

불규칙한 외부 교란이 주기적 가진을 받는 비선형 계의 동적 특성에 미치는 영향

⁰박시형*, 김지환**

Noise Effect in a Nonlinear System Under Harmonic Excitation

Si-Hyong Park, Ji-Hwan Kim

ABSTRACT

Dynamic characteristics are investigated when a nonlinear system showing periodic and chaotic responses under harmonic excitation is exposed to random perturbation. About two well potential problem, probability of homoclinic bifurcation is estimated using stochastic generalized Melnikov process and quantitative characteristics are investigated by calculation of Lyapunov exponent. Critical excitation is calculated by various assumptions about Gaussian Melnikov process. To verify the phenomenon graphically Fokker-Planck equation is solved numerically and the original nonlinear equation is numerically simulated. Numerical solution of Fokker-Planck equation is calculated on Poincaré section and noise induced chaos is studied by solving the eigenvalue problem of discretized probability density function.

서론

선형 계와 구분되는 비선형 계의 특징은 분기(bifurcation) 현상으로 특징지워질 수 있다. 이것은 계의 매개변수(parameter)들이 변화하면서 반응의 양상이 양적으로 뿐만이 아니라 질적으로도 변화하는 현상을 말한다. 이런 현상은 매개변수의 변화가 불규칙하게 일어나게 되면서 더욱 복잡한 양상을 가지게 되고 반응의 질적인 변화를 확률적인(stochastic) 관점에서 관찰해야 한다. 주기적 가진과 불규칙한 잡음을 동시에 받는 비선형 계는 이러한 현상을 설명할 수 있는 하나의 예가 되고 이에 대한 연구 방향은 크게 두가지로 나누어 볼 수 있다. 첫째는 본래의 결정론적(deterministic) 계에

대한 연구를 토대로 확률적인 개념들을 도입하는 것이고 둘째는 불규칙한 가진을 받는 계에 대한 연구에 주기적인 가진을 첨가하여 반응을 확률적인 개념에서 살펴보는 것이다. 이런 연구와 함께 주기적 신호에 섞여 있는 잡음의 크기가 계의 반응에 때로는 주기적인 부분을 더 커지게 할 수도 있다는 현상(stochastic resonance)들이 발견됨에 따라 이런 현상과 위에서 언급한 연구들과의 상호관련성이 연구되고 있다.

Bulsara, Schieve와 Jacobs¹는 비선형 계의 혼돈(chaos) 현상에 미치는 잡음의 영향에 대한 연구를 통하여 혼돈 현상이 일어난 상태에서 프랑카레 맵(Poincaré map)의 기이한 끌개(strange attractor)가 가지고 있는 프랙탈(fractal) 구조와 리야푸노프 멱지수(Lyapunov exponent)가 잡음에 의해 매끄러워지는 효과(smoothing effect)를 나타내는 것을 알아내고 주기적인 반응을 나타내는 주기적 가진

* 서울대학교 대학원 항공우주공학과

** 정희원, 서울대학교 항공우주공학과

의 크기에 대해서도 잡음의 영향으로 혼돈 현상이 발생할 수 있음을 발견하였다. Simiu²는 결정론적 계의 멜니코프 함수(Melnikov function)를 불규칙한 가진이 첨가되었을 경우 확률론적 이론을 도입하여 일반화된(generalized) 멜니코프 과정(process)으로 확장하여 교차 이론(crossing theory)에 근거한 혼돈 현상의 경계를 정의하고 바람에 의해 가진되는 해안 조류의 운동에 적용하였다. Lin과 Yim³은 혼돈운동을 나타내는 two well potential problem에 주기적 가진과 불규칙한 가진을 동시에 가했을 때 발생하는 현상에 대하여 혼돈 운동, 불규칙한 혼돈운동, 불규칙한 운동, 불규칙한 주기적 운동 등으로 분류하여 이들의 진이 과정에 대해 고찰하였다. JUST⁴는 더핑 진동자(Duffing oscillator)의 통계학적인 운동을 Gaussian closure를 이용한 모멘트(moment) 방정식으로 근사하여 주기적 운동의 영역과 혼돈운동의 영역으로 구분한 연구를 통해 혼돈 운동의 영역에서는 모멘트 방정식이 물리적 의미만을 가지고 있을 뿐 모멘트의 본래 정의에 따른 값은 제시하지 못함을 발견하였다.

