

# 개선된 판이론을 이용한 회전하는 복합재료 적층판의 비선형 진동해석

○ 나형진\* , 김지환\*\*

## Nonlinear Vibration Analysis of Rotating Composite Plates Based On a Refined Plate Theory

Hyoung Jin Na, Ji-Hwan Kim

### ABSTRACT

A refined plate theory including the effects of transverse shearing is used to predict the free vibration frequencies, mode shapes and stress distributions in spinning laminated composite plates. In this theory, the displacements are expressed by trigonometric series representation through the thickness. In the series for the displacements only the first few terms are retained. The model is validated by comparing the results for isotropic plates with those available in the literature.

### 서 론

비행기 엔진의 프로펠러에서의 진동에 관한 초기의 연구들은 헬리콥터의 블레이드에 관한 연구에서 사용되었던 것과 같은 보 형태의 모델을 통해서 이루어졌다. 그러나 보 형태의 모델의 경우, 고차 모드인 시위방향(chord-wise)으로의 휨거동, 즉 뒤틀림을 표현하는 데 있어서 부적합했다. 특히, 낮은 가로세로비(aspect ratio)의 프로펠러는 그 거동에 있어서 보에 비해 판에 가까운 성향을 나타내었다. 이와 같은 이유로 Ramamurti와 Kielb<sup>1</sup>, Wang과 Shaw<sup>2</sup>, Shaw와 Shen<sup>3</sup>, Bhumbra와 Kosmatka<sup>4,5</sup>는 회전하는 판에 대해 연구하였다.

또한, 엔진의 연료효율(fuel efficiency)에 많은 관심이 주어지는 가운데 복합재료의 유용성, 즉 높은 강성대 하중비(strength-to-weight ratios)와 적층각의 변화에 따른 특성의 다양화가 크게 부각되었

다. 이에 참고문헌[1],[2] 및 [4]에서는 복합재료판의 거동에 대해 연구하였다.

특히, 참고문헌[4], [5]는 1차 전단변형 판이론을 근거로, 횡방향 전단변형 및 회전관성까지 고려하여 회전판의 진동거동에 대하여 연구하였다. 그러나 1차 전단변형 이론을 이용한 경우에는 변위가 두께방향으로 선형적으로 변한다는 가정을 전제하므로 횡방향 전단변형 및 전단응력이 두께방향으로 일정하게 된다. 실제로 횡방향 전단응력은 두께에 대해서 포물선 형태를 나타내며, 판의 표면에서는 0이 된다.

이에 대해 Stein<sup>6</sup>은 두꺼운 판이나 복합재료 적층판에서 면내방향 응력뿐 아니라 횡방향 응력 및 전단응력을 정확히 예측할 수 있는 비선형 판이론을 전개하였다. 이 이론에서는 전통적인 전단변형 이론에 비해 삼각함수 항이 더 포함되어 있다.

본 연구에서는 참고문헌[6]의 개선된 이론을 바탕으로 하여 회전하는 복합재료 적층판의 진동특성 및 응력분포를 살펴보았다. 또한 다양한 회전속도, pitch 각 및 sweep 각의 영향 등에 대해서도 살펴보고자 한다.

\* 서울대학교 대학원 항공우주공학과

\*\* 서울대학교 항공우주공학과

## 본 론

### 1. 판이론

회전하는 판을 해석할 경우 일반적으로 1차 전단 이론을 사용하였으나, 이 경우 판의 윗면과 아랫면에서 응력 경계조건을 만족하지 못하게 된다.

고차 전단변형이론의 경우 응력 경계조건을 만족하는 데, 본 연구에서는 참고문헌[6]에서 전개한 이론을 따른다.

즉 변위장은 다음과 같이 가정한다.

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u^0 + u^a \frac{z}{h} + u^s \sin \frac{\pi z}{h} \\ v(x, y, z, t) &= v^0 + v^a \frac{z}{h} + v^s \sin \frac{\pi z}{h} \\ w(x, y, z, t) &= w^0 + w^c \cos \frac{\pi z}{h} \end{aligned} \quad (1)$$

전통적인 전단변형 판이론에서는 삼각함수항이 없으며, 회전을 나타내는  $u^a/h$ 와  $v^a/h$ 는  $\phi_x$ 와  $\phi_y$ 로 표현된다. 또한 전단변형을 무시한 고전적인 판이론에서는,  $u^a/h$ 와  $v^a/h$ 는  $-w^0_{,x}$ 와  $-w^0_{,y}$ 으로 표현된다.

면내방향 변위가 작고, 두께방향으로의 회전이 가장 크다는 가정하에 변형률-변위의 관계식은 다음과 같이 주어진다[6].

