

혼돈 운동 제어에 관한 수치 실험

홍대근^o(인하대) · 주재만^{*}(인하대) · 박철휘^{**}(인하대)

A Numerical Experiment on the Control of Chaotic Motion

Dae-Kyun Hong^o , Jae-Man Joo and Chol-Hui Pak

ABSTRACT

In this paper, we describe the OGY method that convert the motion on a chaotic attractor to attracting time periodic motion by making only small perturbations of a control parameter.

The OGY method is illustrated by application to the control of the chaotic motion in chaotic attractor to happen at the famous Logistic map and Henon map and confirm it by making periodic motion. We apply it the chaotic motion at the behavior of the thin beam under periodic torsional base-excitation, and this chaotic motion is made the periodic motion by numerical experiment in the time evaluation on this chaotic motion. We apply the OGY method with the Jacobian matrix to control the chaotic motion to the periodic motion.

1. 서론

혼돈(Chaos)이라 하는 동력학적 현상은 항상 존재해 왔다. 그러나 혼돈현상을 갖는 시스템은 초기치에 대한 극도의 민감성 때문에 종종 귀찮은 성질로써 간주되었다¹⁾. 그래서 오랫동안 혼돈운동은 예견될 수도, 제어될 수도 없는 것으로 믿어져 왔다. 그러나 최근 논문에서 Ott, Grebogi, 와 Yorke (OGY)²⁾는 기이한 끌개(strange attractor) 상에 존재하는 수많은 불안정한 주기운동 가운데서 하나의 주기운동을 선택하고 시간에 따른 조절 매개변수(control parameter)의 작은 변화를 주어 안정하게 만듦으로써 혼돈 현상을 나타내는 동력학적 시스템을 제어하는 방법을 제안하였다.

조절 매개변수 α 가 α^* 일 때 포앙카레 사상에서 계의 불안정한 주기운동을 나타내는 고정점 $\xi^*(\alpha^*)$ 을 생각해보자. Fig. 1에서 포앙카레 사상의 n번째 투영된 계의 상태를 ξ_n 이라 표시하자. 이 상태는 고정점 $\xi^*(\alpha^*)$ 의 안정 다양체(stable manifold) 주위에 존재하는 흐름을 따라서 고정점 $\xi^*(\alpha^*)$ 에 접근한다. 그러나 시간이 흐르면 이 상태는 고정점 $\xi^*(\alpha^*)$ 의 안정 다양체를 따라서 접근하다가 불안정 다양체를 따라서 고정점 $\xi^*(\alpha^*)$ 에서 멀어진다. 포앙카레 사상에서의 고정점은 조절 매개변수 α 에 따라 달라질 수 있다. ξ_n 의 상태가 고정점 $\xi^*(\alpha^*)$ 에서 멀어지는 순간에 조절 매개변수를 α^* 에서 α_n 으로 옮겨 고정점을 이동시키면(Fig. 1(b)), ξ_n 은 고정점 $\xi^*(\alpha^*)$ 으로 접근하게된다. 적절한 α_n 을 사용하면 n+1번

^o인하대학교 대학원 기계공학과

^{**}정회원 인하대학교 공과대학 기계공학과

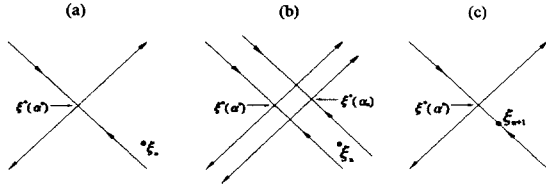


Fig.1 A schematic view of the OGY control method

째 사상에서의 계의 상태 ξ_{n+1} 이 정확하게 고정점 ξ^* (α^*)의 안정 다양체 위에 놓이게 할 수 있고 (Fig. 1(c)), 즉시 조절 매개 변수의 변화를 없애게 되면 계는 안정하게 된다. 그러나 잡음이나 오차에 의해서 정확하게 α_n 을 결정할 수 없기 때문에 조절 매개 변수를 각각의 단계마다 계속적으로 변화를 주어야 한다. 이 OGY 방법이 혼돈운동을 발생시키는 여러 가지 계의 제어에 시도되었다. U. Dressler와 G. Nitsche는 Duffing 방정식에 적용해 보았고³⁾, W. L. Ditto, S. N. Rauseo와 M. L. Spano는 magnetoelastic ribbon에 OGY를 적용하여 실험적으로 입증하였다⁴⁾.