본문에서는 주기적 가진과 불규칙한 가진을 동시에 받는 two well potential problem에 대하여 잡음에 의해 야기된(noise induced) 혼돈 운동을 여러 가지 측면에서 확인하고 이들을 통해 혼돈 운동의 임계점 부근에서 일어나는 현상들을 고찰하였다. 일반화된 멜니코프 과정을 통해 호모클리닉 분기 현상의 확률을 계산하고 교차 이론(crossing theory)에 의한 임계점(critical point)과 에너지 관점에서의 임계점, 그리고 리압노프 먹지수 관점에서의 임계점을 계산하였다. 또한 리압노프 먹지수를 수치적으로 계산하여 결정론적 계에서의 먹지수와 통계학적 계에서의 먹지수가 혼돈 운동과 어떤 관계가 있는지를 조사하였다. 포커 플랑크 방정식을 수치적으로 계산하여 잡음에 의해 야기된 혼돈 운동을 확인하고 이들의 고유치 문제를 풀어서 two well 사이의 점프(jump)현상에 대한 양적인 값을 제시하였다. 주기적 운동과 혼돈 운동의 임계점에 대하여 결정론적 계에서는 이 부분이 갑작스럽게 많은 변화를 가지지만 확률적인 계에서는 그렇지 않은 것을 기초로 하여 본문의 전반에 걸쳐 연구되는 부분은 불규칙한 신호에 의해 혼돈운동이 야기되기 시작하는 부분이다.

본문

1. 운동 방정식

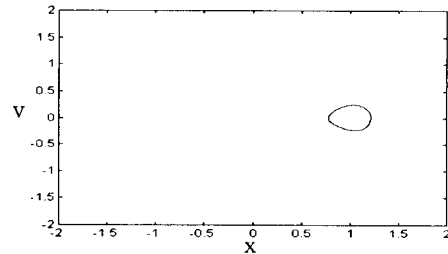
혼돈 운동을 일으키는 two well potential problem의 방정식은 다음과 같다. 이 방정식은 대표적으로 좌굴된(buckled) 빔(beam)의 운동 방정식에서 발견된다.

$$\ddot{x} + c\dot{x} - kx + hx^3 = F(t) \quad (1)$$

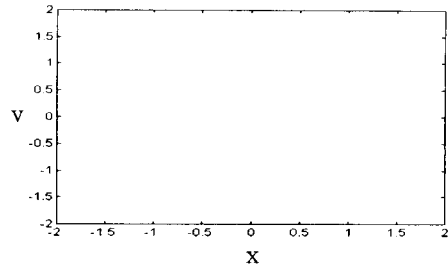
결정론적 계에서의 $F(t)$ 는 주기함수로 주어지나 본문에서는 다음과 같다.

$$F(t) = f\cos(\omega t) + \sqrt{x} W(t) \quad (2)$$

여기서 $W(t)$ 는 백색잡음(white noise)으로 자기 상관함수(autocorrelation)가 1이다. 잡음이 없는 경우의 식 (1)은 f 의 크기에 따라 주기적 운동과 혼돈 운동을 나타내며 이 두가지 운동의 대표적인 위상궤적(phase portrait)과 프앙카레 맵은 Fig. 1, 2와 같다.

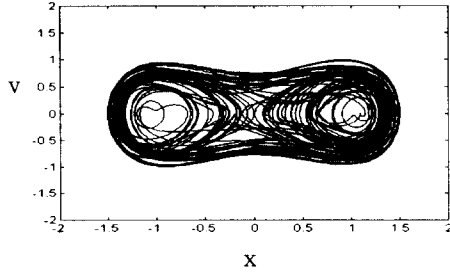


(a) Phase portrait

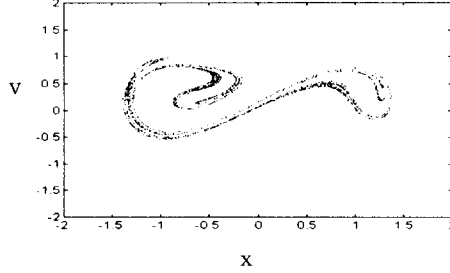


(b) Poincaré map

Figure 1. Periodic motion($k=1$, $h=1$, $c=0.185$, $f=0.2$, $x=0$, $\omega=1$)



(a) Phase portrait



(b) Poincaré map

Figure 2. Chaotic motion($k=1, h=1, c=0.185, f=0.2, \chi=0, \omega=1$)

2. 일반화된 멜니코프 과정

혼돈 운동의 임계점을 이론적으로 계산하는 방법 중의 하나로 멜니코프 함수가 있다. 결정론적 계에서는 이것이 함수로 주어지지만 확률적인 계에서는 이것이 불규칙 과정(random process)으로 주어지며 Lin과 Yim³이 본문과 같은 문제에 대하여 계산을 한 바 있다. 일반화된 멜니코프 과정은 다음과 같다.

$$M_g^+(t_0) = M_d^+(t_0) + M_r^+(t_0) \quad (3)$$

여기서 위첨자는 호모클리닉 궤도의 오른쪽 부분을 말하는 것이고 아래첨자 d는 결정론적 부분, r은 불규칙한 부분이다. 계산상의 편의를 위해 $k=1, h=1$ 로 하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$M_d^+(t_0) = -\frac{4c}{3} - \sqrt{2}f\pi\omega \sec h\left(\frac{\pi\omega}{2}\right) \sin(\omega t_0) \quad (4)$$

$M_r^+(t_0)$ 는 \dot{x} 의 호모클리닉 궤도가 충격 반응(impulse response)으로 주어지는 선형 필터(filter)에 백색 잡음이 통과된 것으로 해석할 수 있으며 그 식은 다음과 같다.

