

Rotor Dynamics의 현황과 문제점

김 폴 영일 (Paul Y. Kim)

Visiting Research Scientist (Brain Pool)

한국 기계연구원 / 한국 표준 과학 연구원

회전체 연구실 / 음향 진동 연구실

I. 서론

Rotor Dynamics는 1869년에 Rankine이 현재까지 알려진 바로는 최초로 Rotor Dynamics에 관한 논문을 The Engineer에 발표한 이래, 괄목할 만한 발전을 해왔고, 한 때에는 이 분야의 논문들이 일년에 기 백편씩 발표되었던 적도 있었다. 아직까지도 매년 많은 논문들이 발표되고 있으며, 이 분야에서의 연구가 활발하게 진행되고 있다고 본다. Rotor Dynamics 분야의 논문들이 너무 많아서, 아마도 이 분야에서의 문헌들을 전부 수집하기에는 불가능에 가깝지 않은가 생각한다. 필자도 Rotor Dynamics에 대해 크게 매료되어 한번 철저히 공부해 보고자, 이 분야의 진귀한 초기 문헌들을 완벽하게 소장하려고 노력해왔으나 그 양의 방대함에 무척 놀라고 있다. 이처럼 한 분야에 약 130년에 걸쳐 이처럼 수 많은 과학자들이 참여하여 계속 연구되는 분야도 그리 많지 않으리라고 생각된다.

이처럼 방대한 양의 문헌/연구가 축적되어 있기 때문인지는 모르겠으나, 요즘은 한국 내에서 뿐만 아니라 국외에서까지도, “Rotor Dynamics에는 거의 모든 해석이 끝나 있어서, 별로 연구할 대과제가 없다”고 생각하는 과학자들을 가끔 접하게 된다. 이것이 사실인가에 대한 정답은 존재하지 않을 수도, 혹은 여러 가지가 있을 수도 있다.

필자가 이 presentation/소고(小考)에서 “...의 현황과 문제점”이란 거창한 title을 내걸었지만 전반적이고 완전무결한 현황과 문제점을 전부 다 빠짐없이 밝히고자 함은 물론 아니고, 또 필자의 부족한 능력과 짧은 지식으로써는 가능한 일이라고도 생각지 않는다. 따라서 이 소고(小考)에서는 부족하나마 필자의 사견(私見)에 입각한 단편적이고도, 또 극히 국부적인 현상 몇 가지를 한데 묶어, 그 현황과 문제점을 함께 지적하고 토론함으로써 작은 지표를 제시하고 다 같이 자성의 기회를 찾는 데에서 그 소임을 대신하고자 한다.

이 서론에 대한 용두사미가 될 지 모르나, 필자는 수시로 아래와 같은, 정답이 무엇인지도 모를 무거운 질문을 필자 자신에게 던지곤 했으며 이 소고(小考)를

작성할 때도 이러한 자문(自問)의 자세로 임하고자 노력했음을 고백한다: 필자를 포함한 우리 Rotor Dynamics 학도(學徒)들이 과거 문헌들을 부지런히 추적하고, 올바르게 공부/이해하고 있으며, 또 이를 올바르게 전파하고 있는가? 과연 우리들은 성공하고 있는가? 실패하고 있는가? 우리는 “무엇을 모르는지”를 알고 있는가? 현재 우리들의 해석(解析) 방법/그 방향이 완전 무결한 것인가? 완전무결하지 않다면 구체적으로 어떤 점에서 인가? 현재 우리들은 조국의 현장 산업 발전에 참으로 부응/공헌하고 있는가? 더 잘 할 수는 없는가? 있다면 무엇인가? 산업 현장에서 필요한 것은 무엇인가? 과연 조국의 현장 산업 발전은 무엇을 기대/필요로 하고 있는가? 우리는 그것을 진정한 의미에서 알고 있는가? 알고 있는지에 대한 탐지/평가 방법 및 그 justification은 무엇인가?

II. Rotor Dynamics에서의 Quotes & Misquotes /역사 바로 세우기

필자의 문헌 추적에 큰 과오가 없다면, 아마도 Rankine만큼 Rotor Dynamics 식자(識者)들간에 확실한 “근거 제시” 없이 misquote되는 사람은 없으리라 생각된다.

