

집중 질량 및 관성모멘트를 갖는 회전하는 티모센코 보의 면외굽힘 진동

○ 박 정 훈*, 유 흥 희**

(Flapwise Bending Vibration of Rotating Timoshenko Beams
with Concentrated Mass and Mass Moment of Inertia)

Jung Hun Park and Hong Hee Yoo

ABSTRACT

A modeling method for the bending vibration analysis of rotating Timoshenko beams with concentrated mass and mass moment of inertia is presented. The shear and rotary inertia effects become critical for the accurate estimation of the natural frequencies and modeshapes as the slenderness ratio decreases. The effect of the concentrated mass and mass moment of inertia on the natural frequencies are also investigated with the modeling method.

1. 서론

회전운동을 하는 단순한 외팔보의 진동에 관한 연구는 1920년경 시작된 이래 많은 연구문헌들이⁽¹⁻³⁾ 등장하였다. 최근에는 더 복잡한 형태의 보의 진동해석들이 수행되어 왔는데 Hoa와⁽⁴⁾ Yoo는⁽⁵⁾ 끝단질량을 가진 회전 외팔보의 해석을 하였고, 최근 Kuo 등은⁽⁶⁾ 고정단의 변형효과와 보단면의 변화까지 고려한 해석결과를, Yokoyama와⁽⁷⁾ Shin 등은⁽⁸⁾ 티모센코 보에 대한 해석결과들을 발표하였다. 또 Abramovich와 Hamburger는⁽⁹⁾ 티모센코 보가 집중 질량만을 가질 경우의 해석결과를 발표했으며 Bhat는⁽¹⁰⁾ 회전에 의한 운동에너지 고려 오일러 보 가정에 근거하여 끝단 질량과 관성 모멘트를 고려한 해석결과를 발표하였다.

본 논문에서는 임의 지점의 집중질량뿐 아니라 관성모멘트도 고려할 수 있는 면외방향 진동방정식을 유도하고, 그 진동특성을 연구하는데 목적을 두었다. 본 논문에는 다음과 같은 고유한 연구결과들을 실고 있다. 첫째, 집중질량과 관성모멘트

가 외팔보의 자유단이 아닌 임의 위치에 존재할 경우에 대한 모델링을 제시하였다. 둘째, 회전시 집중 질량과 관성모멘트에 의한 강성변화를 명시적인 행렬로 제시하였다. 셋째, 전단 및 단면관성효과에 의해 면외방향 진동의 경우도 임계 각속도가 존재함을 보였다. 본 연구에서는 효율적 수치계산을 위해 Rayleigh-Ritz 가상모드 방법을 사용했으며, 보 고정단에서의 기하학적 경계조건을 만족시키고 직교성을 지니는 Polynomial들을 가상모드들로 사용하였다.

2. 진동방정식 유도

Fig. 1은 반경 r 인 강체축 A 에 고정되어 일정한 각속도 ω_3 로 회전하는 임의 위치에 집중 질량과 관성모멘트를 갖는 티모센코 보를 보여준다. 그림에서 \hat{a}_1 과 \hat{a}_3 는 축 A 에 부착된 서로 수직인 단위벡터들이며, x 는 O 점으로부터 변형전 보의 임의점 P_0 까지 거리를, a 는 변형전 집중 질량까지의 거리를 나타낸다. 변형전 임의점 P_0 는 변형후 P 로 이동하고 \vec{u} 는 점 P_0 로 부터 점 P 까지의 변위를 나타낸다. 그림중 확대된 부분은 P 점을 도심으로 갖는 보의 미소부분으로 기준틀 A 에 속

* 한양대학교 대학원

** 한양대학교 기계공학부

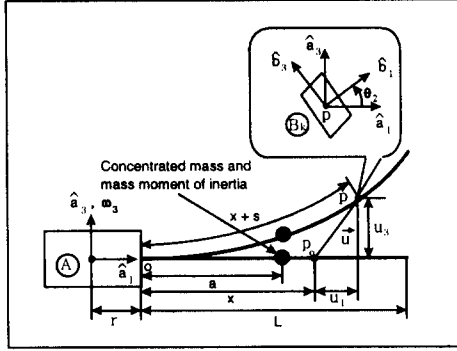


Fig. 1 Configuration of a Timoshenko beam with concentrated mass and mass moment of inertia attached to a rotating rigid hub