$$M_r^+(t_0) = -\sqrt{2\chi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tanh(t)W(t+t_0)}{\cosh(t)} dt \quad (5)$$

선형 필터를 통과했으므로 $M_r^+(t_0)$ 의 평균은 0이고 분산은 다음과 같다.

$$\sigma^2 = \chi \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 S_w(\omega) d\omega = \frac{1}{3} \chi \quad (6)$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p_+^0(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{-i\omega\pi}{\sqrt{2} \cosh \frac{\pi\omega}{2}} \quad (7)$$

여기서 $p_+^0(t)$ 는 \dot{x} 의 호모클리닉 궤도이다. 백색잡음이 선형 필터를 거쳐 나온 것이 $M_r^+(t_0)$ 이므로 멜니코프 과정은 가우스 과정(Gaussian process)이 된다.

이렇게 계산된 멜니코프 과정은 여러 가지 관점에서 혼돈 운동의 임계점을 제시할 수 있다. Lim과 Yim³은 에너지의 관점에서 다음과 같은 식을 제시하였다.

$$\left(\frac{4}{3}c\right)^2 \leq 2f^2\pi^2\omega^2 \sec^2 h\left(\frac{\pi\omega}{2}\right) + \sigma^2 \quad (8)$$

Simiu²는 교차이론을 이용하여 probability of failure의 관점에서 임계점을 제시하였다. 시간 T 동안 호모클리닉 분기가 한번 이상 일어날 확률을 p_T 라하고 멜니코프 과정의 평균이 분산보다 매우 크고 정상적(stationary)이며 D_outcrossing이 포와송 과정(Poisson process)을 따른다고 가정하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$p_T = 1 - e^{-\nu_n T} \quad (9)$$

$$\nu_D = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \phi\left(\frac{X-m}{\sigma}\right) \quad (10)$$

$$\phi(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \quad (11)$$

$$\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |F(\omega)|^2 S_w(\omega) d\omega \quad (12)$$

여기서 X 는 멜니코프 과정의 평균이라 할 수 있다. 시간 T 를 정의하고 임계확률 p 를 정의하면 $p_T > p$ 일 때 혼돈 운동이 일어나게 된다.

리아프노프 먹지수의 관점에서 살펴보면 리야푸노프 먹지수가 양수가 될 때 혼돈운동이 일어난다고 할 수 있으므로 평균적으로 0이 되는 임계점을 찾을 수 있다. 일반적으로 같은 계에서 주기적 운동의 먹지수와 혼돈 운동의 먹지수는 매개변수에 따라 조금씩 바뀌지만 대체적으로 비슷한 값을 가진다. 혼돈 운동의 먹지수를 λ_c 라하고 주기적 운동의 먹지수를 λ_p 라 할 때 λ 가 0이 되는 임계점을 다음과 같이 결정할 수 있다.

$$\frac{\frac{4}{3} c - \sqrt{2} f \pi \omega \sec h\left(\frac{\pi \omega}{2}\right)}{\sigma} \leq Z_c \quad (13)$$

$$P(Z \geq Z_c) = \frac{\lambda_p}{\lambda_c + \lambda_p}$$

Z 는 표준 정규 분포를 따르는 확률변수이다.

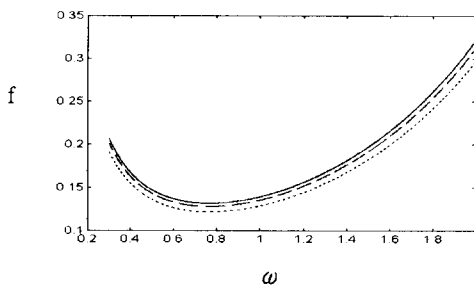


Figure 3. Critical force ($k=1$, $h=1$, $c=0.185$, solid line: $x=0$, dashed line: $x=0.01$ eq.(8) dotted line: $x=0.01$ eq.(13))

Fig. 3은 Lin과 Yim³이 제시한 식 (8)과 리야푸노프 먹지수의 관점에서 정의된 식 (13)에 의해 구

해진 혼돈 운동의 임계점, 그리고 잡음이 없는 경우에 구해진 임계점이다. 그러나 식 (6)에 의해 구해지는 분산의 값이 매우 작기 때문에 불규칙한 신호의 영향이 거의 없게 되고 잡음이 없는 상태에서의 임계점과 큰 차이가 없게 된다. 일반화된 멜니코프 과정의 의미는 불규칙한 가진이 혼돈운동을 야기할 확률을 가지고 있다는 것이다. 주기적 가진과 불규칙한 가진이 함께 작용하는 계에서의 혼돈 운동은 실제로 명확하게 정의하기가 어렵다. 이는 다음에 설명되는 리야프노프 먹지수의 관점에서 쉽게 이해할 수 있다.

