

모달필터 성능을 고려한 센서의 최적위치

황 재 혁*, °김 준 수**, 백 승 호**

Sensor Placement in Structural Vibration Control For the Performance of Modal Filter

Jai-Hyuk Hwang*, °Joon-Soo Kim**, Seung-Ho Baek**

ABSTRACT

In this study, the effect of modal filter error on the vibration control characteristics of flexible structures is analyzed for IMSC(Independent Modal Space Control), and optimal sensor placement in the structural vibration control with consideration of performance of modal filter has been studied. An Lyapunov asymptotic stability condition has been derived, which depends on the magnitude of the modal filter errors. The extent of the response deviation of the closed-loop system is also derived and evaluated using operator techniques. A sensor placement technique has also been suggested to maximize the performance of the modal filter. It has been found by a series of simulation that the suggested sensor placement technique is very effective on the determination of the number and placement of sensors of modal filter in the structural vibration control.

1. 서론

우주구조물과 같은 분포계의 진동을 모드제어기법을 통해 제어하고자 하면 반드시 모달변위와 모달속도를 알아야 한다. 즉 진동을 억제하기 위한 피드백 제어력을 계산하기 위해 모달상태의 추정이 필요하게 된다. 일반적으로 실제 센서는 진동계의 실제 변위를 측정하므로 센서의 정보로부터 모달상태를 알아내는 작업이 필요하게 된다. 이 작업을 가능하게 하는 장치로는 관측기(observer)와 모달필터(modal filter)[1-4]가 있다. 관측기를 사용하여 이산화(discretization) 된 분포계의 제어모드의 상태를 추정하면, 잔류모드와 관련된 관측 스펙트럼오버와 작동기에 의한 제어 스펙트럼오버가 발생하여 전체 시스템이 불안정해지는 결과를 초래하게 된다. 그러나, 확장된 원리(expansion theorem)를 이용한 모달필터를 사용하면 센서에서 측정된 값을 분포된 출

력으로 근사화 시킬 수 있으므로 관측 스펙트럼오버를 최소화할 수 있다. 만일 센서의 수를 증가시키면 결과는 점점 정확하게 되는 장점이 있다. 모달필터는 Meirovitch 와 Baruh[1-2]에 의해 제안되었으며, 후에 여러 연구에 의해 발전되어 사용되어지고 있다[3-4]. 그러나 모달필터는 진동계의 파라메타 오차, 사용되는 고유함수의 부정확성, 센서의 개수 및 위치, 보간함수 등에 의해 오차를 가지게 된다.

센서의 개수 및 위치에 따라 모달필터의 성능이 좌우되며, 따라서 진동제어계의 가관측성을 만족하지 않을 수도 있고 안정성 및 성능에 많은 영향을 미치게 된다. 그러므로 센서의 개수와 위치 선정은 구조물의 진동제어에 있어 매우 중요한 문제이다. 보통 센서의 개수가 많을 수록 페루프 시스템의 안정성을 보장받을 수 있게 되는 것이 사실이지만 하드웨어적인 비용문제 등의 이유로 적은 개수를 요구하게 된다. 이에 따라 시스템이 안정적이 되는 최소의 센서 개수를 찾을 필요가 있다. 또한 같은 개수의 센서라도 위치에 따라 시스템의 응답을 보다 잘 나타낼 수 있으므로 최적의

* 한국항공대학교, 항공기계공학과

** 한국항공대학교 대학원

위치 선정의 필요성이 있다. 본 연구에서는 모달 필터 오차와 관측 스피로버(observation spillover) 및 관측 그레미안(observability grammian)의 특이값의 관점에서 최적의 센서 위치를 선정하고자 한다. 먼저 모달필터의 오차로 인한 모달상태 추정오차가 페루프의 안정성에 미치는 영향을 고찰하고자 하며, Lyapunov 점근안정성을 얻기 위한 조건식을 유도하고자 한다. 또한 모달필터의 오차가 존재할 때 진동제어 성능이 설계치로 부터 벗어나는 응답 오차의 상한(upper bound)을 연산자 이론(operator techniques)을 사용하여 유도한다. 또한 보다 안정하고 좋은 성능을 내기 위한 센서의 최적위치 선정과정을 예제로서 설명한다.

2. 모달필터를 갖는 진동제어계

제어모드의 모달상태를 추정하는 모달필터[5-7]는 일반적으로 다음과 같이 표현된다.

$$\hat{q}_c(t) = Dy(t) \quad (1)$$

$$\dot{\hat{q}}_c(t) = D\dot{y}(t) \quad (2)$$

여기서 $\hat{q}_c(t)$ 및 $\dot{\hat{q}}_c(t)$ 는 각각 크기가 n 인 추정된 모달변위 벡터 및 모달속도 벡터를 나타낸다. 또한 $y(t)$ 및 $\dot{y}(t)$ 는 각각 크기가 K 인 변위센서 출력벡터 및 속도센서 출력벡터를 나타낸다. 또한 D 는 모달필터 행렬[2]을 나타낸다.