한 좌표계와 변형후 보 미소부분 B의 관계를 보여준다. 또 θ_2 는 A에 속한 좌표계와 B에 속한 좌표계의 단위벡터들 사이의 자세각을 나타낸다. 또 u_1 과 u_3 는 각각 \hat{a}_1 과 \hat{a}_3 방향 직교변위를 s 는 인장량을 나타낸다. 가상 모드법을 이용해 s, u_3, θ_2 를 다음과 같이 근사화 한다.

$$s = \sum_{i=1}^{\mu_1} \phi_{1i} q_{1i} \quad (1)$$

$$u_3 = \sum_{i=1}^{\mu_2} \phi_{2i} q_{2i} \quad (2)$$

$$\theta_2 = \sum_{i=1}^{\mu_3} \phi_{3i} q_{3i} \quad (3)$$

여기서 ϕ_{ij} 와 q_{ij} 는 각각 s, u_3, θ_2 를 나타내기 위한 가상 모드함수와 일반좌표들이며, μ_i 는 각각의 변위들을 위한 일반좌표수들이다. Fig. 1에서 강체 A가 회전축 \hat{a}_3 방향으로 일정각기 ω_3 로 회전할 경우 강체 A의 각속도, $\vec{\omega}^A$ 와 점 P의 속도, \vec{v}^P 는 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\vec{\omega}^A = \omega_3 \hat{a}_3 \quad (4)$$

$$\vec{v}^P = \dot{u}_1 \hat{a}_1 + \omega_3(r+x+u_1) \hat{a}_2 + \dot{u}_3 \hat{a}_3 \quad (5)$$

보의 미소요소 B의 각속도, $\vec{\omega}^B$ 는 각속도 덧셈정리를 이용하면 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\vec{\omega}^B = \dot{\theta}_2 \hat{a}_2 + \omega_3 \hat{a}_3 \quad (6)$$

미소 탄성체 B의 각속도와 점 P의 각속도는 식 (6)과 (5)를 시간에 대해 미분하여 구한다.

$$\vec{\alpha}^B = -\omega_3 \dot{\theta}_2 \hat{a}_1 + \ddot{\theta}_2 \hat{a}_2 \quad (7)$$

$$\vec{a}^P = [\ddot{u}_1 - \omega_3^2(r+x+u_1)] \hat{a}_1 + 2\omega_3 \dot{u}_1 \hat{a}_2 + \ddot{u}_3 \hat{a}_3 \quad (8)$$

\dot{q}_{ai} 를 일반속력으로 하면 \vec{v}^P 와 $\vec{\omega}^B$ 의 일반속력에 대한 편속도와 편각속도는 다음과 같다.

$$\frac{\partial \vec{v}^P}{\partial q_{1i}} = \phi_{1i} \hat{a}_1 \quad (9)$$

$$\frac{\partial \vec{v}^P}{\partial q_{2i}} = -\sum_{j=1}^{\mu_2} K_{ij}^{GC} q_{2j} \hat{a}_1 + \phi_{2i} \hat{a}_3 \quad (10)$$

$$\frac{\partial \vec{\omega}^B}{\partial q_{3i}} = \phi_{3i} \hat{a}_2 \quad (11)$$

여기서,

$$K_{ij}^{GC} \equiv \int_0^x \phi_{2i,x} \phi_{2j,x} dx \quad (12)$$

참고문헌 [8]과 [12]의 과정을 이용하여 집중질량과 질량 관성모멘트를 갖는 회전 Timoshenko의 팔보의 선형 운동방정식을 구하면 다음과 같다.

$$M_{ij}^{11} \ddot{q}_{1j} - (\omega_3^2 M_{ij}^{11} + K_{ij}^S) q_{1j} - r \omega_3^2 P_{1i} - \omega_3^2 Q_{1i} = 0 \quad (13)$$

$$M_{ij}^{22} \ddot{q}_{2j} + (K_{ij}^{G22} + \omega_3^2 r K_{ij}^{G1} + \omega_3^2 K_{ij}^{G2}) q_{2j} - K_{ij}^{G23} q_{3j} = 0 \quad (14)$$

$$M_{ij}^{33} \ddot{q}_{3j} - K_{ij}^{G32} q_{2j} + (K_{ij}^{E33} + K_{ij}^{G33}) q_{3j} = 0 \quad (15)$$