약 6~7년 전에 있었던 일이다. 유럽에서 명망이 꽤 높은 Rotor Dynamics의 한 학자가 필자가 근무하고 있던 NRC(National Research Council Canada)를 방문했다. 마침 필자가 UBC(University of British Columbia)의 기계공학과 초빙교수로 겸직을 하고 있었으므로, 그를 NRC와 UBC 공동 세미나의 강사로 초대해서 그의 연구사업 현황을 듣기로 했다. 그 자리에서 그 학자가 “...Rankine이 1869년도에 Coriolis acceleration을 빠뜨리고 이론 전개를 했기 때문에 그 오류가 아직까지도...”라고 당당하게 설명을 하길래, 나중에 조용해졌을 때 필자가 던지시 그에게 말한 적이 있다. “G 교수, 나도 Rankine의 paper를 수집해서 자세히 읽어 봤는데 G교수가 말하던 Coriolis acceleration을 빠뜨렸다든지, 혹은 그 비슷한 실수도 찾아 볼 수 없었고, 제가 검산해 본 결과로는 그분의 analysis는 올바르고, 최근에 출판된 교과서에도 그분의 결과와 똑 같은 수치가 나와 있습니다. 혹시 Rankine의 paper가 여러 가지라서 내가 읽은 Rankine의 paper와 G교수가 읽은 Rankine의 paper가 서로 다른 모양이니, 그렇다면 G교수가 가진 그 Rankine의 paper의 복사본을 하나 얻읍시다. 거기에 필요한 수수료, 우편료, 등... 일체의 경비를 지불할 테니...”라고 했다. 그랬더니 그 G교수가 하는 말이 “Paul, 미안하오. 저는 사실 Rankine의 paper를 읽어 본 적이 없소이다. 청컨대, Paul이 가지고 있는 그 paper 한 copy를 줌 얻읍시다.”라고 해서 그 자리에서 당장 Rankine의 paper를 copy해 주어 보낸 적이 있다.

이처럼 Rankine은 수 많은 식자들 간에 직접 혹은 간접적으로 도처에서 misquote를 당하고 또 많은 blame을 받고 있다. 차제에, 최소한 대한민국의 Rotor Dynamics 학도(學徒)들은 근거가 확실하지 않는 misquote들에 휩쓸리는

일이 없기를 간절히 바라는 마음에서 다음의 몇 가지 필자의 조사 결과를 바치고자 한다.

실제로 문헌/저서에 나타난 misquote나 blame의 예를 몇 개 들어 본다면:

Gunter [1965]: "... The concept of indifferent equilibrium was formulated by Rankine in 1869 in the first recorded article on rotor dynamics and has persisted to this date. Rankine examined ... and concluded that the motion is stable below the first critical speed, neutral or in "indifferent" equilibrium at the critical speed, and unstable above this speed."

Rieger and Crofoot [1977]: "The critical speeds of a uniform elastic shaft were first investigated by Rankine [1] in 1869, who devised the term 'critical speed' ..."

Rieger [1986]: "... Rankine (1). He used the term critical speed to describe the large buildup in amplitude predicted by his theory when ..."

Vance [1988]: "... This two-degrees-of-freedom model was used by Rankine in 1869 ... Rankine used Newton's second law incorrectly in a rotating coordinate system, and predicted that rotating machines would never be able to exceed their first critical speed..."

Rankine의 paper가 참으로 Rotor Dynamics에서의 최초의 문헌인지 아닌지를 완전 증명할 길은 없지만 Rankine은 그의 1869년 paper에 "자기 자신의 해석과 비슷한 내용의 논문을 본적이 없노라"고 다음과 같이 서술하고 있다.

"...a mathematical investigation of the action of the centrifugal force in long lines of shafting ; an action of which no similar investigation has, to my knowledge, been hitherto published; ..."

만일 이 statement가 사실이 아니었다면 누군가가 이 statement를 곧 refute했을 터인데, 그러한 반박 기록이 아직까지는 나타나지 않고 있다. 그 뿐만 아니라, 그 당시의 사람인 Rankine 자신이 못 찾았는데, 130년이 지난 오늘 날에 찾아내기는 거의 불가능이라고 본다.

