

원통형 쉘의 고주파동적특성을 고려한 등가평판 모델링

이준근^o(LG기계) · 이우식(인하대) · 박철휘(인하대)

An Equivalent Plate Model for The High-Frequency Dynamic Characteristics of Cylindrical Shells

Joonkeun Lee^o, Usik Lee and Chol-Hui Pak

ABSTRACT

For cylindrical shells, the closed-form solutions are limited only to the cases with special boundary and/or loading conditions. Though the finite element method is certainly a powerful solution approach for the general structural dynamics problems, it is known to provide reliable solutions only in the low frequency region due to the inherent high sensitivities of structural and numerical modeling errors. Instead, the spectral element method has been proved to provide extremely accurate dynamic responses even in the high frequency region. Since the wave characteristics of a cylindrical shell becomes identical to that of a flat plate as the frequency increases, an equivalent plate model (EPM) representing the high-frequency dynamic characteristics of a cylindrical shell is introduced herein. The EPM-based spectral element analysis solutions are compared with the known analytical solutions for the corresponding cylindrical shell to confirm the validity of the present modeling approach.

1. 서론

일반적으로 고주파수영역에서는 유한요소법을 이용하여 신뢰성 있는 구조물의 동적해석을 수행하기가 매우 어렵다. 이는 고주파수영역에서 과도한 유한요소분할이 불가피하고 이에 따른 컴퓨터 용량과 전산시간이 급격히 증가하기 때문이다[1]. 이에 비해 스펙트럴요소법은 주파수범위에 관계없이 효율적으로 거의 엄밀한 이론해를 제공할 수 있는 방법이므로 특히 고주파수대역의 구조해석에 특히 유리하다고 할 수 있다. 스펙트럴요소법과 관련된 지금까지의 연구는 대부분 1차원 구조물에

한정되어 적용되어왔고 Lee 등[2]에 의해 2차원 평판으로 그 해석범위가 확대되어가고 있는 상황이다.

그러나 지금까지의 스펙트럴요소해석 이론으로는 쉘구조물에 대한 동적해석은 불가능하다고 판단된다. 이것은 쉘구조물에서는 인장, 굽힘, 비틀림운동 등이 서로 연계되어 지배방정식 자체가 매우 복잡한 형태를 갖게 되어 일반적으로 이론해석의 수행이 매우 어렵기 때문이다. 따라서 다양한 경계조건과 하중을 받는 쉘구조물의 동적해석을 위해서는 유한요소법을 이용한 방법이 현재까지는 최선의 방법일 것으로 판단된다. 그러나 고주파수범위에서의 신뢰성 있는 진동

해석결과를 얻기 위해서는 새로운 방법이 강구되어야 할 것으로 생각된다. 따라서 본 연구에서는 원통형 쉘의 고주파수영역에서의 파동분산관계[3] 및 동적 거동을 효율적으로 반영할 수 있는 등가적인 평판 모델을 개발하고 본 연구자들이 개발한 2차원 평판구조물에 대한 스펙트럴요소해석기법을 접목시킴으로서 고주파수영역에 대한 원통형 쉘의 엄밀한 진동해석을 수행하고자 한다. 아울러 이론해가 존재하는 경우에 대한 원통형 쉘의 동적응답을 스펙트럴요소법을 이용한 등가평판의 해석결과와 비교함으로써 본 연구에서 개발한 등가평판모델의 개념의 이론적 타당성을 검증하도록 한다.