식 (13), (14), 그리고 (15)는 각각 보의 인장, 면외 굽힘, 그리고 단면관성 방향에 대한 운동방정식을 나타내고 여기서 사용된 행렬들의 요소는 다음과 같이 정의된다.

$$M_{ij}^{bb} \equiv \int_0^L \rho \phi_{bi} \phi_{bj} dx \quad (b=1,2) \quad (16)$$

$$M_{ij}^{33} \equiv \int_0^L I_{22} \phi_{3i} \phi_{3j} dx \quad (17)$$

$$K_{ij}^S \equiv \int_0^L EA \phi_{1i,x} \phi_{1j,x} dx \quad (18)$$

$$K_{ij}^{E33} \equiv \int_0^L EI_2 \phi_{3i,x} \phi_{3j,x} dx \quad (19)$$

$$K_{ij}^{G22} \equiv \int_0^L xGA \phi_{2i,x} \phi_{2j,x} dx \quad (20)$$

$$K_{ij}^{G23} \equiv \int_0^L xGA \phi_{2i,x} \phi_{3j} dx \quad (21)$$

$$K_{ij}^{G32} \equiv \int_0^L xGA \phi_{3i} \phi_{2j,x} dx \quad (22)$$

$$K_{ij}^{G33} \equiv \int_0^L xGA \phi_{3i} \phi_{3j} dx \quad (23)$$

$$K_{ij}^{G1} \equiv \int_0^L \rho(L-x) \phi_{2i,x} \phi_{2j,x} dx \quad (24)$$

$$K_{ij}^{G2} \equiv \frac{1}{2} \int_0^L \rho(L^2 - x^2) \phi_{2i,x} \phi_{2j,x} dx \quad (25)$$

$$P_{1i} \equiv \int_0^L \rho \phi_{1i} dx \quad (26)$$

$$Q_{1i} \equiv \int_0^L \rho x \phi_{1i} dx \quad (27)$$

$$I_{22}^{(b)} \equiv \frac{\rho}{A} I_2 \quad (28)$$

위 식들에서 E, G, A, I_2 , 그리고 x 는 각각 보의 영계수, 전단계수, 보의 단면적, 보 단면의 면외 방향 면적 모멘트, 그리고 단면 형상계수를 나타내

며 ρ 와 I_{22} 는 보의 단위길이당 질량과 미소요소 B 의 단위길이당 관성모멘트를 나타낸다. 보 임의 지점 $x=a$ 에 부가된 집중질량과 관성모멘트를 고려하기 위해서 ρ 와 I_{22} 는 충격함수 $\delta(x-a)$ 를 이용해 다음과 같이 모델링하였다.

$$\rho(x) = \rho^* + m_r \delta(x-a) \quad (29)$$

$$I_{22}(x) = I_{22}^* + m_r R_g^2 \delta(x-a) \quad (30)$$

위의 두식에서 ρ^* 와 I_{22}^* 는 각각 집중질량이 없는 보의 단위길이당 질량과 미소요소 B 의 관성모멘트를 의미하며 m_r 과 R_g 는 각각 집중질량의 크기와 관성반경을 나타낸다. 따라서 진동 해석을 위한 질량 및 강성행렬 요소중 ρ 와 I_{22} 에 관련된 항들은 다음과 같이 계산된다.

$$M_{ij}^{bb} = \int_0^L \rho \phi_{bi} \phi_{bj} dx = M_{ij}^{bb*} + m_r \phi_{bi}(a) \phi_{bj}(a) \quad (31)$$

$$M_{ij}^{33} = \int_0^L I_{22} \phi_{3i} \phi_{3j} dx = M_{ij}^{33*} + m_r R_g^2 \phi_{3i}(a) \phi_{3j}(a) \quad (32)$$

$$K_{ij}^{G1} = K_{ij}^{G1*} + \int_0^a \phi_{2i,x} \phi_{2j,x} dx \quad (33)$$

$$K_{ij}^{G2} = K_{ij}^{G2*} + a \int_0^a \phi_{2i,x} \phi_{2j,x} dx \quad (34)$$