또, Rankine 그 자신은 indifferent equilibrium이란 말을 사용한 적이 없고, Rankine의 paper에서 indifferent equilibrium의 개념을 직접적으로는 찾을 수 없었으며, 필자로서는 indifferent equilibrium이란 말을 Stodola [1927]의 저서에서 처음으로 접했다. 그 뿐만 아니라, critical speed를 전후로 해서 stable, neutral 혹은 unstable하다는 설명은 Rankine의 1869년 paper에 존재하지 않는다.

Rankine은 상기 paper에서 "critical speed"란 term을 사용한 적이 없고 "centrifugal whirling"이란 term을 사용하였다. Rankine이 그의 다른 저서에서 "critical speed"란 말을 처음으로 "devise"했는지는 모르겠지만 상기 paper에서는 사용하지도, 만들어 내지도 않았다. 필자의 조사가 미치는 한, "critical speed"란 말을 처음으로 사용한 사람은 Dunkerley[1894]였다.

Rankine이 사용한 model은 two-degrees-of-freedom model이 아니고, continuous beam model로서 그 degree of freedom을 따지자면 무한대이다. 그뿐만 아니라 그는 Newton's second law를 잘못 적용하지 않았다고 사료되며, rotating coordinate system을 explicit하게 사용하지도 않았으며, "... rotating machines would never be able to exceed their first critical speed..."라고 상기 paper에 기술하지 않았다.

Rankine은 Coriolis acceleration을 무시함으로써 그의 이론 전개에 오류를 범했다고 말하는 사람들을 가끔 만나곤 하는데, Rankine의 상기 paper에는 Coriolis acceleration이 explicit하게 나타날 필요도 없었으며, 필자가 검산해 본 결과로는 Thomson [1993]의 결과와 일치했다. 즉, Thomson은 simple beam과 cantilever에서 " $(nl)^2$ " 값을 각각 "9.87" $(=3.14^2)$, "3.52" $(=1.87^2)$ 로 기술한 반면, Rankine은 " l/b " 값을 각각 "3.14", "1.87"로 기술했을 뿐이다(여기서 양자의 notation차이는 $n=1/b$ 혹은 $nb=1$ 이다).

우리들이 현재 쓰고 있는 "critical speed"란 말을 Rankine은 130년 전에 "centrifugal whirling"이라 표현했고, 이 "centrifugal whirling"현상에 이르지 않는 (불가능한) shaft의 길이나 회전 수에 관해서 서술했을 뿐, 그 "centrifugal whirling" 위에서 혹은 "centrifugal whirling"을 초과했을 때에 관해서는 일체 언급하지 않았다. 참고로 그의 원문을 인용한다면 다음과 같다.

"... if for an indefinitely small deflection the centrifugal force is equal to or greater than the stiffness, the shaft must go on permanently whirling round in a bent form ... : a kind of motion which may be called *centrifugal whirling*. On the other hand, if for an indefinitely small deflection the stiffness is greater than the centrifugal force, centrifugal whirling is impossible. ... For a shaft of a given length, diameter, and material, there is a limit of speed, and for a shaft of a given diameter and material, turning at a given speed, there is a limit of length, below which centrifugal whirling is impossible."