확장이론을 이용한 변위출력 벡터와 속도출력 벡터는 제어하고자 하는 제어모드 $q_c(t)$ 와 나머지 모드인 잔류모드 $q_r(t)$ 로 구분하여 다음과 같이 표현할 수 있다[15,16].

$$y(t) = C_c q_c(t) + C_r q_r(t) \quad (3)$$

$$\dot{y}(t) = C_c \dot{q}_c(t) + C_r \dot{q}_r(t) \quad (4)$$

여기서

$$C_c = [C_{Cj}], \quad C_{Cj} = \phi_j(x_j)$$

$$j = 1, 2, \dots, K, \quad r = 1, 2, \dots, n$$

$$C_r = [C_{Rj}], \quad C_{Rj} = \phi_j(x_j)$$

$$j = 1, 2, \dots, K, \quad r = n+1, n+2, \dots$$

식(1), 식(2)에 각각 식(3), 식(4)를 대입하면 다음식

을 얻는다.

$$\hat{q}_c(t) = DC_c q_c(t) + DC_r q_r(t) \quad (5)$$

$$\dot{\hat{q}}_c(t) = DC_c \dot{q}_c(t) + DC_r \dot{q}_r(t) \quad (6)$$

만일 D 가 정확하다면 모달필터는 정확한 모달 상태를 출력하게 된다. 즉 $\hat{q}_c(t)$, $\dot{\hat{q}}_c(t)$ 는 각각 $q_c(t)$, $\dot{q}_c(t)$ 와 같아지게 되며, $DC_c = I_c$, $DC_r = 0$ 이 된다. 여기서 I_c 는 n 차의 단위행렬을 나타낸다. 그러나 D 가 부정확하다면 정확한 값을 출력하지 못하게 되고 $\hat{q}_c(t)$, $\dot{\hat{q}}_c(t)$ 는 각각 $q_c(t)$, $\dot{q}_c(t)$ 와 차이가 생기게 된다. 또한 이 값을 피드백시키는 경우 페루프 계의 성능을 저하시키게 된다.

다음과 같은 제어모드의 모달방정식을 고려하자.

$$I_c \ddot{q}_c(t) + A_c q_c(t) = f(t) \quad (7)$$

여기서

$$A_c = \text{diag}[\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2]$$

$$f(t) = [f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)]^T$$

이제 독립된 모달공간 제어기법을 적용하여 각 모드들이 서로 독립적으로 제어되도록 설계하고자 한다. r 번째 모달힘 $f_r(t)$ 는 r 번째 모달상태 $q_r(t)$ 와 $\dot{q}_r(t)$ 에만 의존하므로 모달힘 벡터 $f(t)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$f(t) = -K_p \hat{q}_c(t) - K_v \dot{\hat{q}}_c(t) \quad (8)$$

여기서 제어게인행렬 K_p 와 K_v 는 양한정(positive definite)한 대각행렬이다.

이제 모달필터 오차를 갖는 경우 모달필터의 오차는 모달필터 행렬에 포함되므로 모달필터 행렬 D 를 $D + \Delta D$ 로 바꾸면 오차를 갖는 모달필터 방정식은 다음과 같다.

$$\hat{q}_c(t) = (I_c + \Delta DC_c) q_c(t) + \Delta DC_r q_r(t) \quad (9)$$

$$\dot{\hat{q}}_c(t) = (I_c + \Delta DC_c) \dot{q}_c(t) + \Delta DC_r \dot{q}_r(t) \quad (10)$$

여기서 ΔD 는 모달필터 오차를 나타내는 행렬이다. 따라서 이 경우의 페루프 방정식은 다음과 같이

어진다.

$$I_c \ddot{q}_c(t) + K_v(I_c + \Delta DC_c) \dot{q}_c(t) + [A_c + K_p(I_c + \Delta DC_c)] q_c(t) = -K_v \Delta DC_R \dot{q}_R(t) - K_p \Delta DC_R q_R(t) \quad (11)$$

위 방정식에서 보는 바와 같이 모달필터 오차가 존재하는 경우에는 모달필터 오차 행렬 ΔD 와 잔류모드와의 조합으로 표현되는 우변의 항들에 의해서 계속 가진됨을 알 수 있다. 또한 ΔDC_c 는 비대각 행렬이므로 식(11)은 다시 결합(coupled)되어 더이상 독립모달공간 제어기법의 특성을 갖지 못한다. 또한 잔류모드가 제어모드의 측정에 포함되는 관측 스피로버[2]가 발생하여 시스템 특성에 심각한 영향을 끼치게 될 수도 있다. 이 경우 페루프의 안정성과 성능을 해석하기 위해서는 잔류모드의 지배방정식도 함께 고려해야 하므로 매우 복잡하게 된다. 본 연구에서는 제어모드의 모달상태에 대한 모달필터의 추정오차가 시스템에 미치는 영향에 우선 관심이 있으므로 관측 스피로버 현상은 배제할 수 있다고 가정한다. 보통 잔류모드는 고주파 영역에 존재하므로 측정된 출력을 저주파 필터에 통과시킴으로써 관측 스피로버는 실제로 배제시킬 수 있다. 따라서 앞의 모달필터 오차가 존재하는 시스템의 페루프 방정식은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$I_c \ddot{q}_c(t) + K_v(I_c + \Delta DC_c) \dot{q}_c(t) + [A_c + K_p(I_c + \Delta DC_c)] q_c(t) = 0 \quad (12)$$

이 제어 시스템의 블록선도는 다음 Fig. 1 과 같다.