여기서 M_{ij}^{bb*} , K_{ij}^{G1*} , K_{ij}^{G2*} 는 각각 식 (16), (24), (25)에 ρ 대신 ρ^* 를 대입한 값을 의미하며 M_{ij}^{33*} 는 식 (17)에서 I_{22} 대신 I_{22}^* 를 대입한 값을 의미한다. 식 (13), (14), (15)에서 인장방향과의 연성효과를 무시한 면외방향 굽힘진동 방정식은 다음과 같다.

$$M_{ij}^{22} \ddot{q}_{2j} + (K_{ij}^{G22} + \omega_2^2 r K_{ij}^{G1} + \omega_2^2 K_{ij}^{G2}) q_{2j} - K_{ij}^{G23} q_{3j} = 0 \quad (35)$$

$$M_{ij}^{33} \ddot{q}_{3j} - K_{ij}^{G32} q_{2j} + (K_{ij}^{E33} + K_{ij}^{G33}) q_{3j} = 0 \quad (36)$$

식 (35)와 (36)을 무차원화된 진동방정식으로 변환시키기 위해 다음 같이 무차원수들을 정의 한다.

$$\zeta = \frac{x}{L} \quad (37)$$

$$\delta^* = \frac{r}{L} \quad (38)$$

$$\pi = \frac{a}{L} \quad (39)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{AL^2}{I_2}} \quad (40)$$

$$\beta = \frac{m_r}{\rho L} \quad (41)$$

$$\gamma = T \omega_3 \quad (42)$$

$$\eta = \frac{R_g}{L} \quad (43)$$

$$\epsilon = \frac{G}{E} = \frac{1}{2(1+\nu)} \quad (44)$$

$$\vartheta_{ai} = \frac{q_{ai}}{L} \quad (45)$$

그리고

$$T = \left(\frac{\rho^* L^4}{EI_3} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (46)$$

식 (37)-(45)에서 정의한 무차원변수들을 이용하여 식 (35)와 (36)의 무차원화된 방정식을 구하면

$$\begin{bmatrix} \overline{M}^{22} & 0 \\ 0 & \overline{M}^{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vartheta_2 \\ \vartheta_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{K}^{22} & \overline{K}^{23} \\ \overline{K}^{32} & \overline{K}^{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vartheta_2 \\ \vartheta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (47)$$

여기서,

$$\overline{M}_{ij}^{22} = \overline{M}_{ij}^{22*} + \beta \psi_{2i}(\pi) \psi_{2j}(\pi) \quad (48)$$

$$\overline{M}_{ij}^{33} = \frac{1}{\alpha^2} \overline{M}_{ij}^{33*} + \beta \eta^2 \psi_{3i}(\pi) \psi_{3j}(\pi) \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \overline{K}_{ij}^{22} &= \delta^* \gamma^2 \left(\overline{K}_{ij}^{G1} + \beta \int_0^\pi \phi_{2i,\zeta} \phi_{2j,\zeta} d\zeta \right) \\ &+ \gamma^2 \left(\overline{K}_{ij}^{G2} + \beta \pi \int_0^\pi \phi_{2i,\zeta} \psi_{2j,\zeta} d\zeta \right) + \epsilon \alpha^2 \overline{K}_{ij}^{G22} \end{aligned} \quad (50)$$

$$\overline{K}_{ij}^{23} = -\epsilon \alpha^2 \overline{K}_{ij}^{G23} \quad (51)$$

$$\overline{K}_{ij}^{32} = -\epsilon \alpha^2 \overline{K}_{ij}^{G32} \quad (52)$$

$$\overline{K}_{ij}^{33} = \epsilon \alpha^2 \overline{K}_{ij}^{G33} + \overline{K}_{ij}^{E33} \quad (53)$$

위식에서 \overline{M}^{ab} 와 \overline{K}^{ab} ($a=1,2, b=1,2$)는 각각 관성행렬과 강성행렬의 부행렬로서 (submatrix) 여기에 사용된 행렬들의 요소는 다음과 같다.