III. Rotor Dynamics는 이대로 좋은가?

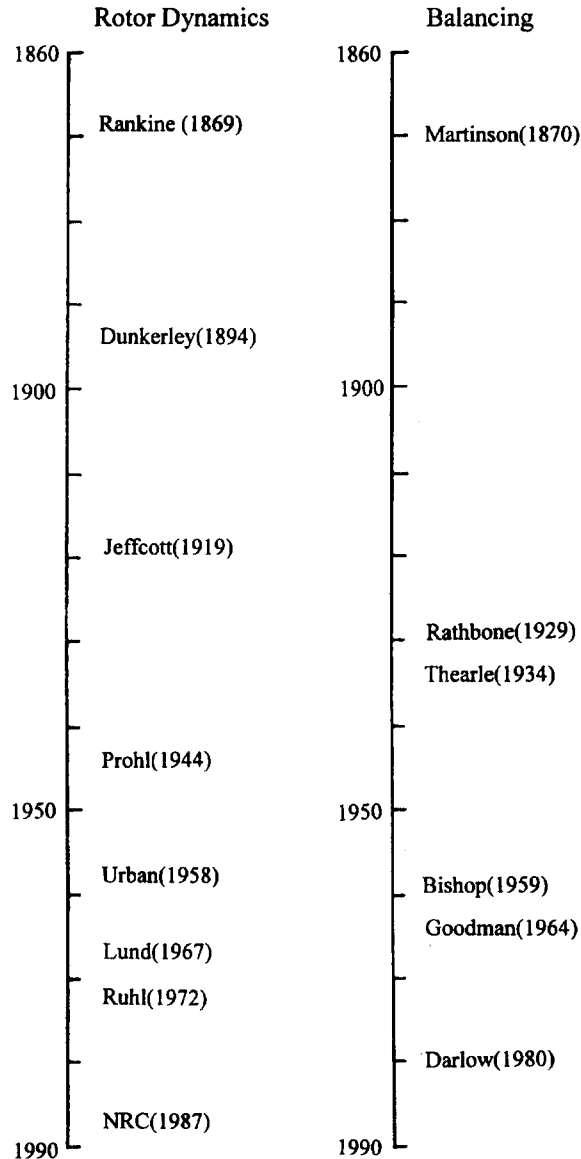
III.1. Rotor Dynamics와 Balancing

많은 사람들이 Balancing은 Rotor Dynamics의 한 branch며 Rotor Dynamics를 연구하면 Balancing도 그 해석(解析) 과정 중에 저절로 master하는 것으로 생각하고 있다. 즉, Balancing은 Rotor Dynamics에 응당 포함되는 것으로 여겨지는 것이다. 사실 그러한가?

Balancing의 역사와 Rotor Dynamics의 역사가 막상막하로 거의 비슷한 시기에 독립적으로 태동되었으며 [Rankine 1869, Martinson 1870], 그 발전과정/해석 방법 등이 전혀 독립적이며, 이 양자가 서로 공식적/해석상의 직접적인 상관 관계를 성공적으로 맺은 적이 전혀 없다는 사실을 아는 사람들을 필자는 만나

본 적이 없다. 아래의 Table 1은 필자가 Rotor Dynamics와 Balancing의 development과정 추적 중에서 간추려본 주요 이정표이다. 이 table에서 보는 Rotor Dynamics계열과 Balancing계열이 이 양 계열 사이의 경계선을 한번도 성공적으로 넘어서 서로 이론적으로 통합된 적이 없다는 사실이다.

Table 1. Rotor Dynamics와 Balancing의 주요 이정표



그 뿐만 아니라, Balancing에는 이론적인 “mathematical modeling”이 전혀 이루어지지 않았다는 사실을 절감하는 사람은 이 세상에 몇이나 될런지? [Childs 1993]. 좀 더 구체적인 예를 들어 설명한다면, engineering drawing만 완성되면 critical speed를 계산해낼 수 있다. 왜냐하면 critical speed calculation의

mathematical modeling이 완성 되어 있기 때문이다. 그 반면에 engineering drawing이 완성되었다 하더라도 이를 제작하여 적절한 bearing에 올려 놓고, 또 적절한 trial weight를 적정량 가감하면서, 적절한 회전속도로 돌리는 trial weight run을 시행하여, 적절한 진동 signal을 채취한 후에야 Balancing이 가능한 것이다. 즉, Balancing의 mathematical modeling이 전혀 되어 있지 못하다는 것이다 [Thearle 1934, Goodman 1964].

III.2. Balancing은 ultra-precision process

꽤 많은 과학자, engineer들이 trial weight run 없이 단번에 balancing을 해 낼 수 있는 방법을 고안해 내고자 시도한 바가 있다 [Palazzolo and Gunter 1982]. 그러나 그 결과들이 현장에서 전혀 사용되지 않고 있다는 사실을 우리는 직시하여야 하겠다. 지금으로부터 82년 전에도 Balancing은 전체 rotor 중량의 약 백분의 일 percent (1/100 %)에 해당하는 극소량의 교정 중량을 써서 수행해 내던 정밀 작업이다 [Wheeler 1915]. 필자의 개인적인 경험으로도 7t 이상의 rotor를 양면 합해서 240g이하의 극소한 교정 중량으로 balancing을 한 적이 있다. 이는 전체 rotor 중량의 0.0035% 이하에 해당하는 것이다. 이처럼 Balancing은 정밀 측정, 정밀 계산, 정밀 작업을 요하는 ultra-precision process이다. 이를 성공적으로 수행할 수 있는 mathematical modeling이 아직까지 없다는 것을 질책하자는 것이 아니라, 이러한 modeling의 부재 현상조차 전혀 감지하지 못하고 있는 것이 아닌가 하는 데에 Rotor Dynamics의 현주소가 있다는 점을 직시해야 한다.

