하량 q 는 식 (6)과 같다.

$$q(t) = -z \int_S p(x, y) \left[\bar{e}_{31} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bar{e}_{32} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\bar{e}_{36} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] dS \quad (6)$$

여기서 \bar{e}_j 는 xy -좌표계에서의 압전 상수, S 는 유효 전극의 면적이고 $p(x, y)$ 는 압전 필름의 이득분포이

다. $w(x, y, t)$ 는 수직 방향 변위이고, z 는 중립면에서 압전 감지기의 중심면까지의 수직거리이다.

식 (6)은 다음과 같이 이산화된다.

$$\begin{aligned} q &= z \sum_e \int_{S^{(e)}} \left[-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \begin{bmatrix} \bar{e}_{31} \\ \bar{e}_{32} \\ \bar{e}_{36} \end{bmatrix} p(x, y) dS^{(e)} \\ &= \sum_e \mathbf{U}^{(e)T} \left[z \int_S \mathbf{B}^{(e)T} \mathbf{e} dS \right] \mathbf{P}^{(e)} \\ &\equiv \sum_e \mathbf{U}^{(e)T} \mathbf{Q}^{(e)} \mathbf{P}^{(e)} \equiv \mathbf{U}^T \mathbf{Q} \mathbf{P} \end{aligned} \quad (7)$$

위 식에서 $\mathbf{P} = [P^{(1)} P^{(2)} \dots P^{(n)}]$ 는 각 요소의 이득을 원소로 가지는 벡터이다. 모달 좌표계로의 변환을 통해 식 (7)은 다음과 같이 각각의 모드에 의해 유도되는 전하들의 합으로 표현된다. 자유도 벡터 \mathbf{U} 를 모달 좌표계로 변환함에 있어 진동 특성에 중요한 영향을 미치는 N 개의 저차 모드만을 고려하는 모드 축약 기법(modal reduction)을 사용하였다.

$$q(t) = \mathbf{U}^T \mathbf{Q} \mathbf{P} = \sum_{k=1}^N [\boldsymbol{\phi}_k^T \mathbf{Q} \mathbf{P}] \eta_k(t) \quad (8)$$

다음과 같이 k 번째 모드에 의해 유도되는 전하 q_k 를 정의하자.

$$q_k = \boldsymbol{\phi}_k^T \mathbf{Q} \mathbf{P} \quad (9)$$

식 (8)은 다음과 같이 행렬의 형태로 나타낼 수 있다.

$$q(t) = \sum_{k=1}^N q_k \eta_k(t) = \mathbf{B}_S^T \boldsymbol{\eta}_R \quad (10)$$

여기서 $\mathbf{B}_S = [q_1, \dots, q_N]^T$, $\boldsymbol{\eta}_R = [\eta_1, \dots, \eta_N]$ 은 모달 좌표이고 아래 첨자 \mathbf{R} 은 모드 축약을, 아래 첨자 \mathbf{S} 는 감지기를 의미한다.

압전 감지기와 작동기 사이에는 reciprocity가 성립하여[3], 특정 감지기에서 k 번째 모드에 의해 발생하는 전하량이 q_k 라면 이 감지기를 작동기로 사용하였을 때 k 번째 모드에 대한 단위 전압당 작동력도 q_k 이다. 따라서 모달 좌표계에서 구조물의 운동 방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\ddot{\boldsymbol{\eta}}_R + \mathbf{c}_R \dot{\boldsymbol{\eta}}_R + \boldsymbol{\Lambda}_R \boldsymbol{\eta}_R = \mathbf{B}_S \mathbf{V}_a \quad (11)$$

위 식에서 $\mathbf{c}_R = \text{diag}(2\zeta_1 \omega_1, \dots, 2\zeta_N \omega_N)$ 이고, $\boldsymbol{\Lambda}_R = \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_N^2)$ 이다. $\mathbf{B}_S = [q_1, \dots, q_N]^T$ 는 식 (9) 및 압전 필름의 reciprocity에 의해 정의되는 단위 전압 당 모달 작동력 벡터이고, \mathbf{V}_a 는 압전 작동기에 가해지는 전압 신호이다.

3. 최적 이득 분포

모드 축약시 고려하는 N 개의 모드 중 j 번째 모드로부터의 신호만을 감지하는 모달 감지기로 작동하기 위해 요구되는 최적이득분포 \mathbf{P} 를 구하는 문제는 다음과 같은 구속된 최적화 문제로 표현된다.