

스펙트럴요소법을 이용한 구조물의 비이상적인 경계조건 결정에 관한 연구

전덕규^o(인하대) · 김주홍^{*}(인하대) · 이우식^{**}(인하대)

Determination of Non-ideal Structural Boundary Conditions by Using Spectral Element Method

Duk-Kyu Jeon^o, JooHong Kim and Usik Lee

ABSTRACT

Structural boundary condition is very important as a part of a structural system because it determines the dynamic characteristics of the structure. It is often to experience that experimental measurements of structural dynamic characteristics are somewhat different from the analytical predictions in which idealized boundary conditions are usually assumed. However, real structural boundary conditions are not so ideal; not perfectly clamped, for instance. Thus this paper introduces a new method to determine the non-ideal structural boundary conditions in the frequency domain. In this method, structural boundary conditions are modeled by both extensional (vertical) and torsional elastic springs. The effective springs are then determined from experimental FRFs (frequency response functions) by using the spectral element method (SEM). For a cantilevered beam, experiments are conducted to determine the real boundary conditions in terms of effective springs. Dynamic characteristics (analytically predicted) based on identified boundary conditions are found to be much closer to experimental measurements when compared with those based on ideal boundary conditions.

1. 서론

구조물의 진동특성을 결정하는 요소의 하나로써 구조물의 경계조건은 매우 중요하다. 유한요소 해석이나 일상적인 이론해석에서 사용되고 있는 경계조건은 대부분의 경우 이상적인 경계조건이다. 여기에서 이상적인 경계조건이란 완벽한 고정단이나 완벽한 단순지지 등과 같은 경계조건을 말한다.

그러나 이와같은 이상적인 경계조건은 실제로 존재하지 않는다. 대부분의 진동실험결과가 이상적인 경계조건을 이용하여 예측한 이론해석결과와 일치하지 않는 것은 이러한 원인에도 기인한다. 따라서, 이론해석과정에서 사용할 구조물의 경계조건을 명확하게 규명하는 일은 매우 중요하다. 이와 관련된 기존의 연구를 살펴보면 최근에 시스템이론과 컴퓨터기술의 급속한 발전에 따라 “시스템규명 (system identification)”이라는 주제하에 구조물 자체의 특성(구조강성, 질량 및 진동감쇠)이나 손상 상태를 규명하기 위한 수많은 연구가 활발히 이루어져 왔다. 그러나, 구조물의 경계조건규명에 관한

*인하대학교 대학원 기계공학과

**정회원 인하대학교 기계공학과

연구는 국내외적으로 비교적 드문 편이다. 구조물의 경계조건결정에 관한 연구로서 Wang⁽¹⁾은 최근 연구가 있다. 그는 비이상적인 경계조건에 영향을 기존의 구조강성에 보상해주기 위한 추가적인 구조강성으로 표현하였으며 보상된 구조강성의 크기는 진동실험을 통해 얻은 모드인자로부터 유한요소법을 이용하여 결정하였다. 유한요소모델에 기초를 둔 이 방법은 유한요소의 특성상 고주파수에서 신뢰성있는 경계조건을 규명이 어려울 것이며, 또한 이 방법에 의해 결정된 경계조건은 유한요소해석에 국한하여 사용해야 하는 제약점도 가지고 있다.

유한요소법과는 달리 고주파수영역에서도 구조물의 동적특성을 엄밀하게 제공해주는 새로운 진동해석기법의 하나인 스펙트럴요소법(spectral element method)⁽²⁻⁵⁾이 최근에 개발되었다. 스펙트럴요소법에서는 구조동력학방정식의 엄밀해인 탄성파동해를 주파수영역에서 중첩하여 엄밀한 동적응답을 유도하며 이 과정에서 고속푸리에변환(FFT)과 역고속푸리에변환(IFFT)을 효율적으로 활용함으로써 전산시간을 단축하는 장점도 갖고 있다.

따라서, 본 연구에서는 (1)스펙트럴요소법에 기초한 경계조건을 모델링 및 결정기법을 소개하고 (2)결정된 경계조건을 사용하여 이론해석적으로 구한 진동특성을 이상적인 경계조건에 근거한 이론해석결과 및 진동실험결과와 비교하여 본 연구결과의 타당성을 검토하였다.