III.3. Unbalance Response의 현황과 문제점

4~5년 전 Canada에서 있었던 이야기다. 필자가 Executive Secretary로 있던 연방정부 Machinery Dynamics 상임위원회에서 주관한 세미나에 유럽에서 우수한 Rotor Dynamics 전문가 N교수를 keynote speaker로 초빙한 적이 있었다. 그때 그 학자가 유럽에서 기획되던 대형 Rotor Dynamics Project에 Canada도 참가할 의사가 없는가 하고 타진해 왔다. Objective, goal, parameter, budget 등에 관해 질문과 discussion을 주고 받던 도중, 필자가 그에게 “우리 Rotor Dynamics를 연구하는 모든 사람들은 Unbalance Response Analysis에서 큰 낭패를 보고 있다.”고 했더니 “어떤 의미에서 그렇게 생각하는가?”하고 의아한 표정을 짓길래 “Unbalance Response Analysis의 결과가 어느 정도만이라도 reasonable하다면 왜 Balancing할 때 전연 이용을 못하는가? 그 이유는 Balancing에 관한 한, 황당한 결과가 나와서 전혀 믿을 만 하지 못하기 때문이 아닌가?” 하고 반문했다. 그랬더니 그 학자가 “정말로 그런 면이 있었나?”고 당황해 하면서 고개를 갸웃거리다가 결국은 다른 화제로 바꾸어 버렸다. 필자는 그때 즉시 “아하, 이 사람은 Balancing을 제 손으로 직접 해본 적이 전혀 없는 데, 쓸 데 없이 경중만 올려 줬구나.”라고 후회했다.

아마도 Rotor Dynamics 학도(學徒)들치고 Unbalance Response를 공부하지 않은 사람은 없을 것이다. 또 Unbalance Response를 계산해내는 computer program을 써보지 않은 사람도 거의 없을 것이다. 그런데 이 Unbalance Response의 궁극적인 목적지/goal 혹은 그 output은 무엇인가? 어떤 일정량의 Unbalance를

Rotor의 어떤 location에 장착했을 때에, 주어진 operational condition에서 어떤 양의 amplitude와 phase angle이 나온다는 것이 Unbalance Response Analysis의 output일진대, 그렇다면

- i) 현장 Balancing에서는 어떤 것을 측정하여 그 작업을 수행하고 있는지를 우리들은 숙지하고 있는가?
- ii) 현장 Balancing에서 필요로 하는 것은 amplitude와 phase angle이고, Unbalance Response Analysis의 output이 바로 다른 아닌 amplitude와 phase angle인데, 왜 이 귀중한(?) output이 현장 Balancing에서는 전혀 사용되지 못하고 있는가?
- iii) 현장 Balancing에 전혀 사용되고 있지 못하다는 사실, 그 자체를 우리들은 알고 있는가?
- iv) 현장 Balancing에 사용될 수 있어야만 한다는 이 엄연한 사실을 우리들은 알고 있는가?

위에 제기한 질문들은 필자를 포함한 전 세계의 모든 Rotor Dynamics 학도(學徒)들이 자문자답을 해보아야만 할 문제라고 생각한다. 다만 우리 한국에서 남보다 먼저 이 문제를 인지하고 노력을 경주하여, 남보다 한발 앞서서 좋은 결과를 내서 국가 산업에 먼저 응용, 기여, 공헌할 수 있기를 바라는 충정에서 여러분과 함께 국내에서 먼저 이 문제점들을 나누고자 할 뿐이다. 필자가 말하고자 하는 요점은 “Unbalance Response Analysis의 결과를 현장 Balancing에 즉각적으로 응용 가능한 수준으로 올려야 한다”는 점이다. 물론 이 과제는 쉽지 않다. 수많은 고개를 넘어야 할 것이다. 하지만 한국에서 이 과제를 제일 먼저 성취했을 때, 최소한 그 부분만큼은 한국의 Rotor Dynamics 수준이 참으로 세계에서 첨단을 달리고 있을 것이라 확신한다.