$$\overline{M}_{ij}^{22*} = \int_0^1 \phi_{2i} \phi_{2j} d\zeta \quad (54)$$

$$\overline{M}_{ij}^{33*} = \int_0^1 \phi_{3i} \phi_{3j} d\zeta \quad (55)$$

$$\overline{K}_{ij}^{G1*} = \int_0^1 (1-\zeta) \phi_{2i,\zeta} \phi_{2j,\zeta} d\zeta \quad (56)$$

$$\overline{K}_{ij}^{G2*} = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-\zeta^2) \phi_{2i,\zeta} \phi_{2j,\zeta} d\zeta \quad (57)$$

$$\overline{K}_{ij}^{G22*} = \int_0^1 x \phi_{2i,\zeta} \phi_{2j,\zeta} d\zeta \quad (58)$$

$$\overline{K}_{ij}^{G23*} = \int_0^1 x \phi_{2i,\zeta} \phi_{3j,\zeta} d\zeta \quad (59)$$

$$\overline{K}_{ij}^{G32*} = \int_0^1 x \phi_{3i,\zeta} \phi_{2j,\zeta} d\zeta \quad (60)$$

$$\overline{K}_{ij}^{E33*} = \int_0^1 \phi_{3i,\zeta} \phi_{3j,\zeta} d\zeta \quad (61)$$

식 (47)에서 ϑ_{2j} 와 ϑ_{3j} 로 구성된 벡터를 $\underline{\vartheta}$ 라 하고 이 벡터가 시간에 대해 조화함수라면

$$\underline{\vartheta} = e^{i\omega t} \underline{\Theta} \quad (62)$$

여기서 ω 는 고유진동수에 T 를 곱한 무차원 변수이며 $\underline{\Theta}$ 는 각 모드형상을 대표하는 벡터이다. 식 (62)를 이용 식 (47)은 다음같이 표현한다.

$$\omega^2 \underline{M} \underline{\Theta} = \underline{K} \underline{\Theta} \quad (63)$$

여기서 \underline{M} 과 \underline{K} 는 대칭행렬들로 다음과 같다.

Table 1 Convergence of Natural frequencies ; ($\gamma=10.0$, $\alpha=10.0$, $\delta=1.0$, $\beta=1.0$, $\eta=0.1$, $\varepsilon=0.385$, $x=0.85$, $\pi=1.0$)

	1 st	2 nd	3 rd	4 th	5 th
1	14.657	30.241	*****	*****	*****
2	14.566	23.693	60.546	65.902	*****
3	14.527	22.606	58.558	65.248	88.382
4	14.527	22.457	57.918	65.007	87.989
5	14.526	22.446	57.888	64.993	86.129
6	14.526	22.445	57.888	64.992	86.086
7	14.526	22.445	57.888	64.992	86.060
8	14.526	22.445	57.888	64.992	86.060

$$M \equiv \begin{bmatrix} \bar{M}^{22} & 0 \\ 0 & \bar{M}^{33} \end{bmatrix} \quad (64)$$

$$K \equiv \begin{bmatrix} \bar{K}^{22} & \bar{K}^{23} \\ \bar{K}^{32} & \bar{K}^{33} \end{bmatrix} \quad (65)$$

3. 수치해석결과

Table 1은 해석에 사용된 모드수의 증가에 따른 고유진동수의 수렴을 보여준다. 이 결과는 굽힘방향 변위와 탄성축 기울기의 모드수가 각각 8개일 때 가장 낮은 5개의 고유진동수가 수렴함을 보여준다. 모드수가 각각 7개일 때와 8개일 때 고유진동수를 수치적으로 비교하면 소수점 3째 자리까지 잘 일치함을 알 수 있는데 본 연구에서는 이를 충분한 수렴으로 간주하고 이후 항상 각각 8개의 모드를 사용해 해석을 수행하였다. Table 2는 본 연구에서 구해진 해석결과들의 정확성을 검증하기 위해 회전이 없는 경우인 참고문헌 [10]의 결과와 비교하였다. 이 결과는 서로 오차가 약 0.09% 이내에서 잘 일치하고 있다. Table 3은 보가 회전하는 경우 보의 세장비 α 에 따른 참고문헌 [10]의 오일러보 이론에 의한 결과와의 비교를 보여준다. α 가 커짐에 따라 본 연구의 결과는 참고문헌의 결과에 접근하고 있음을 알 수 있다. 이후의 해석 결과를 얻기 위해서 ε 의 값은 포아송비가 0.3일 때의 값 0.385를 단면형상계수 x 는 직사각형단면에