2. 스펙트럴요소 해석법

본 장에서는 보를 대상으로 하여 스펙트럴요소법을 간단히 소개하고자 한다. 동적하중 $p(x, t)$ 가 작용하고 있는 보의 운동방정식은 다음과 같이 주어진다⁽³⁾.

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = p(x, t) \quad (2)$$

(1)식의 일반해를 다음과 같이 가정한다.

$$v(x, t) = \sum \hat{v}(x; \omega) e^{i\omega t} \quad (2)$$

외력이없는 경우 (즉, $p(x, t) = 0$) 식(2)를 (1)에 대입하여 스펙트럴변위성분 $\hat{v}(x; \omega)$ 에 대한 상미분방정식이 유도된다. 이식으로부터 $\hat{v}(x; \omega)$ 를 스펙

트럴요소 양 끝단 노드(node)점에서의 변위 \hat{v}_i 와 기울기 $\hat{\phi}_i$ 의 함수로 표현하면 다음과 같은 형태의 식을 얻을 수 있다⁽⁴⁾.

$$\hat{v}(x) = g_1(x) \hat{v}_1 + g_2(x) \hat{\phi}_1 + g_3(x) \hat{v}_2 + g_4(x) \hat{\phi}_2 \quad (3)$$

스펙트럴 변위성분을 나타내기 위해 식(2)에 사용된 부호(\wedge)는 편의상 앞으로 생략한다.

식(3)을 이용하여 각노드점에서의 전단력과 모멘트를 노드변위와 기울기의 함수로 유도하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ M_2 \end{pmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ & & d_{33} & d_{34} \\ sym & & & d_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \phi_1 \\ v_2 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad (4)$$

또는,

$$\{f\} = [s] \{v\} \quad (5)$$

윗 식에서 $[s]$ 는 스펙트럴요소행렬이며 d_{ij} 와 그 외 기호는 다음과 같이 정의되었다.

$$\begin{aligned} d_{11} &= (S \cdot Ch + C \cdot Sh) (kL)^3 / z_0 \\ d_{12} &= S \cdot Sh (kL)^2 L / z_0 \\ d_{13} &= -(S + Sh) (kL)^3 / z_0 \\ d_{14} &= (Ch - C) (kL)^2 L / z_0 \\ d_{22} &= (S \cdot Ch - C \cdot Sh) kL^3 / z_0 \\ d_{23} &= (C - Ch) (kL)^2 L / z_0 \\ d_{24} &= -(S - Sh) kL^3 / z_0 \\ d_{33} &= (S \cdot Ch + C \cdot Sh) (kL)^3 / z_0 \\ d_{34} &= -S \cdot Sh (kL)^2 L / z_0 \\ d_{44} &= (S \cdot Ch - C \cdot Sh) kL^3 / z_0 \\ z_0 &= 1 - C \cdot Ch \\ C &= \cos kL \quad Ch = \cosh kL \\ S &= \sin kL \quad Sh = \sinh kL \end{aligned} \quad (6)$$

스펙트럴요소의 결합은 유한요소법에서 유한요소를 결합하는 방법과 동일하게 이루어진다. Fig. 1과 같이 두 개의 스펙트럴요소로 구성된 보의 경우 두 요소를 결합한 전체 계에 대한 스펙트럴요

소식은 다음과 같이 표현된다⁽⁵⁾.

$$[S]\{V\}=\{F\} \quad (7)$$

여기서,

$$\{V\}=\left\{v_1 \phi_1 v_2 \phi_2 v_3 \phi_3\right\}^T \quad (8)$$

$$\{F\}=\left\{Q_1 M_1 Q_2 M_2 Q_3 M_3\right\}^T \quad (9)$$

$$[S]=\begin{pmatrix} s_{11}^1 & s_{12}^1 & s_{13}^1 & s_{14}^1 & 0 & 0 \\ s_{21}^1 & s_{22}^1 & s_{23}^1 & s_{24}^1 & 0 & 0 \\ s_{31}^1 & s_{32}^1 & s_{33}^1+s_{11}^2 & s_{34}^1+s_{12}^2 & s_{13}^2 & s_{14}^2 \\ s_{41}^1 & s_{42}^1 & s_{43}^1+s_{21}^2 & s_{44}^1+s_{22}^2 & s_{23}^2 & s_{24}^2 \\ 0 & 0 & s_{31}^2 & s_{32}^2 & s_{33}^2 & s_{34}^2 \\ 0 & 0 & s_{41}^2 & s_{42}^2 & s_{43}^2 & s_{44}^2 \end{pmatrix} \quad (10)$$

식(10)의 행렬에서 윗첨자는 스펙트럴요소의 번호를 나타내며 아래첨자는 해당 스펙트럴요소행렬의 요소성분을 나타낸다.