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= u^0_{,x} + \frac{1}{2}(w^0_{,x})^2 + u^a_{,x} \frac{z}{h} + u^s_{,x} \sin \frac{\pi z}{h} \\ \epsilon_y &= v^0_{,y} + \frac{1}{2}(w^0_{,y})^2 + v^a_{,y} \frac{z}{h} + v^s_{,y} \sin \frac{\pi z}{h} \\ \epsilon_z &= -\frac{\pi}{h} w^c \sin \frac{\pi z}{h} \\ \gamma_{xy} &= u^0_{,y} + v^0_{,x} + w^0_{,x} w^0_{,y} + (u^a_{,y} + v^a_{,x}) \frac{z}{h} \\ &\quad + (u^s_{,y} + v^s_{,x}) \sin \frac{\pi z}{h} \\ \gamma_{yz} &= w^0_{,x} + \frac{u^a}{h} + (w^c_{,x} + \frac{\pi}{h} u^s) \cos \frac{\pi z}{h} \\ \gamma_{zx} &= w^0_{,y} + \frac{v^a}{h} + (w^c_{,y} + \frac{\pi}{h} v^s) \cos \frac{\pi z}{h} \end{aligned} \quad (2)$$

복합재료 적층판의 k번째 적층면에서 판고정 좌표에 대한 응력-변형도 관계식은

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{36} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3a)$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{44} & C_{45} \\ C_{45} & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (3b)$$

으로 주어진다.

회전하는 판에 대한 운동방정식은 해밀톤의 원리를 통해 유도된다.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = 0 \quad (4)$$

여기서,  $T$ 는 판의 운동에너지이며,  $U$ 는 변형에너지이다.

변형에너지는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_A \int_z \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} dz dA \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_A \int_z \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} dz dA \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_A \int_z \sigma_z \epsilon_z dz dA \end{aligned} \quad (5)$$

판의 운동에너지는

$$T = \frac{1}{2} \int_A \int_z \rho \vec{V} \cdot \vec{V} dz dA \quad (6)$$

이며, 여기서  $\rho$ 는 밀도,  $\vec{V}$ 는 관성좌표계 ( $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ )에서의 속도벡터이다.

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} + \Omega \hat{k} \times \vec{r} \quad (7)$$

여기서,  $\vec{r}$ 은 관성좌표계에서의 위치벡터이다. 또한,  $\vec{r}$  및  $\Omega \hat{k}$ 는 판고정 좌표계 ( $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$ )로 나타낼 수 있으므로, 본 연구에서는 판고정 좌표계로 변환하여 나타내었다.

지배방정식은 식(5) 및 식(6)을 변분하여 식(4)에 대입함으로써 얻어진다.

$$\delta u^0 : N_{x,x} + N_{xy,y} - Z_{u^0} = 0 \quad (8a)$$

$$\delta v^0 : N_{xy,x} + N_{y,y} - Z_{v^0} = 0 \quad (8b)$$

$$\begin{aligned} \delta w^0 : & (N_x w^0_{,x} + N_{xy} w^0_{,y})_{,x} \\ & + (N_{xy} w^0_{,x} + N_y w^0_{,y})_{,y} \\ & + N_{xz,x} + N_{yz,y} - Z_{w^0} = 0 \quad (8c) \end{aligned}$$

$$\delta u^a : M_{x,x} + M_{xy,y} - N_{xz} - h Z_{u^a} = 0 \quad (8d)$$

$$\delta v^a : M_{xy,x} + M_{y,y} - N_{yz} - h Z_{v^a} = 0 \quad (8e)$$

$$\delta u^s : m_{x,x} + m_{xy,y} - n_{xz} - \frac{h}{\pi} Z_{u^s} = 0 \quad (8f)$$

$$\delta v^s : m_{y,y} + m_{xy,x} - n_{yz} - \frac{h}{\pi} Z_{v^s} = 0 \quad (8g)$$

$$\delta w^c : n_{xz,x} + n_{yz,y} + f_z - Z_{w^c} = 0 \quad (8h)$$

여기서  $Z$ 는 운동에너지식을 변분할 때 나타나는 항(force term)이다.

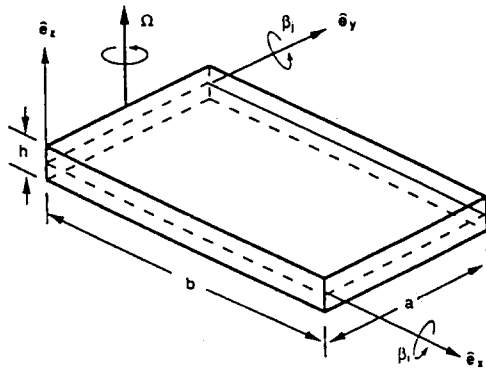


Fig. 1 Plate geometry, spin axis, and plate rotations

## 2. 유한요소 정식화

본 연구에서는 변위를 근사할 때 9절점의 Lagrange 보간함수를 사용하였다. 즉, 각 변위들은 다음과 같이 표현하였다.