III.4. Jeffcott Rotor [Jeffcott 1919]

1978년에 있었던 이야기다. 미국 Philadelphia에서 열렸던 어느 Rotor Dynamics 모임에 참석했을 때, 그 당시 이미 교수/학과장 직에서 은퇴한 T교수가 “... Jeffcott Rotor 같은 것은 ...” 말할 가치도 없다는 듯이 몹시 얕보는 투로 언급했을 때, 또 다른 G교수가 얼른 받아서 “Jeffcott model이 비록 실제적 응용 가치는 적다 하겠으나 Rotor Dynamics를 이해하는 간단한 model로서는 가치가 있다.”고 한 적이 있었다. 필자는 Jeffcott rotor에서 참으로 많은 것을 배우고 또 느꼈으며, 특히 근자에 와서는 그 관련된 특성들을 음미하는 습관이 생겼을 정도로 이 Jeffcott model을 아끼게 되었다. 요사이 기계 진동을 학과목으로 택하는 undergraduate 학생들조차도 배우고 지나가도록, 대부분의 undergraduate용 기계 진동 교과서에 포함되어 있는 극히 초보적인 Rotor model이 바로 Jeffcott model이다. 이처럼 초보적인 model에서 현대의 model들은 얼마나 더 발전했는가? 혹자는 비교 그 자체가 어불성설이 될 정도의 크나 큰 발전이 있었다 하겠고, 한편 생산 현장의 제일선에서 좀 더 실용적/구체적/정량적인 Data나 information을 필요로 하는 engineer들은 아직도 만족스러운 수준에 이르려면 까마득하다고 생각 할 것이다. 필자는 후자에 속한다. 앞에서 거론한 바 있는 예와 같이 7t Rotor를 240g 정도로 Balancing을 해야 하는 현장에 직접적으로 공헌하기 위해서는 Rotor Dynamic modeling에 대단한 혁신이 필수적이라고 아니할 수 없다.

참고로 부연한다면, 1차 mode를 다루는 original Jeffcott model이 발표된 지 근 70년이 지났는데, 2차 mode의 특성들을 것처럼 명쾌하게 다룰 수 있는 신판 expanded Jeffcott model이 아직 나타나지 않고 있다. Darlow (1983)가 Jeffcott rotor의 conical mode에 관한 Unbalance Response 해석을 기도했으나, 그의 해석에서 각도 (angle)를 vector 양으로 취급하는 오류를 범하고있다는 점을 여기에 밝힌다. 100여년 전에 발표된 Dunkerley (1894)의 Critical Speed Analysis (case VIII, p.301)도 함께 참조하기를 추천한다.

III.5. National Rotor Dynamics Test Facility의 필요성

현재 대부분의 Rotor Dynamic Analysis는 computer simulation에 너무 치중되어 있고, Test 결과로 검증하는 예가 많지 않다고 느껴지고, 특히 Rotor Dynamics와 Balancing과의 연계에 관한 한 이러한 현상이 두드러지게 나타나고 있다. 또 대부분의 analysis가 가속도가 없는 일정한 회전속도, 즉 steady state analysis에 국한되는 경향이 있고, system damping의 측정/검증에 관한 연구 및 Balancing에로의 응용, 등이 충분치 않은 감이 든다.

Consistent, repeatable 한 실험 결과를 낼 수 있고, 또 여러 연구소, 대학교 및 중소기업들이 언제든 와서 Computer Simulation이나 Balancing 결과를 검증해 볼 수 있도록 open되어 있는 공공 복지 차원의 영구적인 Vacuum Test Bed의 설치가 한국 내에는 없다. 이러한 한 국가 내에 하나밖에 없는 National Facility가 설치 운용됨으로써 모든 산업체, 교육기관, 연구소에서 수시로 사용할 수 있도록 open 된 최우수 설비가 하루 빨리 한국 내에 설치될 것을 바라는 마음 간절하다. 이러한 National Facility는 Balancing grade 검증 및 인증에도 동시에 사용될 수 있으며, 만일 그렇게만 된다면 Balancing에 관한 국가 표준 설정, Calibration기능 구축, 등에도 파격적인 진전이 있으리라고 확신한다.