2. 원통형 쉘 이론

곡면을 이루는 판재형상의 탄성체로서 그 두께가 곡률반경, 가로 또는 세로 등 다른 치수에 비하여 매우 작은 구조물을 쉘이라고 한다. 서론에서 언급했듯이 쉘에서는 여러가지 운동이 서로 연계되기 때문에 그 해석이 상대적으로 어렵다. 쉘이론에는 Love, Flügge, Donnell-Mushtari, Sanders의 이론[4-7] 등이 있다. 쉘이론이 이처럼 다양한 것은 쉘의 변형에 미치는 작은 영향들에 대한 서로 다른 다양한 가정과 표현의 차이점에서 비롯된다. 이러한 쉘이론 중에서 특히 Donnell등[6]이 제안한 쉘이론이 비교적 널리 사용되고 있는데 이것은 다른 쉘이론들에 비해 비교적 간단하면서도 신뢰성이 있다고 알려져 있기 때문이다. Fig. 1과 같은 원통형 쉘 요소에 대해 Donnell 등이 제시한 운동방정식은 다음과 같다.

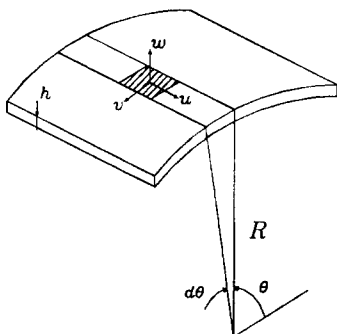


Fig. 1 Cylindrical shell element

$$\begin{aligned}
 & R^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2}(1-\nu) \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{R}{2}(1+\nu) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \phi} \\
 & - \nu R \frac{\partial w}{\partial x} = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\
 & \frac{R}{2}(1+\nu) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \phi} + R^2(1-\nu) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} \\
 & - \frac{\partial w}{\partial x} = m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\
 & \nu R \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \phi} - w - k \left(R^4 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2R^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \phi^2} \right. \\
 & \left. + \frac{\partial^4 w}{\partial \phi^4} \right) = m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}
 \end{aligned} \tag{1}$$

여기서,

$$m = \frac{\rho}{E}(1-\nu^2)R^2, \quad k = \frac{1}{12} \left(\frac{h}{R} \right)^2$$

원통형 쉘이 가질 수 있는 경계조건들 중에서 이론해가 존재하는 경우의 하나로서, 쉘의 축방향 끝단 ($x=0, L$) 이 단순지지된 경우에 대한 경계조건은 다음과 같이 주어진다[8].

$$N_x = M_x = v = w = 0 \tag{2}$$

식(1)에 대한 해를 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 u &= C_1 \cos \lambda x \cos n\phi \cos \omega t \\
 v &= C_2 \sin \lambda x \sin n\phi \cos \omega t \\
 w &= C_3 \sin \lambda x \cos n\phi \cos \omega t
 \end{aligned} \tag{3}$$

식(3)을 식(1)에 대입하고 식(2)의 경계조건을 적용하면 다음과 같은 행렬식을 구성할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \widehat{Q}^2 - H_1 & n \frac{\lambda}{2} (1+\nu) & -\nu \lambda \\ n \frac{\lambda}{2} (1+\nu) & \widehat{Q}^2 - H_2 & n \\ -\nu \lambda & n & \widehat{Q}^2 - H_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

여기서,

$$\lambda = \lambda^* R = \frac{m\pi R}{L}, \quad \tilde{\Omega}^2 = \frac{\rho}{E} (1 - \nu^2) R^2 \omega^2,$$

$$k = \frac{1}{12} \left(\frac{h}{R} \right)^2, \quad H_1 = \lambda^2 + \frac{n^2}{2} (1 - \nu),$$

$$H_2 = \frac{\lambda^2}{2} (1 - \nu) + n^2, \quad H_3 = 1 + k(\lambda^2 + n^2)^2$$