Table 2 Comparison of Natural frequencies ; ($\gamma=0.0$, $\alpha=50.0$, $\beta=1.0$, $\eta=0.5$, $\varepsilon=0.375$, $x=0.85$, $\pi=1.0$)

	present	ref. [9]
1 st	1.27	1.27
2 nd	4.53	4.53
3 rd	23.32	23.32
4 th	58.29	58.24

Table 3 Comparison of Natural frequencies ; ($\gamma=10.0$, $\delta=1.0$, $\beta=1.0$, $\eta=1.0$, $\varepsilon=0.385$, $x=0.85$, $\pi=1.0$)

	α	1 st	2 nd	3 rd
ref. [10]	**	3.783	15.489	65.165
present	10	2.307	14.819	57.524
	20	2.994	15.062	60.493
	30	3.319	15.210	62.158
	40	3.486	15.298	63.134
	50	3.580	15.353	63.726
	60	3.636	15.388	64.102
	70	3.672	15.411	64.351
	80	3.696	15.428	64.524
	90	3.714	15.439	64.648
	100	3.726	15.448	64.740

대한 값인 0.85를 사용했다. Fig. 2는 $\beta=1.0$, $\eta=1.0$, $\delta=1.0$, $\pi=1.0$ 에 대해 세장비 α 가 각각 20, 100 그리고 Euler 보에 대한 가장 낮은 세 고유진동수의 변화를 나타낸다. 세 경우 모두 회전각속도의 증가에 따른 고유진동수의 증가를 보여주는 데, 오일러 보이론이 티모센코 보이론보다 큰 결과를 제공하고 두 이론은 1차보다 2차이상의 고유진동수에서 상당한 차이를 보이고 회전각속도의 증가에 따라 그 차이가 더 증가함을 알 수 있다. 또 세장비 α 가 작을수록 오일러보 이론에 의한 결과와의 차이가 커짐을 알 수 있다. Fig. 3은 $\alpha=20$, $\eta=0.0$, $\delta=1.0$, $\pi=1.0$ 일 때 면의 굽힘 진동의 가장 낮은 세 무차원 고유진동수를 보여준다. 직관적으로 알 수 있듯이 β 의 증가는 저속의 회전에서는 고유진동수의 감소를 초래하나 일정 회전각속도 이상에서는 원심력에 의한 강성항의 증가로 인해 집중질량을 가지는 보가 집중질량을 가지지 않는 보보다 고유진동수 증가율이 커지게 됨을 알 수