$$\begin{aligned} u^0 &= \sum_{j=1}^9 u_j^1 \phi_j, & v^0 &= \sum_{j=1}^9 u_j^2 \phi_j, \\ w^0 &= \sum_{j=1}^9 u_j^3 \phi_j, & u^a &= \sum_{j=1}^9 u_j^4 \phi_j, \\ v^a &= \sum_{j=1}^9 u_j^5 \phi_j, & u^s &= \sum_{j=1}^9 u_j^6 \phi_j, \\ v^s &= \sum_{j=1}^9 u_j^7 \phi_j, & w^c &= \sum_{j=1}^9 u_j^8 \phi_j \end{aligned} \quad (9)$$

위의 변위들을 이용하여 다음과 같은 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} [M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + ([K^0] + [K^S] \\ + [K^{CF}] + [K^{NL}] + [K^G])\{u\} = \{F^{CF}\} \quad (10) \end{aligned}$$

여기서  $[K^0], [K^S]$ 는 각각 선형강성행렬 및 전단강성행렬로서 대칭행렬이다. 또,  $[K^{NL}], [K^G]$ 는 각각 비선형 강성행렬, 기하학적 강성행렬(geometric matrix)로서, 본 연구에서는 이 행렬들을 대칭화하여 정식화하였다.

## 3. 결과 및 고찰

### 3.1. 판의 진동해석

본 연구에서는 아래와 같은 물성치를 갖는 등방성 평판에 대해서 진동 특성을 살펴보았다.

$$E = 68.95 \text{ GPa}, \quad \nu = 0.3, \quad \rho = 2713 \text{ Kg/m}^3$$

Table 1은 위의 물성치를 이용하여 정사각평판의 처음 5개 모드의 진동수에 대해 요소수 변화에 따른 참고자료[3]과 비교한 것이다.

Table 1. Convergence of frequency

Mode	3×3	4×4	Ref.[3]
1	3.529	3.515	3.482
2	8.586	8.558	8.544
3	21.778	21.573	21.432
4	27.430	27.272	27.295
5	31.618	31.278	31.234

위와 같이 4×4 요소 분할은 물론 3×3 요소의 경우에도 좋은 수렴성을 갖는다고 할 수 있겠다.

또한, 판의 두께비(L/h)는 일정하게 유지하고 중

횡비(L/b)를 바꿔가면서 진동수를 조사하였다.

Table 2는 참고자료[7]의 실험치 및 참고자료[2]의 진동수 값들을 본 연구의 결과와 비교하였다.

Table 2. Frequency parameter  $\lambda$  for plates

Mode	Ref.[7]	Ref.[2]	Present
L/b=1			
1	3.508	3.455	3.684
2	5.372	5.16	5.870
3	21.96	21.83	19.81
4	10.26	9.789	10.83
5	24.85	24.75	23.11
L/b=2			
1	3.33	3.41	3.515
2	8.17	8.28	8.558
3	19.97	21.45	21.573
4	-	26.67	27.272
5	-	31.12	31.278
L/b=4			
1	3.472	3.378	3.467
2	14.93	14.66	14.82
3	21.61	21.19	21.61
4	94.49	93.53	93.88
5	48.71	47.99	48.27

여기서  $\lambda = \omega L^2 \sqrt{\rho h / D}$  이다.

## 결론

회전하는 복합재료 적층판의 진동 해석을 개선된 판이론을 도입하여 구하였다. 본 연구의 결과로부터 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다. 첫째, 개선된 판이론을 사용하는 경우 횡방향 응력을 조사하는 데 있어서 유용하다. 둘째, 회전하는 판의 진동 현상에 있어서 1차 전단변형이론을 사용할 경우와 비교할 때 큰 차이가 없다.

## 참고문헌

- (1) Ramamurti, V., and Kielb, R., 1987, " Natural Frequencies of Twisted Rotating Plates, " Journal of Sound and Vibration, Vol.112, No.3, pp. 429-449.
- (2) Wang, J. T. S., Shaw, D., and Mahrenholz, 1987, " Vibration of Rotating Rectangular Plates,

" Journal of Sound and Vibration, Vol. 97, No. 3, pp. 455-468.

(3) Shaw, D., Shen, K. Y., and Wang, J. T. S., 1988, "Flexural Vibration of Rotating Rectangular Plates of Variable Thickness, " Journal of Sound and Vibration, Vol. 126, No. 3, pp. 373-385.

(4) Bhumbra, R., Kosmatka, J. B., and Reddy, J. N., 1990. " Free Vibration of Behavior of Spinning Shear-Deformable Plates Composed of Composite Materials, " AIAA Journal, Vol. 28, No. 11, pp. 1962-1970.

(5) Bhumbra, R., and Kosmatka, J. B., 1996, " Behavior of Spinning Pretwisted Composite Plates Using a Nonlinear Finite Element Approach, " AIAA Journal, Vol. 34, No. 8, pp. 1686-1695.

(6) Stein, M., 1986, " Nonlinear Theory for Plates and Shells Including the Effects of Transverse Shearing, " AIAA Journal, Vol.24, No. 9, pp. 1537-1544.

(7) Reissa, A. W., 1969, " Vibration of Plates, " NASA-SP-160.