3. 리야프노프 먹지수

리아프노프 먹지수 λ 는 서로 인접해 있는 두 궤적이 시간에 따라 멀어지거나 가까워지는 정도를 나타내는 값이다. 이것은 식 (1)의 적분을 통하여 수치적으로 구할 수 있다. Fig. 4, 5는 각각 결정론적 계와 확률적인 계에서 구한 값이다. 불규칙한 신호에 대한 시뮬레이션 방법은 Mannella와 Palleschi⁵가 제시한 방법을 사용하였다.

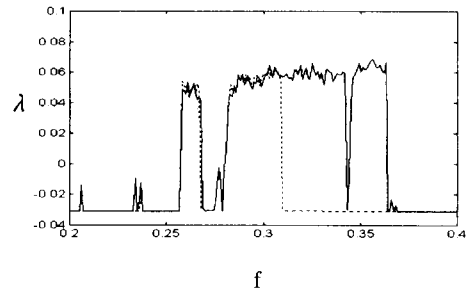


Figure 4. Lyapunov exponent ($k=1$, $h=1$, $c=0.185$, $\omega=1$, $x=0$)

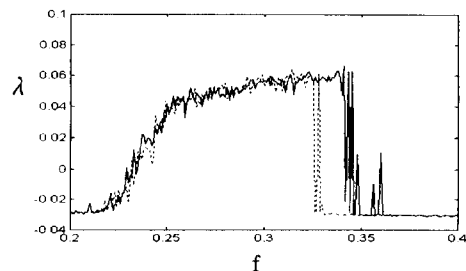


Figure 5. Lyapunov exponent ($k=1$, $h=1$, $c=0.185$, $\omega=1$, $x=0.001$)

Fig. 4를 보면 먹지수가 양(+)이 되는 임계점은 초기 조건에 관계없이 같지만 다시 주기적 반응으로 돌아오는 부분은 서로 다르다. 이것은 $f=0.31$ 부터 두 가지 끝개가 존재하며 하나는 주기적 운동이고 하나는 혼돈 운동이기 때문이다. Fig. 4와 Fig. 5에서 발견할 수 있는 두드러진 사실은 Fig. 4에 존재하는 주기적 창(periodic window)이 Fig. 5에는 없다는 것과 Fig. 4에서 λ 가 양수가 되는 것은 갑작스런 현상인데 반하여 Fig. 5에서는 서서히 커져가는 것을 볼 수 있다. 이 현상은 Bulsara, Schieve와 Jacobs¹의 논문에서 매끄러워짐 효과라 불려졌다. 혼돈 운동이 끝나는 부분에서 값을 보면 Fig. 4에서 두 개의 다른 초기 조건에 대하여 많은 차이를 보이는데 반해 Fig. 5에서는 서로 비슷해져 있음을 알 수 있다. 이것은 확률론적 관점에서 볼 때 확률 분포의 유일성과 에르고딕(ergodic) 성질에 의해 예상된 사실이며 실제로 시뮬레이션 시간을 ∞ 로 한다면 서로 같은 값을 가져야 하고 이 부분도 매끄러워짐 효과를 가지게 된다.

결정론적 계에서 λ 는 혼돈운동의 예측 불가능성(unpredictability)을 나타내는 값으로 양수일 때는 혼돈 운동으로 판단된다. 그리고 앞에서 언급한 바와 같이 λ 의 부호가 갑작스럽게 바뀌기 때문에 혼돈 운동과 주기적 운동의 구분이 쉽게 된다. 그러나 불규칙한 가진을 함께 받는 확률적인 계에서는 그 부호가 큰 의미가 없다. 이는 Fig. 6을 통해 알 수 있다. Fig. 6은 Fig. 5에서 초기 조건에 관계없이 λ 의 부호가 +인 부분에서의 위상 궤적과 프앙카레 맵이다. 그러나 혼돈 운동이라고 보기에 는 어려울 정도로 점프 현상이 일어나지 않는다. 이는 결정론적 계에서 주기적 운동과 혼돈 운동의 중간과정 또는 intermittency 현상과 유사하다. 불규칙 신호가 없는 경우의 혼돈 운동과 유사하게 보이는 정도의 점프 현상을 일으키는 부분은 $f=0.24$ 부터이며 이에 해당하는 위상궤적과 프앙카레 맵은 Fig. 7이다. 그러므로 불규칙 신호에 의해 야기되는 혼돈 운동은 그 존재가 확실하지만 결정론적 계에서 사용하는 정의를 그대로 사용하기에는 문제가 있다. λ 의 부호를 혼돈 운동과 주기적 운동의 결정 기준으로 사용하던 결정론적 계의 정의는 불규칙한 가진이 섞이면서 그 부호가 혼돈운동의 결정기준이 되기보다는 그 크기가 운동의 특성을

가늠하는 기준이 된다.