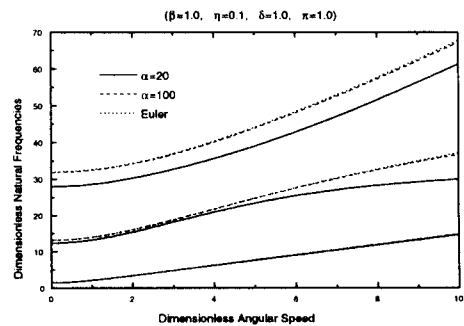


Fig. 2 Natural frequency variation vs. angular speed

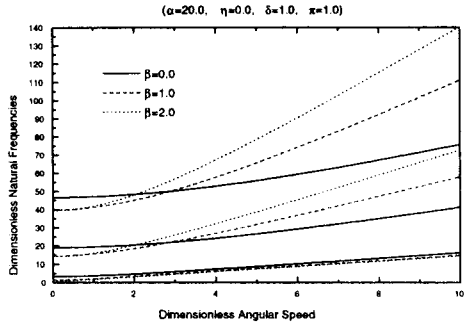


Fig. 3 Natural frequency variation vs. angular speed

있다. Fig. 4는 관성반경비에 따른 무차원 고유진동수의 변화를 나타낸다. 관성모멘트는 $(= m, R_g^2)$ 회전속도에 상관없이 관성항만을 증가시키므로 관성모멘트를 고려할 경우는 않는 경우에 비해 고유진동수가 낮음을 알 수 있다. Table 4는 무차원 관성반경비와 세장비에 따른 임계각속도 변화를 보여준다. 단순한 회전외팔보의 면외방향 임계각속도는 존재하지 않는 것으로 알려져 있다 (참고문헌 [14]참조). 하지만 관성모멘트는 관성항을 증가시키는 역할을 하고 티모센코 보는 오일러 보에 비해 낮은 고유진동수를 예측하기 때문에 회전각속도와 일치하는 고유진동수가 존재할 수 있다. 해석결과로 부터 세장비가 작고 관성반경비가 클수록 임계각속도는 낮아짐을 알 수 있다. Fig. 5는 집중질량의 위치변화와 β , η , γ 에 따른 첫 번째 무차원 고유진동수 값을 나타내고 있다. 보가 회전하지 않는 경우는 집중질량이 자유단으로 이동할수록 고유진동수가 감소하나 회전할

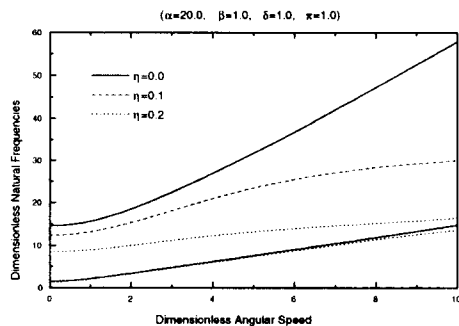


Fig. 4 Natural frequency variation vs. angular speed

Table 4 Critical angular speed vs. η and α ; ($\delta=1.0$, $\beta=1.0$, $\pi=1.0$)

η	Euler	$\alpha=20$	$\alpha=100$	$\alpha=200$
0.00	*****	230.668	*****	*****
0.05	*****	65.887	150.771	233.162
0.10	*****	33.095	71.172	103.149
0.15	82.223	21.698	43.178	55.775
0.20	35.715	15.845	28.636	33.032
0.25	22.265	12.236	19.951	21.544
0.30	15.324	9.765	14.433	15.068

경우는 집중질량이 자유단쪽으로 이동함에 따라 적절한 위치까지는 고유진동수가 증가하는 것을 관찰할 수 있다. 이 현상은 회전시 집중질량에 의한 강성증가가 관성증가보다 크기 때문에 나타나는 현상이라 할 수 있다. 그러나 집중질량이 자유단에 가까이 가면 다시 관성효과가 강성효과보다 커져서 고유진동수가 감소한다. 관성모멘트는 관성항만을 증가시키므로 고유진동수를 감소시키므로 집중질량을 적절한 위치에 둘 경우 그 감소폭은 최대가 됨을 알 수 있다. Fig. 6은 $\alpha=20$, $\beta=1.0$, $\eta=0.1$, $\delta=1.0$, $\pi=1.0$, $\gamma=10.0$ 일 때 오일러 모이론과 티모센코 보이론에 의해 구해진 가장 낮은 세 모드형상 차이를 보여주고 있다. 특히 첫 번째와 세 번째 모드의 경우 형상 변화가 크게 일어남을 알 수 있다.

4. 결론

본 논문에는 보상의 임의의 지점에 집중질량과 관성모멘트를 갖는 회전하는 티모센코 외팔보의 면외방향 진동해석을 위한 모델링이 제시되었다. 이 모델링은 집중질량과 관성모멘트를 고려하기

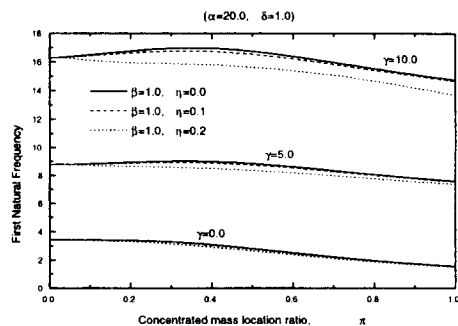
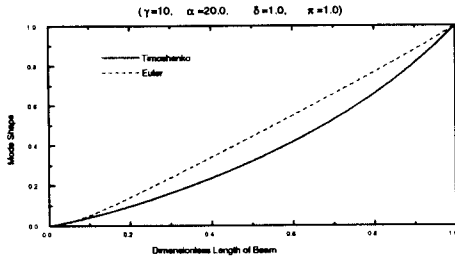
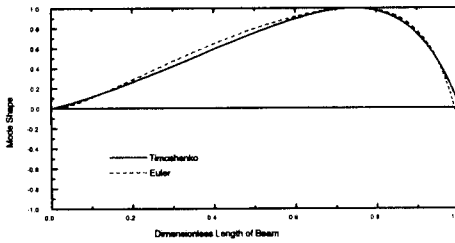