3. 경계조건의 모델링 및 결정

본 연구에서 소개되는 개념은 다른 경계조건을 갖는 경우에도 동일하게 적용할 수 있으므로 Fig. 1에 나타난 외팔보를 예제로 다루어 경계조건의 모델링과 결정과정을 설명한다. Fig. 1에 보인 노드점①에서의 경계조건을 수직방향변위스프링 K_V 와 비틀림변위스프링 K_T 로 모델링하였다. 가진력 P 가 작용하는 위치(노드점②)를 기준으로 외팔보는 두 개의 스펙트럴요소로 구분된다. 두 개의 스펙트럴요소를 식(7)과 같이 결합하고 노드점①에서의 스프링력과 모멘트 그리고 노드점②에서의 외력 P 를 대입하면 다음식을 얻는다.

$$\begin{pmatrix} s_{11}^1+K_V & s_{12}^1 & s_{13}^1 & s_{14}^1 & 0 & 0 \\ s_{21}^1 & s_{22}^1+K_T & s_{23}^1 & s_{24}^1 & 0 & 0 \\ s_{31}^1 & s_{32}^1 & s_{33}^1+s_{11}^2 & s_{34}^1+s_{12}^2 & s_{13}^2 & s_{14}^2 \\ s_{41}^1 & s_{42}^1 & s_{43}^1+s_{21}^2 & s_{44}^1+s_{22}^2 & s_{23}^2 & s_{24}^2 \\ 0 & 0 & s_{31}^2 & s_{32}^2 & s_{33}^2 & s_{34}^2 \\ 0 & 0 & s_{41}^2 & s_{42}^2 & s_{43}^2 & s_{44}^2 \end{pmatrix} \cdot \{V\}=\{0 \ 0 \ P \ 0 \ 0 \ 0\}^T \quad (11)$$

식(11)에서 처음 두 행에 관한 식을 전개하면

다음과 같다.

$$K_V=-\left(s_{11}^1+s_{12}^1 \frac{\phi_1}{v_1}+s_{13}^1 \frac{v_2}{v_1}+s_{14}^1 \frac{\phi_2}{v_1}\right) \quad (12)$$

$$K_T=-\left(s_{22}^1+s_{21}^1 \frac{v_1}{\phi_1}+s_{23}^1 \frac{v_2}{\phi_1}+s_{24}^1 \frac{\phi_2}{\phi_1}\right) \quad (13)$$

주파수영역에서 입력(가진력)대 출력(진동량)의 비를 나타내는 주파수응답함수(FRF)를 사용하여 진동시스템의 고유특성을 보다 용이하게 표현할 수 있다. 가속도응답에 대한 FRF, 즉 이너턴스(inertia) $A(\omega)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$A(\omega)=-\omega^2 \frac{v}{P} \quad (14)$$

식(12)와 (13)을 식(14)에서 정의된 $A(\omega)$ 를 사용하여 표현하면 다음과 같다.

$$K_V=-\left(s_{11}^1+s_{12}^1 \frac{A_1'}{A_1}+s_{13}^1 \frac{A_2}{A_1}+s_{14}^1 \frac{A_2'}{A_1}\right) \quad (15)$$

$$K_T=-\left(s_{22}^1+s_{21}^1 \frac{A_1}{A_1'}+s_{23}^1 \frac{A_2}{A_1'}+s_{24}^1 \frac{A_2'}{A_1'}\right) \quad (16)$$

여기서,

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{a_1}{P} & A_1' &= \frac{b_1}{P} \\ A_2 &= \frac{a_2}{P} & A_2' &= \frac{b_2}{P} \\ a_1 &= -\omega^2 v_1 & b_1 &= -\omega^2 \phi_1 \\ a_2 &= -\omega^2 v_2 & b_2 &= -\omega^2 \phi_2 \end{aligned} \quad (17)$$

식(15)와 (16)에서 스프링상수들이 스펙트럴요소성분 S_{ij} 와 A_i 와 A_i' 의 함수로 표현됨을 알 수 있다.