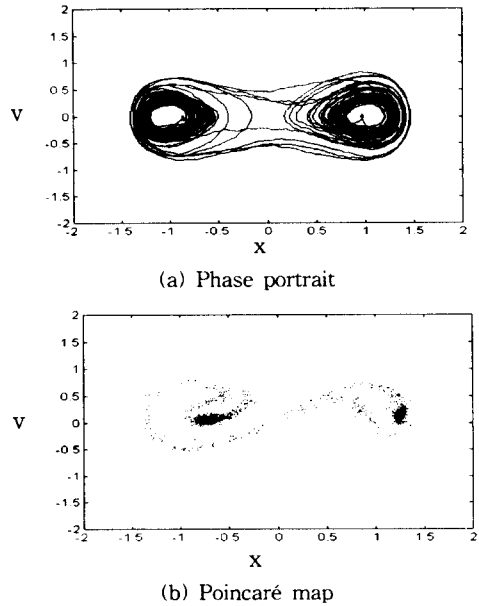


Figure 6. $k=1, h=1, c=0.185, f=0.236, x=0.001, \omega=1$

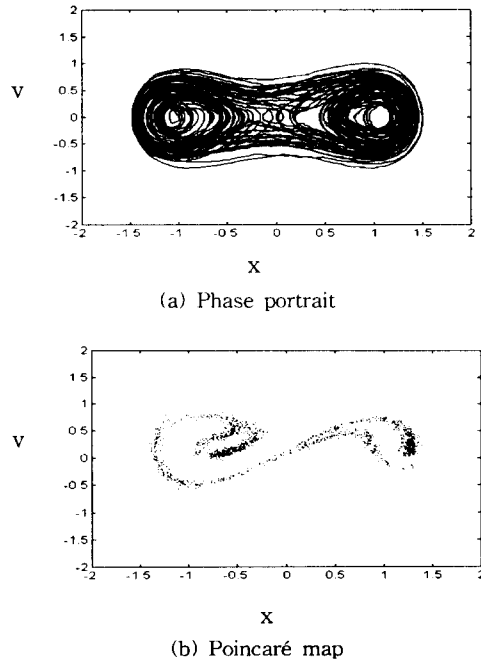


Figure 7. $k=1, h=1, c=0.185, f=0.250, x=0.001, \omega=1$

4. 확률 밀도 함수

본문에서 다루고 있는 식 (1)은 확률적인 미분 방정식으로 이를 이토(Itô) 형태의 확산(diffusion) 방정식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} dx &= v dt \\ dv &= (-cv + kx - hx^3 + f\cos(\omega t))dt + \sqrt{x} dB \end{aligned} \quad (14)$$

여기서 dB 는 평균이 0이고 분산이 dt 인 표준 비너(Wiener)과정이다. 이를 확률 밀도 함수(probability density function)에 관한 편미분 방정식인 포커 플랑크 방정식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(t, x, v)}{\partial t} &= - \frac{\partial v P(t, x, v)}{\partial x} \\ &\quad - \frac{\partial (-cv + kx - hx^3 + f\cos(\omega t))P(t, x, v)}{\partial v} \\ &\quad + \frac{x}{2} \frac{\partial^2 P(t, x, v)}{\partial v^2} \end{aligned} \quad (15)$$

이 편미분 방정식에 관한 해는 일반적으로 구해지지 않고 특수한 경우의 해만이 구해졌을 뿐이다. 특히 주기적 가진이 없는 경우의 정상 해는 식 (16)과 같음이 알려져 있고 Fig. 8에 나타나 있다.

$$P(x, v) = qe^{-\frac{2c}{x}(\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{4}hx^4)} \quad (16)$$

q 는 표준화(normalization) 상수이다.

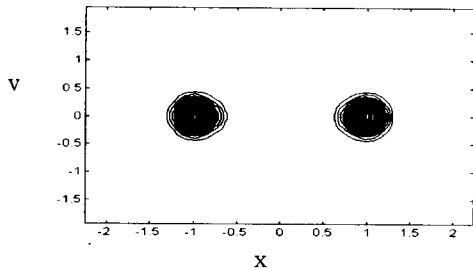


Figure 8. Stationary solution of pure random excitation ($k=1$, $h=1$, $c=0.185$, $\alpha=0.01$)

식 (15)의 비정상(transient) 해는 Bergman과 Spencer⁶에 의해 4 절점 사각형 유한요소로 구해진 바 있고 그 후에 Yi, Wojtkiewicz, Bergman, and Spencer⁷에 의해 무한요소를 사용하여 절단(truncation) 오차를 줄인 바 있다. 그러나 유한 요소법을 사용할 경우 방정식의 표류(drift)와 확산 특성에 의하여 비정상 해를 정확히 구하려면 매우 많은 요소를 사용해야 한다. 포커 플랑크 방정식을 유한 차분법에 의해 구하려는 시도 역시 많이 있었으나 유한 요소법이나 유한 차분법에 의한 해는 결정적으로 음의 확률 밀도 함수를 나타낼 수 있다는 단점을 가지고 있다. 포커 플랑크 방정식에 관한 또다른 접근 방법으로 경로 적분(path integral)방법이 있다. 이는 확률 밀도의 이동하는 성분과 확산하는 성분을 고려하여 구해지는 방법으로 다음과 같다.