본 논문에서는 우리에게 잘 알려진 1차원인 논리 사상(Logistic map)과 2차원인 Henon 사상에서 발생하는 혼돈운동에 OGY 방법을 적용하였으며, 또 지지부에 주기적인 비틀림-변위 가진을 받는 얇은 빔에 대하여 특정한 가진 주파수와 가진 진폭에서 발생하는 운동을 포앙카레 사상과 주파수 분석(FFT)을 통해 혼돈운동임을 확인하고 포앙카레 사상에 표현된 혼돈 끌개에 OGY 방법을 적용하여 혼돈운동을 주기운동으로 제어하였다.

2. 얇은 빔의 운동 방정식

Joo 와 Pak은 지지부에 주기적인 비틀림-변위 가진을 받는 얇은 빔의 운동방정식을 다음과 같이 유도하였다⁶⁾.

$$(\mu + \alpha_1 y^2) \ddot{x} + (\alpha_2 - \alpha_3 \Omega^2 y^2 + \alpha_1 y \dot{y}) \dot{x} + 2\alpha_1 y \dot{y} \dot{x} + \alpha_4 \Omega \dot{y} y + (\mu \alpha_5 + \alpha_6 y^2) \ddot{y} + c_1 \dot{x} = 0 \quad (1)$$

$$(1 + \beta_1 x^2) \ddot{y} + (\beta_2 - \Omega^2 - \beta_3 \Omega^2 x^2 - \beta_4 \Omega \dot{x} + \beta_1 x \dot{x}) \dot{y} + 2\beta_1 x \dot{x} \dot{y} + \beta_7 y^3 + c_2 \dot{y} = 0 \quad (2)$$

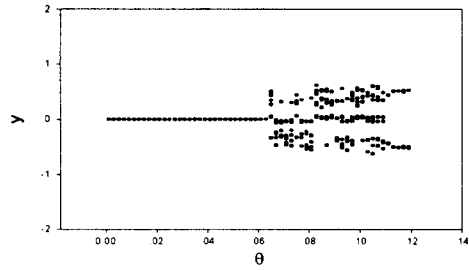


Fig. 2 Numerical bifurcation diagram result from the bending motion of thin beam as increasing the displacing amplitude ($\omega=70$)

여기에서 $\mu, \alpha_i, \beta_i, i=1, 2, 3, \dots$ 는 빔의 형상에 의해 결정되는 상수이며, 또 c_1, c_2 는 감쇠계수, $\Omega(t) = \theta \omega \cos \omega t$ 로써 θ 는 비틀림 변위진폭, ω 는 가진 주파수이고 $y(t)$ 는 굽힘 진폭, $x(t)$ 는 비틀림 진폭을 나타낸다.

얇은 빔에서 발생한 굽힘운동의 양상은 가진 진폭 θ 의 변화에 따른 피크 점의 변화로 알 수 있다. Fig. 2는 가진 주파수 ω 가 70일 때에 피크 점을 나타내는데 가진 진폭 $\theta = 0.065$ 에서 갑자기 굽힘 운동이 커져서 불규칙한 운동이 발생하였다.

이 불규칙한 운동 중에 특정한 가진 진폭 $\theta=0.1$ 일 때의 시간과형(Fig. 3)을 취하여 주파수 분석을 통해 이 운동이 혼돈운동임을 확인하였다.(Fig. 4)

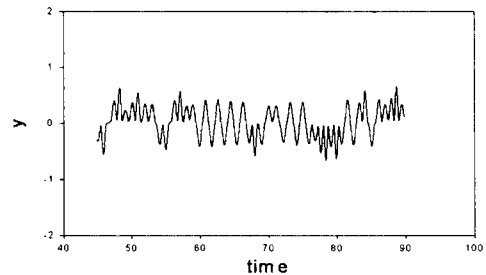


Fig. 3 Time trace of bending motion ($\omega = 70, \theta = 0.1$)

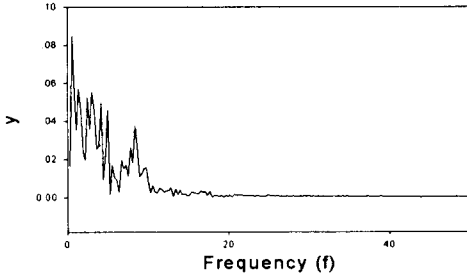


Fig. 4 FFT of bending motion ($\omega = 70$, $\theta = 0.1$)