Fig. 1에 보인 외팔보의 경우 실험을 통해 가진력 P 와 노드②에서의 가속도는 측정이 용이하지만 고정단인 노드점①에서 가속도와 각가속도, 노드점②에서의 각가속도를 측정하는 것은 실제적으로 쉽지 않다. 그러나 이 값들은 노드점②(가진력의 위치)와 다른 세 위치에서 측정된 가속도를 이용하여 구할 수 있다. Fig. 1에 표시된 세 위치 α, β, γ 에서의 가속도는 식(3)으로부터 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}
a(\alpha) &= g_1(\alpha) a_1 + g_2(\alpha) b_1 \\
&\quad + g_3(\alpha) a_2 + g_4(\alpha) b_2 \\
a(\beta) &= g_1(\beta) a_1 + g_2(\beta) b_1 \\
&\quad + g_3(\beta) a_2 + g_4(\beta) b_2 \\
a(\gamma) &= g_1(\gamma) a_1 + g_2(\gamma) b_1 \\
&\quad + g_3(\gamma) a_2 + g_4(\gamma) b_2
\end{aligned} \tag{18}$$

식(18)의 양변을 가진력 P 로 나누면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\frac{a(\alpha)}{P} &= g_1(\alpha) \frac{a_1}{P} + g_2(\alpha) \frac{b_1}{P} \\
&\quad + g_3(\alpha) \frac{a_2}{P} + g_4(\alpha) \frac{b_2}{P} \\
\frac{a(\beta)}{P} &= g_1(\beta) \frac{a_1}{P} + g_2(\beta) \frac{b_1}{P} \\
&\quad + g_3(\beta) \frac{a_2}{P} + g_4(\beta) \frac{b_2}{P} \\
\frac{a(\gamma)}{P} &= g_1(\gamma) \frac{a_1}{P} + g_2(\gamma) \frac{b_1}{P} \\
&\quad + g_3(\gamma) \frac{a_2}{P} + g_4(\gamma) \frac{b_2}{P}
\end{aligned} \tag{19}$$

식(17)의 정의를 이용하여 식(19)를 다음과 같은 행렬식의 형태로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} A_1 \\ A_1' \\ A_2' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} g_1(\alpha) & g_2(\alpha) & g_4(\alpha) \\ g_1(\beta) & g_2(\beta) & g_4(\beta) \\ g_1(\gamma) & g_2(\gamma) & g_4(\gamma) \end{bmatrix}^{-1} \\
&\quad \left(\begin{bmatrix} A_\alpha \\ A_\beta \\ A_\gamma \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g_3(\alpha) \\ g_3(\beta) \\ g_3(\gamma) \end{bmatrix} A_2 \right)
\end{aligned} \tag{20}$$

여기서,

$$\begin{aligned}
A_\alpha &= \frac{a(\alpha)}{P}, \quad A_\beta = \frac{a(\beta)}{P} \\
A_\gamma &= \frac{a(\gamma)}{P}, \quad A_2 = \frac{a_2}{P}
\end{aligned}$$

세 측정점(α, β, γ)과 가진점(노드점②)에서의 가속도에 대한 FRF, 즉 $A_\alpha, A_\beta, A_\gamma, A_2$ 를 실험

으로 측정하여 식(20)에 대입하면 노드점①과 ②에서의 값 A_1, A_1' 과 A_2' 를 구할 수 있다. 이렇게 구한 값들을 식(15)와 (16)에 대입하면 스프링상수 K_V 와 K_T 를 구할 수 있다. 이와같이 결정된 스프링상수를 식(11)에 대입한 후 Fig. 5에 설명된 스펙트럴요소해석 절차에 따라 외팔보의 동적응답을 구할 수 있다.