식(4)의 행렬식으로부터 특성방정식을 구할 수 있으며, 이로부터 축방향으로 단순지지된 원통형셸의 각 방향 u, v, w 에 대한 고유진동수를 계산할 수 있다. 본 연구에서 다루는 셸은 직경의 변화가 없는 원통형셸이므로 축방향 변위와 반경방향의 변위가 비연계(decoupled)되어 있고 고차모드로 갈수록 판막운동(membrane deformation)은 거의 무시할 수 있으므로 셸의 횡방향의 운동 w 에 대해서 주로 다루도록 한다. 식(4)에서 계산된 원통형셸의 고유진동수와 모우드형상의 중첩을 이용하면 조화가진력을 받는 원통형셸의 횡방향운동에 대한 이론해를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$w(x, \theta, t) = \frac{2P}{\rho h R L \pi} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(m\pi x^*/L) \sin(m\pi x/L) \cos n(\theta - \theta^*) \sin(\omega t - \phi_{mn})}{\epsilon_n \omega_{mn}^2 \sqrt{[1 - (\omega/\omega_{mn})^2]^2 + 4\zeta_{mn}^2 (\omega/\omega_{mn})^2}} \quad (5)$$

여기서

$$\epsilon_n = \begin{cases} 1 & n \neq 0 \\ 2 & n = 0 \end{cases}$$

$$\phi_{mn} = \arctan \frac{2\zeta_{mn}(\omega/\omega_{mn})}{1 - (\omega/\omega_{mn})^2}$$

$$\zeta_{mn} = \frac{c}{2\rho h \omega_{mn}}$$

이며, c 는 모달 감쇠계수, x^* 는 가진력이 가해지는 셸의 x -축상의 위치, θ^* 는 가진력이 가해지는 원주방향의 위치 그리고, ω 는 가진주파수를 의미한다.

3. 등가평판 이론

원통형셸 구조물의 특성을 표현하는데 가장 중요한 두가지 변수로는 링주파수[3] ω_r 에 대한 무

차원주파수 $\tilde{\Omega} = \omega a/c_l = \omega/\omega_r$ 과 반경 a 로 무차원화한 두께 $\beta = h/\sqrt{12}a$ 가 있다. 먼저 무차원주파수 $\tilde{\Omega}$ 는 원통형셸의 판막운동과 굽힘운동을 구분할 수 있는 변수로서 이 주파수 이하의 범위에서 주로 판막운동을 하게 된다. 무차원 두께 β 는 정적인 변형인 경우에 두꺼운 셸과 얇은 셸이론을 구분할 수 있는 변수이고 $\beta < 0.1$ 일 경우 얇은 셸이론을 적용할 수 있다. Table 1과 같은 형상과 물성치를 갖는 원통형셸의 경우 10kHz 이상의 고주파수영역에서 $\tilde{\Omega}$ 와 β 값은 얇은 셸이론을 근사적으로 적용할 수 있는 값들을 갖는 것을 알 수 있다.

원통형셸의 파동분산관계식은 다음과 같이 주어진다.

$$\Omega = (1 - \nu^2) \{ (k_x a)^2 / [(k_x a)^2 + n^2] \}^2 + \beta^2 \left\{ [(k_x a)^2 + n^2]^2 - \frac{[n^2(4 - \nu) - 2 - \nu]}{2(1 - \nu)} \right\} \quad (6)$$

Fig. 2와 같이 외부교란에 의해 축방향으로 전파하는 원통형셸의 반경방향 운동은 다음식과 같이 표현할 수 있다.

$$w_n = \tilde{w}_n \cos(k_x s + \phi) \exp[j(\omega t - k_x x)] \quad (7)$$

그림에서 보는 것처럼 원주방향의 파수 k_s 는 $k_s = n/a$ 가 되므로 원통형셸의 분산관계는 좀 더 단순화된 식으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{(k_x a \beta^{1/2})^4}{[(k_x a \beta^{1/2}) + (n \beta^{1/2})^2]^2} + [(k_x a \beta^{1/2})^2 + (n \beta^{1/2})^2]^2 \approx \Omega^2 \quad (8)$$