$$\begin{aligned} P(t, x, v) &= \lim_{\tau, N, N_i \rightarrow 0, \infty, t-t_0} \prod_{i=0}^{N-1} \int \dots \int \\ &\quad \exp(-\tau \sum_{j=0}^{N-1} G(x_{i+1}, v_{i+1}, x_i, v_i, t_j; \tau)) \\ &\quad P(x_0, v_0, t_0) dx_i dv_i \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} G(x_{i+1}, v_{i+1}, t_j, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi x \tau}} \exp(-\frac{\tau}{2x} \\ &\quad (-c \frac{(bv_{i+1} + av_i)}{S} + k \frac{(bx_{i+1} + ax_i)}{S} \\ &\quad - h \frac{(bx_{i+1}^3 + ax_i^3)}{S} \\ &\quad + f \frac{bcos(\omega t_{j+1}) + acos(\omega t_j)}{S} \\ &\quad - \frac{(v_{i+1} - v_i)^2}{\tau}) \\ &\quad \delta(\frac{bv_{i+1} + av_i}{S} - \frac{x_{i+1} - x_i}{\tau}) \end{aligned} \quad (18)$$

이 식에서 a 와 b 는 전 상태(pre-state)와 후 상태(post-state)의 비중을 주는 상수이고 $a+b=S$ 이다. 수치적으로 식 (17)의 해를 구할 때에는 τ 를 유한한 크기로 하고 확률 평면을 유한요소로 나눈다. 본문에서는 한 요소에서의 확률밀도가 일정하다는 가정 하에 계산을 하였다. 그러면 다음과 같은 형태의 행렬식을 얻을 수 있다.

$$\tilde{P}_{t,-1} = A_j \tilde{P}_t, \quad (19)$$

\tilde{P} 는 각 요소에 해당하는 확률밀도의 벡터이며 A_j 는 확률 전달(propagator) 행렬이다. 이 행렬을 한 주기에 해당하는 개수만큼 곱하면 다음과 같이 프랑카레 맵의 단면(section)에 해당하는 확률밀도를 한번에 구할 수 있다.

$$\tilde{P}_{\frac{2(n+1)\pi}{\omega}} = B \tilde{P}_{\frac{2n\pi}{\omega}} \quad (20)$$

경로 적분법은 확률밀도가 항상 양수로 계산되고 한 주기 후의 확률밀도를 쉽게 구할 수 있는 장점이 있다.

경로 적분법을 사용하여 확률밀도함수의 수치적인 해를 구하는 방법은 Wehner와 Wolfer⁸가 1차원 문제에 대하여 정리한 바 있고 본문의 문제와 같은 2차원 문제에 대하여 Lin과 Yim³이 계산한 바 있다. Lin과 Yim³은 수치적으로 구한 해를 통해 잡음에 의해 야기된 혼돈운동을 보여주었으며 잡음의 크기에 따라 나타나는 확률밀도함수의 형태를 여러 가지로 명칭하였다. 그러나 잡음이 있는 경우 4에서 알아본 것처럼 주기적 운동과 혼돈 운동의 경계가 모호해지고 이를 구분하기가 어려워진다. 본문에서는 이 경계 부분에서의 확률밀도함수가 어떻게 변화해 가는지를 살펴본다.

확률 전달 행렬 B 가 구해지면 다음과 같은 고유치 문제가 구성될 수 있다.

$$\Lambda \tilde{P} = B \tilde{P} \quad (21)$$

여기서 Λ 는 고유치이며 일반적으로 λ 로 표기하지만 리압노프 멱지수와와의 혼동을 피하기 위하여 대문자로 표기하였다. 이 행렬식의 가장 큰 고유치에 해당하는 고유벡터가 정상 해를 말하는 것이며 주기적 운동과 혼돈 운동의 경우에 해당하는 첫 번째 모드는 Fig. 9, 10과 같다. 특히 Fig. 10을 통해 확률밀도함수가 혼돈운동의 프랑카레 맵과 유사함을 발견할 수 있다.

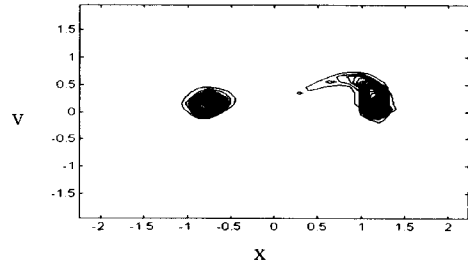


Figure 9. 1st mode($k=1$, $h=1$, $c=0.185$, $f=0.22$, $\chi=0.0005$, $\omega=1$)

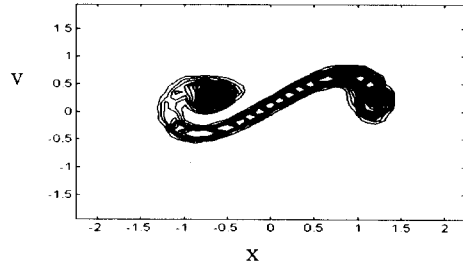


Figure 10. 1st mode($k=1$, $h=1$, $c=0.185$, $f=0.3$, $\chi=0.001$, $\omega=1$)