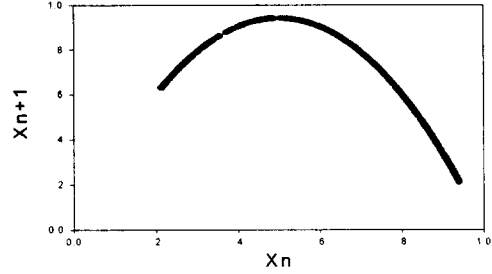


Fig. 6 Chaotic attractor in Logistic map

3. OGY 방법을 이용한 수치 실험

우리에게 잘 알려진 1차원 논리 사상과 2차원 Henon 사상 상에 특정한 조절 매개 변수에서 발생하는 혼돈운동을 OGY 방법을 가지고 주기운동으로 만들어 보았고 또 지지부에 주기적인 비틀림 변위 가진을 받는 얇은 빔에 대해서 특정 가진 주파수($\omega = 70$)와 가진 진폭($\theta = 0.1$)에서 발생하는 혼돈운동을 주기운동으로 제어하였다.

3-1 논리 사상 (Logistic map)

1차원 사상의 대표적인 논리 사상은 다음과 같이 표현된다.

$$X_{n+1} = 4 P X_n (1 - X_n) \quad (3)$$

먼저 OGY 방법을 적용하기 위해서 혼돈운동이 발생하는 조절 매개변수 P 값을 결정해 주었다. Fig. 5에서 나타낸 분기 선도(bifurcation diagram)

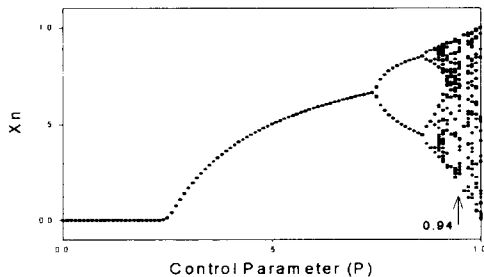


Fig. 5 Bifurcation diagram of Logistic map

는 조절 매개 변수의 변화 하에서 동력학적 계의 혼돈운동을 갖는 지를 검사하는 유용한 기법이다. Fig. 6은 $P=0.94$ 일 때 논리사상의 되돌이 사상(return map)으로써, 논리사상은 $P=0.94$ 일 때 Fig. 6의 혼돈 끌개를 갖는 혼돈운동임을 알 수 있다. 먼저 Fig. 6에서 나타나는 혼돈 끌개 상의 점들에 OGY 방법을 적용시켰다. 처음 단계로 불안정한 고정점을 찾기 위해서 되돌이 사상의 기이한 끌개의 점에 고정점으로 인정할 수 있는 작은 반경 $\epsilon (= 0.001)$ 안에 들어오는 점들의 쌍을 가지고 사상을 형성해 보면 아래와 같이 된다.

$$X_{n+1} = \hat{A} X_n + \hat{C} \quad (4)$$

여기서 \hat{A} , \hat{C} 는 사상이 1차원이므로 상수 값으로 얻어지는 데 이 때 이용되는 점은 반경 ϵ 안에 들어오는 주기가 1인 점들이 사용되고, 이용된 방법은 아래와 같은 최소 자승 방법(least-square fit method)을 사용하였다.

먼저 근사 함수(approximating function)를 식(5)와 같이 가정하면 \tilde{A} 와 \tilde{C} 는 식(6)과 식(7)에 의해 구할 수 있다.

$$X_{n+1} = \tilde{A} X_n + \tilde{C} \quad (5)$$

$$\tilde{C} N + \tilde{A} \sum_{n=1}^N X_n = \sum_{n=1}^N X_{n+1} \quad (6)$$

$$\tilde{C} \sum_{n=1}^N X_n + \tilde{A} \sum_{n=1}^N X_n^2 = \sum_{n=1}^N X_{n+1} X_n \quad (7)$$