현재 ISO (International Organization for Standardization)에서 발간되는 ISO Standard들에도 틀렸거나 부적절한 부분이 한두 군데가 아닐 뿐만 아니라, 어느 외국의 특정한 Balancing machine 제작 회사가 이 (Balancing에 관한 한) ISO Standard를 도에 지나치게 지배하는 양상이 너무나 뚜렷하게 나타나고 있다. 이러한 오류 또는 부적절한 부분도 검증해 보지 못하고 끌려만 다니는 “Rotor Dynamics/Balancing 전문가”들의 안일한 모습도 또한 문제라고 생각한다. 이와 같은 국제적인 무대에서 그 잘못들을 이론 및 실험적으로 증명/지적하려면 우수한 National Rotor Dynamics Test Facility가 꼭 필요하다고 생각되며, 이러한 National Facility에 기반을 두고 대한민국의 Rotor Dynamics/Balancing 연구 요원, 실무자, 제작 업체, 사용자들이 전부 모여 힘을 합하고 진지하게 토론할 수 있는 National Forum이 필요하고, 또 여기서 범 국가적인 증장기 연구 개발, 실험, 검증, 인증, 등의 계획 수립이 필요하다고 본다.

IV. 결론

앞에서 열거한 바와 같이 Rotor Dynamics의 역사가 130년이나 되었지만, 이 분야에서만이라도 세계 수준을 넘어서고, 또 조국의 산업 발전 현장에 실제로 응용/기여하기 위해서는 우리들이 수행하여야 할 일들이 아직도 무척 많이 남아 있을 뿐만 아니라, 또 이에 수반된 일체의 Analysis, 실측, 검증의 정밀도도 한층 높아져야 하겠다. 차제에, 최소한 대한민국의 Rotor Dynamics 학도(學徒)들은 근거가 확실하지 않는 misquote들에 휩쓸린다든가 또는 안일한 통상적인 model에 안주하는 일이 없기를 간절히 바란다. 특히 National Rotor Dynamics Test Facility의 설치와 Rotor Dynamics 학도(學徒), 제작 업체, 사용자들의 National Forum 구성에 큰 기대를 건다.

References

- Childs, D, 1993, Turbomachinery Rotordynamics, John Wiley & Sons, p.xiii.
- Darlow, M. S., 1989, Balancing of High-Speed Machinery, Springer-Verlag, New York, pp.24-27.
- Dunkerley, S., 1894, On the Whirling and Vibration of Shafts, Phil. Trans. Roy. Soc., London, Series A, Vol. 185, pp. 279-360.
- Goodman, T. P., 1964, A Least-Squares Method for Computing Balance Corrections, J. of Eng. Ind., Trans. ASME, Series B, Vol. 86, No. 3, pp. 273-279.
- Gunter, E., J., 1965, Discussion on Tang and Trumpler's paper-Dynamics of Synchronous-Precessing Turborotors with Particular Reference to Balancing. Part 1:Theoretical Foundations, Trans. ASME, J. Appl. Mechanics, p.223, March 1965.
- Martinson, H., 1870, Improvement in the Mode of Balancing Shafts, U.S. Patent No. 110259, Dec. 20.
- Palazzolo, A. B. and Gunter, E. J., 1982, Modal Balancing of a Multi-Mass Flexible Rotor Without Trial Weights, ASME paper 82-GT-267.
- Rankine, W. J. M., 1869, On the Centrifugal Force of Rotating Shafts, Engineer, XXVI, p.249, April 9.
- Rieger, N., F. and Crofoot, J., F., 1977, Vibrations of Rotating Machinery, Part1: Rotor-Bearing Dynamics, Vibration Institute, Clarendon Hills, Section 1.1.
- Rieger, N., F., 1986, Notes on the Development of Balancing Techniques, Vibrations, Vol. 2, No. 1, Vibration Institute.
- Stodola, A., 1927, Steam and Gas Turbines (with a Supplement on the Prospects of the Thermal Prime Mover), Volume 1 & 2, McGraw-Hill(1927)/Peter Smith(1945), p.427 (Volume 1).
- Thearle, E. I., 1934, Dynamic Balancing of Rotating Machinery in the Field, Trans. ASME, Vol. 56, pp.745-753.
- Thomson, W. T., 1993, Theory of Vibration with Applications, 4th ed., p.283.
- Vance, J., M., 1988, Rotordynamics of Turbomachinery, John Wiley & Sons, New York, p.4.
- Wheeler, H. D., 1915, The Balancing of High-Speed Machinery, Engineering, pp.64-66, Jan. 15.