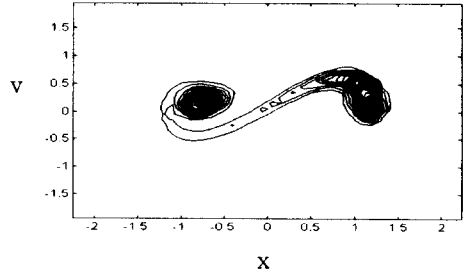


Figure 11. 1st mode($k=1$, $h=1$, $c=0.185$, $f=0.22$, $\chi=0.005$, $\omega=1$)

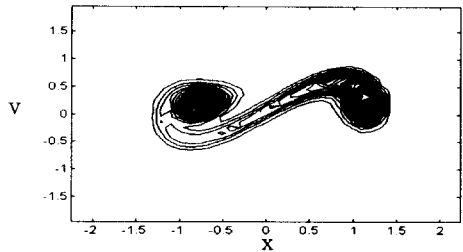


Figure 12. 1st mode($k=1$, $h=1$, $c=0.185$, $f=0.22$, $\chi=0.015$, $\omega=1$)

Fig. 9에서 보여진 것과 같은 크기의 주기적 가진에 x 를 더 크게 하여 얻어진 첫 번째 모드는 혼돈 운동의 것과 점점 유사하게 되며 Fig. 11, 12와 같다. 첫 번째 모드를 살펴봄으로서 정상상태에서의 확률밀도 함수를 통해 불규칙한 가진에 의한 주기적 운동에서 혼돈 운동으로의 변화를 확인할 수 있다. Fig. 11의 경우와 같이 두 고정점(fixed point)간의 점프를 의미하는 불안정한 다양체(unstable manifold)에 해당하는 부분의 확률밀도가 그리 크지 않을 것은 앞에서 언급하였던 것처럼 리야프노프 먹지수가 그 부호는 양을 가지고 있으나 크기가 작은 경우에 해당한다.

이제 두 번째 모드와 세 번째 모드를 살펴봄으로써 두 고정점 간의 점프 현상의 크기를 알아본다. Fig. 13과 14는 그림 (9)에 해당하는 두 번째 모드와 세 번째 모드이다. 그림에서 '-' 표시가 된 부분은 모드에서 음의 부분이고 '+' 표시가 된 부분은 양의 부분이다. 두 번째 모드는 첫 번째 모드와 함께 공존할 경우 한쪽 고정점에 확률밀도가 집중되어 있는 것을 의미한다. 첫 번째 모드와 두 번째 모드에 해당하는 고유치의 비율을 통해 한쪽 고정점에 확률밀도가 집중되어 있을 수 있는 시간의 길이를 알 수 있다. 이는 하나의 표본에서 양 고정점 간 점프 현상의 빈도를 알 수 있는 척도가 되고 두 번째 고유치의 비율이 커질수록 점프 현상의 빈도는 줄어드는 것이다. 세 번째 모드는 첫 번째 모드와 공존할 경우 양 고정점에 확률 밀도가 집중되어 있거나 불안정한 다양체에 확률이 집중되어 있는 것을 의미하므로 이 역시 첫 번째 고유치와의 비율을 통해 양 고정점에 확률이 집중되어 있을 수 있는 시간의 길이를 알 수 있다.

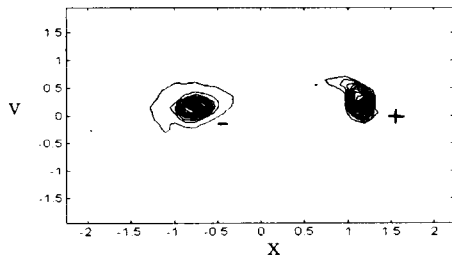


Figure 13. 2nd mode($k=1$, $h=1$, $c=0.185$, $f=0.22$, $x=0.0005$, $\omega=1$)

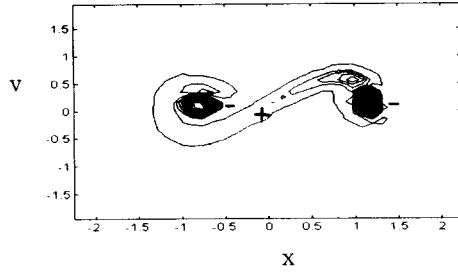


Figure 14. 3rd mode($k=1$, $h=1$, $c=0.185$, $f=0.22$, $x=0.0005$, $\omega=1$)