여기에서 \tilde{A} 와 \tilde{C} 는 가정한 근사함수의 추정치

(estimation)이고, N은 논리 사상의 혼돈 끌개 상의 주기가 1인 불안정한 주기운동을 나타내는 점들의 갯수이다. 식(6)과 식(7)에 의해 구해진 \hat{A} 와 \hat{C} 를 이용하여 고정점을 구하면 $P=0.94$ 인 고정점 $X_n^*(P)$ 은 0.734이다. 조절 매개변수가 변화하면 계의 고정점은 그에 상응하게 변화한다. 조절 매개변수 P 의 미소변화 ΔP 에 의해 변화된 새로운 고정점 $X_n^*(P + \Delta P)$ 은 ΔP 가 0.005일 때 0.7345가 된다. 따라서 조절 매개변수의 미소변화 (ΔP)를 선정하기 위하여, 희망하는 고정점의 방향(g)과 위치(C)를 결정하여야 한다. g 의 불안정한 고유방향(eigenvector)으로 투영된 값과 불안정한 고유치에 의해 상수 C 를 구하면 식(8)과 식(9)가 된다.

$$g = \frac{X_n^*(P^* + \Delta P) - X_n^*(P^*)}{\Delta P} = 0.28 \quad (8)$$

$$C = \frac{\lambda_u}{(\lambda_u - 1)f_u \cdot g} = -4.0187 \quad (9)$$

여기서 OGY 방법을 쉽게 적용하기 위해서 C 와 g 를 고정된 값으로 하고, ΔP 를 식(10)과 같이 구했다.

$$\Delta P = C f_u \cdot (X_n - X_n^*(P^*)) \quad (10)$$

ΔP 의 변화가 허용되는 최대치 ΔP (=0.01)보다 작을 경우 사상할 때마다 조절 매개 변수 P 를 변화시켜 가면서 제어하였다.

Fig. 7은 조절 매개변수 $P=0.94$ 일 때 혼돈 끌개를 나타내는 논리 사상에 대한 주기운동으로의 제어

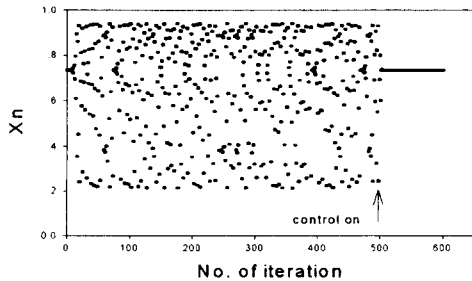


Fig. 7 Control of chaotic Logistic map ($P=0.94$)

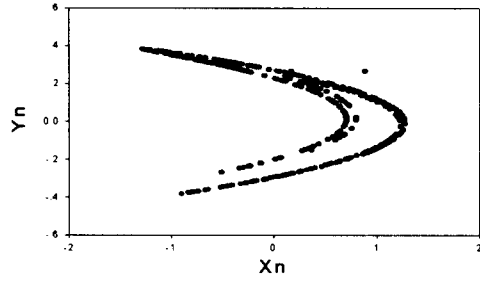


Fig. 8 Chaotic attractor in Henon map ($P=1.4$)

결과를 나타낸다. 1차원 논리 사상에서의 기이한 끌개 상에 무수히 많은 불안정한 주기운동 중에서도 하나의 불안정한 주기운동을 안정화함으로써 계를 주기운동으로 만들었다.

3-2 헨논 사상 (Henon map)

혼돈운동을 발생하는 2차원 사상인 Henon 사상은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= P + 0.3 Y_n - X_n^2 \\ Y_{n+1} &= X_n \end{aligned} \quad (11)$$

조절 매개 변수 P 가 1.4일 때의 Henon 사상에서 발생하는 혼돈운동에 OGY 방법을 적용하였다.

먼저 Fig. 8에서와 같이 Henon 사상에 나타나는 기이한 끌개 상의 점들에 OGY 방법을 적용시켰다. 혼돈 끌개를 주기가 1인 고정점으로 제어하기 위해, 논리 사상의 경우와 마찬가지로 고정점의 허용반경 ϵ 을 0.001로 가정하여 주기가 1이 되는 점을 찾았다. 이 점들의 쌍을 (Z_n, Z_{n+1})이라 하면 최소 자승법을 사용하여 다음과 같이 선형화할 수 있다.

$$Z_{n+1} = \hat{A} Z_n + \hat{C} \quad (12)$$

여기서 Z_n 은 $\{ X_n, Y_n \}$ 의 2차원 사상의 한 점을 나타낸다. $P=1.4$ 일 때의 고정점 $Z_n^*(P)$ 은 (0.8838, 0.8838)이 된다. 논리 사상의 경우처럼 OGY 방법을 수행하기 위하여 처음에 1% 미만의 조절 매개 변수에 변화를 주어서 변화된 고정점