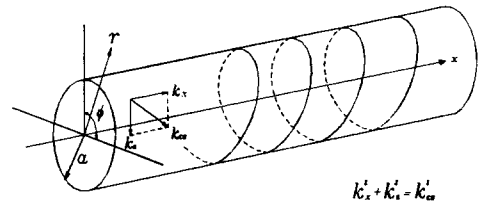


Fig. 2 Propagating waves in cylindrical shell

식(8)의 원통형 쉘의 분산관계에서 볼 수 있듯이 $n > 2$ 이상의 고차모우드에서의 분산관계식은 아래의 식과 같이 표현할 수 있음을 알 수 있다.

$$[(k_x a \beta^{1/2})^2 + (n \beta^{1/2})^2]^2 \approx \Omega^2 \quad (9)$$

한편 원통형 쉘의 두께와 같은 두께를 갖는 평판의 분산관계식은 다음과 같다.

$$k_b = \sqrt{\omega} (m/D)^{1/4} = \sqrt{\omega} (12)^{1/4} / (\sqrt{h} \sqrt{c_1'}) \quad (10)$$

원통형 쉘의 분산관계식과 비교하기 위하여 무차원 변수들인 Ω 와 β 그리고 반경 a 를 이용하여 평판의 분산관계를 표현하면 다음식과 같이 나타낼 수 있다.

$$k_b a = \sqrt{\Omega} / \sqrt{\beta}, \quad k_b^2 = k_x^2 + k_y^2 \quad (11)$$

식(9)의 원통형 쉘의 고차모드에 대한 분산관계식과 동일한 형태를 갖기 위해서는 식(11)의 평판의 y 방향 파수 k_y 는 $k_y = n/a$ 으로 주어져야 한다. 이러한 조건을 만족하기 위해서는 Fig. 3과 같이 평판의 y 방향의 길이가 원통형 쉘의 원주방향 길이의 절반에 해당하는 $a\pi$ 이어야 하고 동시에 평판의 y 방향 끝단에서 단순지지조건을 가져야 한다.

4. 등가평판의 타당성 검증

등가평판모델의 타당성을 검증하기 위하여 우선

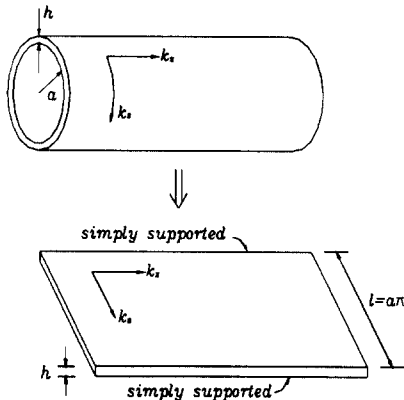


Fig. 3 Equivalent plate model

원통형 쉘의 고유진동수와 스펙트럴요소법으로 구한 등가평판의 고유진동수를 상호 비교하도록 한다. 이에 앞서 먼저 등가평판에 대한 이론해석과 스펙트럴요소해석 그리고 유한요소법에 의한 평판의 동적응답을 구함으로써 고주파수영역에서도 스펙트럴요소법은 유한요소법과는 달리 고주파수영역에서도 충분히 신뢰성을 가지고 사용할 수 있음을 확인하도록 한다.

Fig. 4는 등가평판의 중앙에 크기 100N, 지속시간 0.01초간의 충격하중을 받는 경우에 대한 각 방법에 의한 동적응답의 비교를 보여준다. 그림에서 보듯이 저주파영역에서는 이 세가지 방법에 의한 동적응답의 차이가 비교적 크지 않으나 고주파수영역으로 갈수록 유한요소법에 의한 결과는 다른 방법에 의한 결과에 비해 오차가 두드러짐을 알 수 있다.