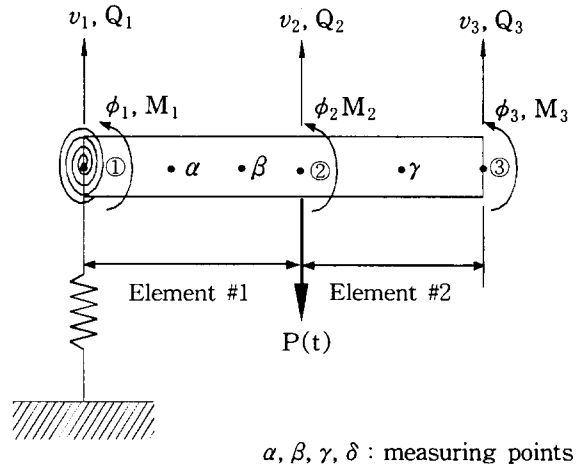
4. 실험 및 결과

본 연구에서 수행한 실험구성은 Fig. 2와 같다. 측정시편의 한쪽끝을 바이스로 고정시켜 외팔보의 진동실험을 수행하였다. 시편의 가진점②와 측정점 α, β, γ 을 진동모드의 노드점이 아닌 곳으로 정하였고 신호발생기에서 임펄스신호를 발생시켜 가진기로 구조물을 가진하였다. 이때 구조물에 가해지는 가진력의 크기는 힘검출소자(force transducer)로 측정하고 각 측정점에서의 진동량은 가속도계로 계측하여 신호분석기로 보내진다. 신호분석기의 Time Capture기능을 사용하여 특정 샘플링시간과, 샘플링갯수 조건하에서 4개의 가진력과 4개의 가속도의 시간응답을 얻었다⁽⁷⁾. 이렇게 얻어진 실험 데이터는 FFT를 이용하여 시간영역의 실험데이터를 주파수영역으로 변환시킨다. 주파수영역으로 변환된 실험데이터를 이용하여 노드점①과 ②에서의 가속도와 각가속도를 구한다. 이렇게 구한 가속도와 각가속도를 식(15)와 (16)에 대입하여 스프링상수 K_V 와 K_T 를 주파수의 함수로 결정하였다.

Fig. 3은 (1) 진동실험으로부터 구한 실험 FRF, (2) 실험 FRF로부터 유도된 스프링상수를 이용하여 이론적으로 구한 이론 FRF, (3) 이상적인 고정단경계조건을 사용하여 이론적으로 구한 이론 FRF를 나타낸다. Fig. 3으로부터 실험 FRF와 스프링모델링에 근거한 이론 FRF가 고주파영역에서 이상적인 경계조건에 근거한 이론 FRF에 비해 보다 일치함을 보이고 있다. 본 연구에서는 유한요소법에 근거한 경계조건결정법⁽¹⁾을 사용하여 경계조건을 결정하고 이 경계조건을 이용한 진동해석도 진행중이다. 유한요소에 대한 스펙트럴요소의 상대적 우월성(엄밀성 측면에서)으로 판단하여 본 연구에서 제시한 스펙트럴요소에 근거한 경계조건결정 기법은 고주파수영역에서도 실제 경계조건과 보다 일치하는 경계조건을 제공함으로써 보다 정확한 동적응답을 제공할 수 있을 것으로 기대된다.

5. 참고문헌

- (1) Wang F. and Chen, S., 1996, "A Method to Determine the Boundary Condition of the FiniteElement Model of a Slender Beam using Measured Modal Parameters," *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 118, pp. 474~478.
- (2) Doyle, J. F., 1991, *Static and Dynamic Analysis of Structures*, Klüer Academic Publishers.
- (3) 이준근, 이우식, 박철휘, 1996, "스펙트럴요소를 이용한 곡선보 구조물의 동적거동 해석," 한국소음진동공학회지, 제6권 제1호, pp. 83~88.
- (4) 이우식, 이준근, 오진우, 1996, "스펙트럴요소법을 이용한 동적분포하중을 받는 구조물의 동적 해석," *대한기계학회논문집(A)*, 제20권 제6호, pp. 1773~1783.
- (5) 이우식, 김주홍, 1996, "스펙트럴요소법을 위한 새로운 동적분포하중 처리기법에 관한 연구," 1996년도 추계학술대회논문집, 한국소음진동공학회, pp. 210~216.
- (6) Chun, K. R., 1972, "Free Vibration of a Beam with One End Spring-Hinged and the Other Free," *ASME Journal of Applied Mechanics*, pp. 1154~1155.
- (7) Ewins, D. J., 1986, *Modal Testing : Theory and Practice*, Research Studies Press.
- (8) Rao, S. S., 1990, *Mechanical Vibration* Addison -Wesley Publishing Co.
- (9) Graff, Karl F., 1975, *Wave Motion in Elastic Solids*, Dover Publications.