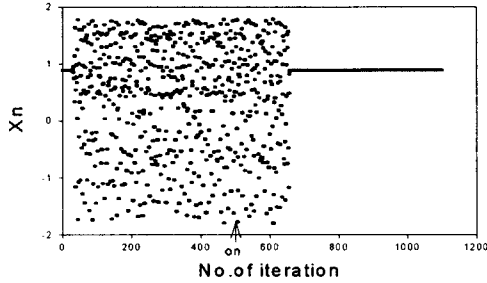


Fig. 9 Control of chaotic Henon map (P=1.4)

$Z_n^*(P + \Delta P) = (0.8858, 0.8858)$ 을 구하고 벡터 g 와 상수 C 구하여 매번 사상할 때마다 조절 매개변수를 변화시켜 제어하였다. Fig. 9는 혼돈 끌개 (Fig.8)를 나타내는 Henon 사상을 500번째 사상에서 제어를 시작하여, 650번째 사상에서 고정점으로 제어되는 결과를 보여준다.

3-3 주기적인 비틀림 베이스 가진을 받는 얇은 빔

4차 Runge-Kutta 방법을 통해 식(1)과 식(2)와 같이 표현된 지지부에 주기적인 비틀림-변위 가진을 받는 얇은 빔의 특정 가진 주파수($\omega=70$)와 가진 진폭($\theta=0.1$) 조건하에 불규칙한 시간 파형을 얻었다. 이 불규칙한 운동을 주파수분석과 포앙카레 사상을 통해서 혼돈운동을 확인하였다. Fig. 10 굽힘 운동에 대한 포앙카레 사상을 나타낸다.

이 포앙카레 사상에서 발생한 기이한 끌개에 OGY 방법을 적용하였다. 50000개의 점 중에 고정점으로 인정할 수 있는 작은 반경 ϵ 에 들어오는 점들의 쌍을 식(12)을 활용하여 선형화 하였다.

초기치는 $(x, \dot{x}, y, \dot{y}) = (0, 0, 1e-7, 0)$ 일 때 수치적분을 통해서 시간 파형 얻었으며, 초기의 과도기 신호를 제거한 후 식(12)과 식(13)을 이용하여 고정점을 구하였다.

$$\begin{aligned} Z_n^*(\theta) &= (I - \hat{A})^{-1} \cdot \hat{C} \\ &= (-0.0009460, 0.000017) \end{aligned} \quad (13)$$

조절 매개 변수 θ 의 미소변화에 따른 상수 C 값

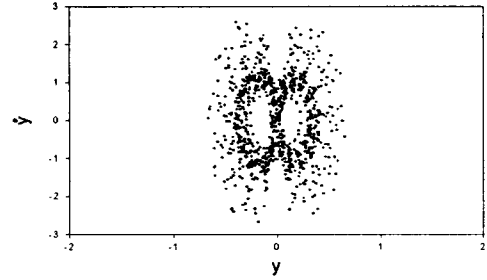


Fig. 10 Poincare map of bending motion ($\omega=70, \theta=0.1$)

-2.9490을 얻었다. 조절 매개 변수 θ 에 변화를 줄 수 있는 최대치 $\Delta\theta$ 의 범위 안에서 OGY 방법을 적용시켜 혼돈운동을 주기운동으로 만들었다. Fig. 11(a)에는 OGY 방법을 이용하여 특정 가진 주파수($\omega=70$)와 가진 진폭($\theta=0.1$)에서 발생하는 혼돈운동을 주기운동으로 제어한 결과이다. Fig. 11(b)는 조절 매개변수의 변화를 나타낸다.

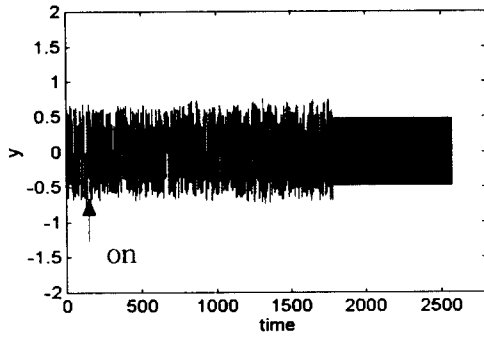
만약 혼돈운동이 발생하는 계의 운동방정식을 아는 경우는 포앙카레 사상에 나타난 기이한 끌개를 이루는 점들의 선형화 과정에서 생기는 오차를 줄이기 위해 계의 Jacobi의 행렬을 OGY에 적용할 수 있다. 따라서 고정점 $(x, \dot{x}, y, \dot{y}) = (0, 0, 0, 0)$ 으로 가정하고 비틀림의 Jacobi의 행렬을 아래와 같이 구하였다. 이것을 \hat{A} 으로 간주하여 OGY 방법을 적용하였다.