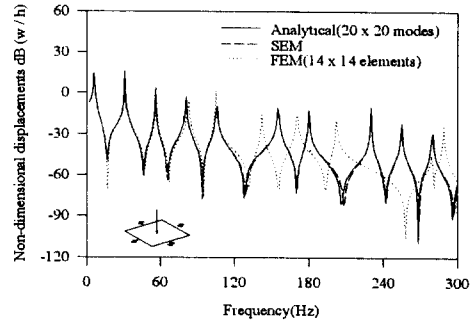


Fig. 4 Comparisons of the dynamic responses from analytical approach, SEM and FEM

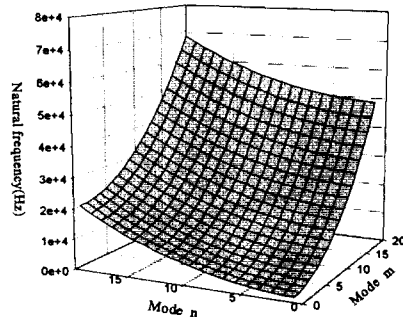


Fig. 5 Comparisons of the natural frequencies for the cylindrical shell and its equivalent plate model

Fig. 5는 끝단이 단순지지된 원통형셸과 이에 해당하는 네변이 단순지지된 등가평판에 대한 고유진동수의 비교이다. 그림에서 보는것처럼 저주파모드의 경우에는 셸과 등가평판의 고유진동수의 차이가 확연하게 드러남을 알 수 있지만 고차 모드로 갈수록 거의 근사적으로 두 구조물의 고유진동수의 차이는 현저히 줄어드는 것을 확인할 수 있다.

Fig. 6은 모드변화에 대한 원통형셸과 등가평판 모델의 고유진동수의 차이의 비를 보여주고 있다. 역시 저주파모드에서 원통형셸과 등가평판의 차이가 확연함을 알 수 있으나 고차모우드에서의 고유진동수의 차이는 거의 무시할 수 있음을 알 수 있다.

다음으로 원통형셸의 이론해와 스펙트럴요소법을 이용해 구한 등가평판의 동적응답을 주파수 변화에 따라 비교하고자 한다. Fig. 7은 원통형셸의 가진점과 관측점의 위치를 보여주며 가진점의 위치는 $x=1.4m$, $\theta=\pi/2$ 이고 관측점 α 는 $x=0.7m$, $\theta=\pi/2$ 이다. 하중의 크기가 $100N$ 인 집중하중이 $100Hz$ 의 정현파로 가진되는 경우와 고주파수인 $10kHz$ 및 $100kHz$ 로 가진되는 경우에 대하여 이론해석법과 스펙트럴요소법을 이용하여 구한 동적응답을 비교하였다. Fig. 8은 $100Hz$ 의 정현파로 가진되는 경우에 대한 원통형셸과 등가평판의 동적응답을 비교한 것이다. 그림에서처럼 상당한 값의 차이를 보이고 있음을 알 수 있다. 그러나 Fig. 9, 10에서 보는 것처럼 점차 고주파수대역으로 갈수록 실제의 원통형셸과 등가평판의 응답은 점차 근접한 경향을 보이고 있음을 알 수 있다.