$\alpha, \beta, \gamma, \delta$: measuring points

Fig. 1 Modeling of structural boundary conditions

Table. 1 Material and structural properties of beam

Young's modulus (E)	63 Gpa
Structural damping (η)	0.01
Density (ρ)	2.63×10^3 kg/m ³
Width (b)	0.03 m
Length (L)	0.4 m
Height (h)	0.005 m

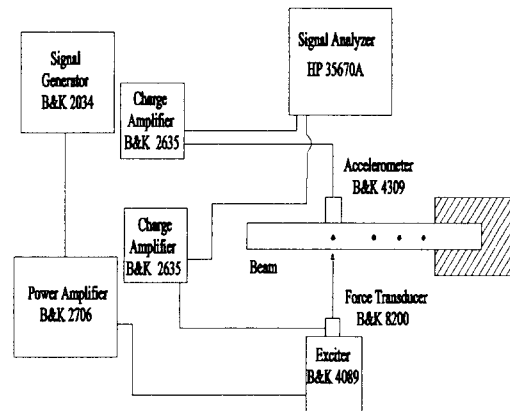


Fig. 2 Schematic of the experimental setup

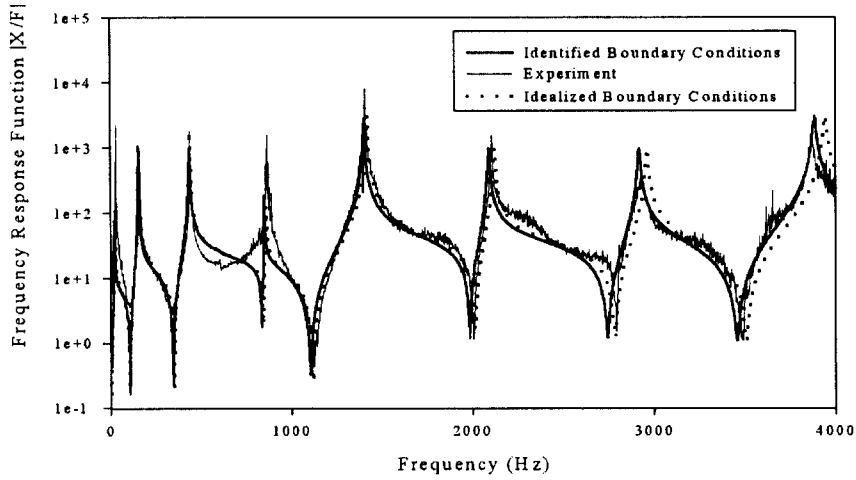


Fig. 3 Comparison of frequency response functions

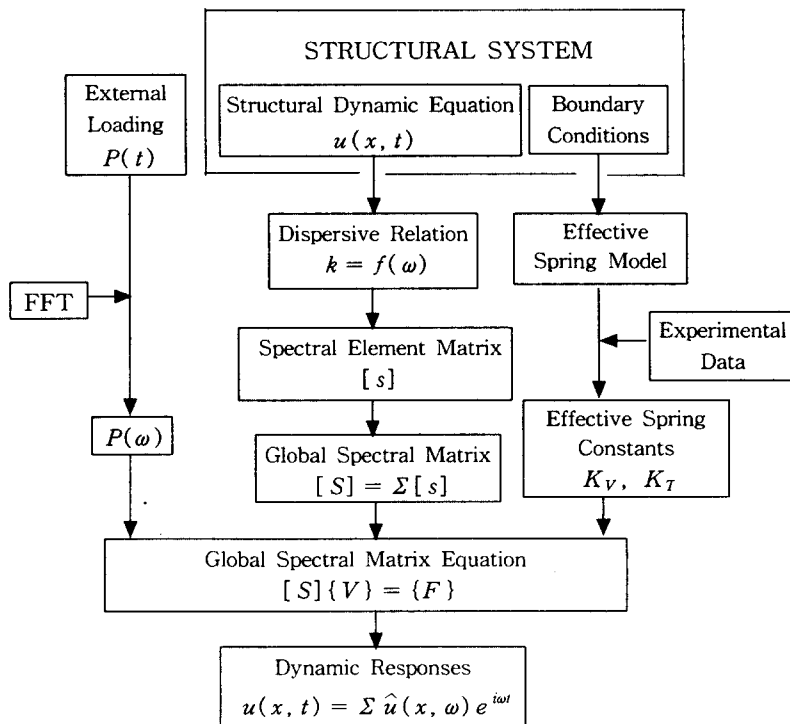


Fig. 4 Basic flow of the spectral element analysis using identified structural boundary conditions