$$J = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \Omega^2 - \beta^2 & -c_2 \end{vmatrix} \quad (15)$$

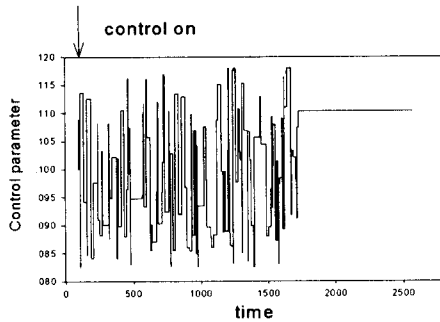
Fig. 11(c)은 얇은 빔의 운동방정식에서 구한 Jacobi의 행렬을 초기치 $(x, \dot{x}, y, \dot{y}) = (0, 0, 1e-7, 0)$ 와 최대 조절 매개 변수의 변화량이 0.01 일 때의 OGY 방법을 활용하여 주기운동으로 제어하였다. Fig. 12는 Fig. 4로 표현된 혼돈 끌개를 주기운동으로 제어한 결과에 대한 Fourier 스펙트럼을 나타낸다.

4. 결론

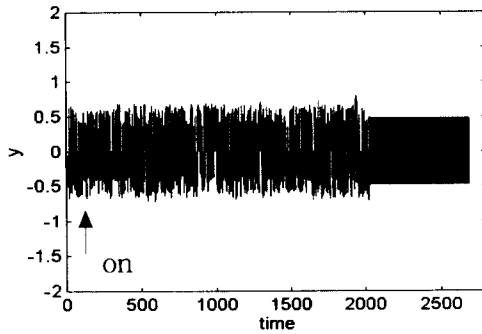
Ott, Grebogi 와 Yorke에 의해서 제안된 OGY 방법은 OGY 방법을 1차원 사상인 논리 사상과 2차원 사상인 헤논 사상에 적용했고 이를 바탕으로



(a)



(b)



(c)

Fig. 11 Controlling chaos of thin beam (a) by using the original OGY method ($\max \Delta\theta = 0.018$) (b) change of control parameter (c) by using the Jacobian matrix ($\max \Delta\theta = 0.01$)

지지부에 주기적인 비틀림-변위 가진을 받는 얇은

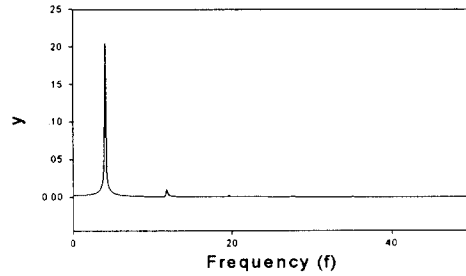


Fig. 12 FFT of bending motion after control

빔의 혼돈운동에 대하여 수치 실험을 통해 주기운동으로 제어할 수 있음을 확인하였다. 조절 매개변수 (θ)는 지지부의 변위-가진의 진폭으로서 실제계의 실험에서 조절가능한 매개변수이며, 따라서 실제계에 대한 실험적인 방법으로 매개변수의 미소변화를 통해 혼돈운동을 예측가능한 주기운동으로 제어할 수 있으리라 생각된다.

5. 참고 문헌

1. Parker T. S. and Chua L. O., 1987, "Chaos : A Tutorial for Engineers," *Proc. IEEE* V.75(8), pp. 982-1008
2. Ott E., Grebogi C. and Yorke J. A., 1990, "Controlling Chaos," *Phys. Rev. Lett.* V.64(11), pp. 1196-1199
3. Dressler U. and Nitsche G., 1992, "Controlling Chaos Using Time Delay Coordinates," *Phys. Rev. Lett.* V.68(1), pp. 1-4
4. Ditto W. L., Rausero S. N. and Spano M. L., 1990, "Experimental Control of Chaos," *Phys. Rev. Lett.* V.65, pp. 3211-3214
5. Shinbrot T., Grebogi C., Ott E. and Yorke J. A., 1993, "Using Small Perturbations to Control Chaos," *Nature* V.363, pp. 411-417
6. Joo J. M. and Pak C. H., "Nonlinear Normal Mode Dynamics of Thin Beam Under Torsional Base-Excitation : Experiment and Theory," to be print