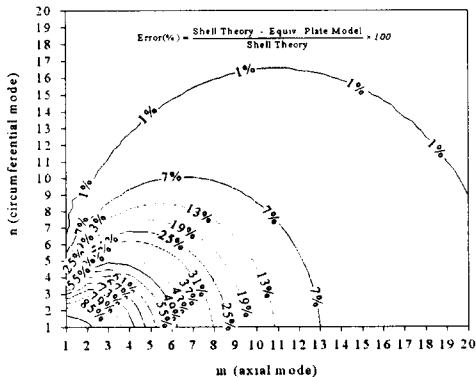


Fig. 6 Accuracy of the equivalent plate model

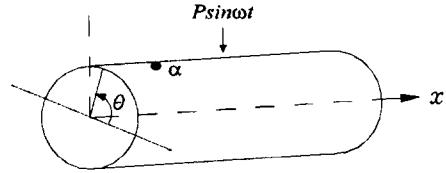


Fig. 7 Excitation and observation points on a cylindrical shell

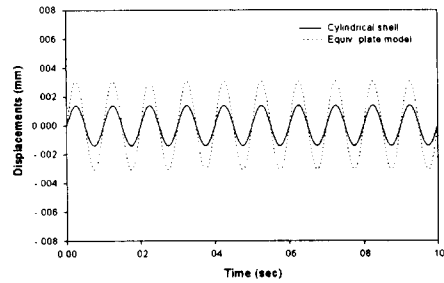


Fig. 8 Comparison of the dynamic responses for $100Hz$ harmonic excitation

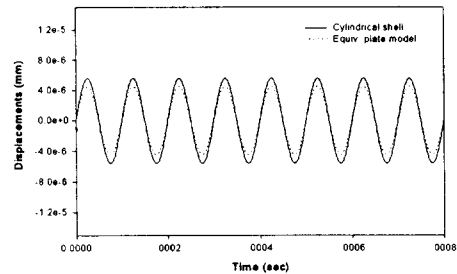


Fig. 9 Comparison of the dynamic responses for $10 kHz$ harmonic excitation

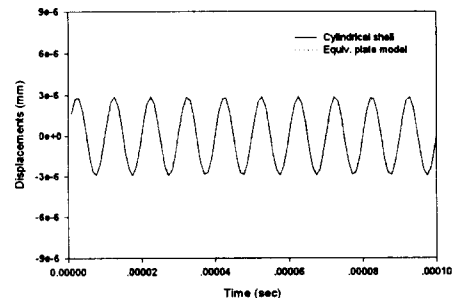


Fig. 10 Comparison of the dynamic responses for $100 kHz$ harmonic excitation

5. 결론

본 연구에서는 기존의 유한요소법으로는 해석하기 어려운 비교적 고주파수대역에서 원통형셸의 엄밀한 동적응답을 구할 수 있는 등가평판 모델링개념을 제안하였다. 아울러 유도한 등가평판모델을 이용하여 스펙트럴요소해석을 수행하고 엄밀해가 존재하는 경우 대한 원통형셸의 동적응답과 비교함으로써 소개한 등가평판 모델링개념의 타당성을 확인하였다. 본 연구에서 제시한 등가평판모델을 해석이 비교적 어려운 고주파영역에서의 셸구조물의 동적해석에 충분한 신뢰성을 가지고 사용할 수 있음을 확인할 수 있었다.

6. 참고문헌

1. 이준근, 이우식, 박철휘, 1996, "스펙트럴요소를 이용한 곡선보 구조물의 동적거동해석," 한국소음진동공학회지, 제6권, 제1호, pp. 83-88.
2. 이우식, 이준근, 이상희, 1996, "스펙트럴요소법을 이용한 평판의 동적거동해석," 한국소음진동공학회지, 제6권, 제5호, pp. 617-624.
3. Fahy, F., 1985, *Sound and Structural Vibration*, Academic Press, London.
4. Soedel, W., 1993, *Vibrations of Shells and Plates*, 2nd Edition, Marcel Dekker, New York, pp. 177-188.

5. Soedel, W., 1993, *Vibrations of Shells and Plates*, 2nd Edition, Marcel Dekker, New York, pp. 135-137.
6. Markus, S., 1988, *The Mechanics of Vibrations of Cylindrical Shells*, Elsevier Publications, Amsterdam, pp. 78-82.
7. Sanders, J. L., 1959, "An Improved First Approximation Theory for Thin Shells," NASA Report NASR24.
8. Soedel, W., 1993, *Vibrations of Shells and Plates*, 2nd Edition, Marcel Dekker, New York, pp. 91-93.

Table 1. Geometrical and structural properties of a cylindrical shell model

ρ (Mass density per unit Volume)	7500 kg/m ³
ν (Poisson's ratio)	0.28
E (Young's modulus)	2×10^9 kN/m ²
a (Radius of shell)	0.2 m
h (Thickness of shell)	0.004 m
L (Length of shell)	0.3 m