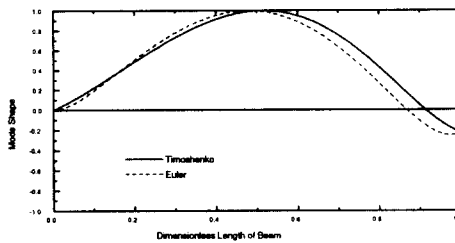
Fig. 5 Concentrated mass location effect on the first Natural frequencies



(a) First mode shape variation



(b) Second mode shape variation



(c) Third mode shape variation

Fig. 6 Variations of first three mode shapes

위해 보의 단위길이당 질량과 관성모멘트를 충격 함수로 이상화하였으며 다른 연구결과와 비교하여 유도된 모델링의 정확성을 규명하였다. 본 연구에서 제시된 해석모델링은 집중질량의 위치에 상관없이 회전하는 외팔보의 진동특성 해석을 끝단질량, 회전각속도, 축반경 크기의 변화에 따라 효과적으로 수행할 수 있다는 특성을 갖는다.

참고문헌

(1) Southwell, R. and Gough, F., 1921, "The Free Transverse Vibration of Airscrew Blades," British A.R.C. Reports and Memoranda No. 766.
 (2) Schilhansl, M., 1958, "Bending Frequency of a Rotating Cantilever Beam," *J. of Appl. Mech. Trans. Am. Soc. Mech. Engrs*, 25, pp. 28-30.

(3) Putter, S. and Manor, H., 1978, "Natural Frequencies of Radial Rotating Beams," *J. Sound and Vibration*, 56, pp. 175-185.
 (4) Hoa, S., 1979, "Vibration of a rotating beam with Tip Mass," *J. Sound and Vibration*, 67, pp. 369-381.
 (5) 유홍희, 1996, "집중질량의 영향을 고려한 회전 외팔보의 진동해석," 대한기계학회논문집, 제 20권, 제 8호, pp. 2516-2523.
 (6) Kuo, Y. H., Wu, T. H., Lee, S. Y., 1994, "Bending Vibration of a Rotating Non-uniform Beam with Tip Mass and an Elastically Restrained Root," *Computer & Structure*, Vol.22, No.2, pp. 229-236.
 (7) Yokoyama, T., 1988, "Free Vibration Characteristics of Rotating Timoshenko Beams," *Int. J. of Mech. Sci.*, Vol.30, No.10, pp. 743-755.
 (8) 신상하, 유홍희, 1996, "전단 및 단면 관성효과를 고려한 회전외팔보의 모델링 및 진동해석," 한국소음진동공학회지, 제 6권, 제 2호, pp. 179-186
 (9) M. Abramovich and O. Hamburger, 1991, "Vibration of a cantilever Timoshenko beam with a tip mass", *J. of sound and vibration*, vol. 148, No. 1, pp.162-170.
 (10) Bhat, R., 1986, "Transverse Vibrations of a Rotating Uniform Cantilever Beam with Tip Mass as Predicted by Using Beam Characteristic Orthogonal Polynomials in the Rayleigh-Ritz Method", *J. Sound and Vibration*, 105(2), pp. 199-210
 (11) Yoo, H., Ryan, R., and Scott, R., 1995, "Dynamics of Flexible Beams Undergoing Overall Motions," *J. of Sound and Vibration*, 181(2), pp. 261-278.
 (12) 유홍희, 1991, "회전 구조물의 복합 변형변수를 이용한 선형 동적 모델링", 한국항공우주학회지, 제 19권, 제3호, pp.32-39
 (13) 신상하, 유홍희, 1996, "인장-굽힘 운동간 연성 효과를 고려한 회전 외팔보의 진동해석," 한국항공우주학회지, 제 24권, 제 2호, pp. 77-84.
 (14) 유홍희, 1994, "회전 외팔보의 면외방향 굽힘 진동해석," 대한기계학회논문집, 제 19권, 제 2호, pp. 348-353.