이는 고정점과 불안정한 다양체간의 상호 확률 밀도 교류의 크기를 알 수 있는 것으로 세 번째 고유치의 비율이 커질수록 양 고정점에 집중되어 있는 확률 밀도가 불안정한 다양체쪽으로 확산되지 않음을 의미한다. Table 1은 x 의 크기에 따라 첫 번째 고유치에 대한 두 번째, 세 번째 고유치의 비율을 기록한 것이다. Table 1의 마지막 줄에 해당하는 값은 주기적 가진으로도 혼돈운동을 일으키는 상태에 불규칙한 가진을 작은 크기로 가한 것이다. 첫 번째 모드에 대한 두 번째 세 번째 모드의 크기는 불규칙한 가진이 커짐에 따라 점점 작아지고 $x=0.015$ 에서 혼돈운동의 그것과 근사한 값을 가진다. 이로써 불규칙한 가진이 주기적 가진과 함께 작용하는 비선형 계에 대한 혼돈 운동의 크기를 확률 밀도 함수의 고유치의 관점에서 정의할 수 있다는 가능성을 발견할 수 있다.

Table 1. $k=1$, $h=1$, $c=0.185$, $\omega=1$

f	x	$\frac{\Lambda_2}{\Lambda_1}$	$\frac{\Lambda_3}{\Lambda_1}$
f=0.22	0.0005	0.92	0.50
f=0.22	0.005	0.82	0.34
f=0.22	0.01	0.75	0.25
f=0.22	0.015	0.67	0.19
f=0.3	0.001	0.63	0.14

결론

불규칙한 가진이 주기적 가진과 함께 작용하는

계의 동적 특성을 결정론적 관점과 확률적 관점에서 살펴보고 주기적 운동과 혼돈 운동의 혼합 현상을 관찰하였다. 리압노프 먹지수의 부호는 혼돈 운동의 판단 기준이 되기 어렵고 그 크기가 중요한 의미를 가지고 있음을 알았다. 본문의 전반에 걸쳐 혼돈운동의 판정 기준으로 양 고정점 간의 점프 현상에 중점을 두었으므로 이는 혼돈운동을 나타내는 결정론적 계에서 사용하는 개념들과는 차이를 가진다. 그러나 많은 연구 결과^{1,2,3}에서도 그랬듯이 불규칙한 잡음은 혼돈 운동을 야기하기에 충분한 근거를 가지고 있다. 그러므로 프랙탈 차원(dimension), 무질서도(entropy) 등과 같은 개념에서도 본 문제에 대한 연구를 시도해야 할 것이며 아울러 확률적인 관점에서 접근하고 있는 개념들 즉, 확률적 공진 현상 등의 방향에서도 많은 과제들이 남아 있다.

참고 문헌

- [1] A. R. Bulsara, E. W. Jacobs, "Noise Effect in a Nonlinear Dynamic System: The RF Superconducting Quantum Interference Device", Phys. Rev. A, Vol. 42, No. 8, 4614-4621, 1990
- [2] E. Simiu, "Melnikov Process for Stochastically Perturbed, Slowly Varying Oscillators: Application to a Model of Wind-Driven Coastal Current", ASME J. of Applied Mechanics, Vol.63, 429-435, 1996
- [3] H. Lin, S. C. S. Yim, "Analysis of a Nonlinear System Exhibiting Chaotic, Noisy Chaotic, and Random Behaviors", ASME J. of Applied Mechanics, Vol.63, 509-516, 1996
- [4] Wolfram JUST, "Dynamics of the Stochastic Duffing Oscillator in Gaussian Approximation", Physica D, Vol.40, 311-330, 1989
- [5] R. Mannella, V. Palleschi, "Fast and Precise Algorithm for Computer Simulation of Stochastic Differential Equation", Phys. Rev. A, Vol.40, No. 6, 3381-3386, 1989
- [6] B. F. Spencer Jr., L. A. Bergman, "On the Numerical Solution of the Fokker-Planck Equation for Nonlinear Stochastic Systems", Nonlinear Dynamics, Vol.4, 357-372, 1993
- [7] W. Yi, S. F. Wojtkiewicz, L. A. Bergman, B. F. Spencer Jr., "Application of Infinite Element Method to Solution of the Fokker-Planck Equation", Proceedings of the 10th ASCE engineering Mechanics Conference, Fort Lauderdale, Florida, May 19-22, 685-688, 1996
- [8] M. F. Wehner, W. G. Wolfer, "Numerical Evaluation of Path-Integral Solutions to Fokker-Planck Equations", Phys. Rev. A, Vol.27, No. 5, 2663-2670, 1983
- [9] V. Berdichevsky, M. Gitterman, "Stochastic Resonance in a Bistable Piecewise Potential: Analytical Solution", J. of Phys. A: Math. Gen., Vol.29, 447-452, 1996
- [10] M. A. Celia, W. G. Gray, "Numerical Methods for Differential Equations", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1992
- [11] T. T. Soong, M. Grigoriu, "Random Vibration of Mechanical and Structural Systems", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1993
- [12] F. C. Moon, "Chaotic Vibration", J. Wiley & Sons, New York, 1987
- [13] J. Guckenheimer, P. Holmes, "Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields", Springer-Verlag, New York, 1983