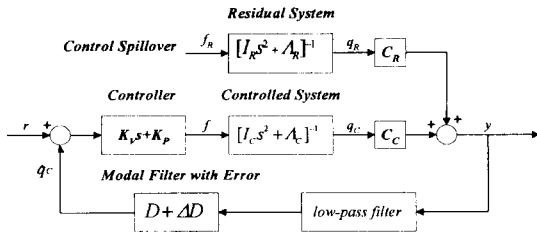


Fig. 1 Block Diagram of Closed-loop System with Modal Filter

3. 모달필터 오차가 진동제어 특성에 미치는 영향

본 절에서는 모달필터 오차가 진동제어 특성에 미치는 영향을 알아보기 위해 페루프 시스템의 안정성을 해석하였고, 응답오차의 상한을 유도하였다. 모달필터 오차가 존재하지 않는 시스템은 항상 점근적으로 안정하다고 볼 수 있지만 모달필터 오차가 존재하는 시스템은 간단하게 판단할 수 없다. 이는 모달필터 오차가 존재하는 시스템의 페루프 방정식이 대칭 계수행렬을 갖지 못하기 때문이다. 이 경우 점근적 안정조건을 유도하기 위해 먼저 식(12)를 다음과 같이 표현한다.

$$I_c \ddot{q}_c(t) + A \dot{q}_c(t) + B q_c(t) = 0 \quad (13)$$

여기서

$$A = K_v(I_c + \Delta DC_c)$$

$$B = A_c + K_p(I_c + \Delta DC_c)$$

지적인 바와 같이, 계수행렬 A , B 는 모달필터의 오차 때문에 비대칭 행렬이 된다. 식(13)에 대해 다음과 같은 Lyapunov 후보함수를 정의한다.

$$V(t) = q_c^T [B + B^T] q_c + [q_c^T A^T + \dot{q}_c^T] [A q_c + \dot{q}_c] + \dot{q}_c^T \dot{q}_c \quad (14)$$

위 식에서 두번째 및 세번째 항은 항상 양한정하므로 첫번째 항만 양한정하다면 즉 $B + B^T$ 만 양한정하면 $V(t)$ 가 양한정하게 된다. Lyapunov 후보함수를 시간에 대해 한번 미분하고 식(13)을 $\dot{V}(t)$ 에 대입하면 다음과 같은 결과식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= -q_c^T [A^T B + B^T A] q_c - q_c^T [B^T - B] \dot{q}_c \\ &\quad - \dot{q}_c^T [B - B^T] q_c - \dot{q}_c^T [A + A^T] \dot{q}_c \\ &= -z^T Q z \end{aligned} \quad (15)$$

여기서

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2^T \\ Q_2 & Q_3 \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} q_c \\ \dot{q}_c \end{bmatrix}$$

$$Q_1 = Q_1^T = A^T B + B^T A$$

$$Q_2 = -Q_2^T = B - B^T$$

$$Q_3 = Q_3^T = A + A^T$$

식(15)에서 행렬 Q 가 양한정하면 $\dot{V}(t)$ 는 음한정 (negative definite)하게 되고 페루프계는 점근적 안정성을 갖게 된다. 변환기법 $z = Ty$ 을 사용하여 간단히 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= -y^T T^T Q T y \\ &= -y_1^T Q_1 y_1 - y_2^T [Q_2 - Q_2 Q_1^{-1} Q_1^T] y_2 \end{aligned} \quad (16)$$

여기서

$$T = \begin{bmatrix} I & -Q_1^{-1} Q_2^T \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

이 식으로 부터 Q_1 과 $Q_2 - Q_2 Q_1^{-1} Q_1^T$ 가 모두 양한정하면 $\dot{V}(t)$ 가 음한정함을 알 수 있다. 결과적으로 $V(t)$ 가 Lyapunov 함수가 될 조건식은 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$B + B^T > 0 \quad (17a)$$

$$Q_1 > 0 \quad (17b)$$

$$Q_2 - Q_2 Q_1^{-1} Q_1^T > 0 \quad (17c)$$

위 조건식만 만족하면 모달필터를 갖는 시스템의 페루프 방정식은 상태 전 영역에서 점근적 안정성을 갖게 된다.

모달필터 오차가 시스템의 페루프 성능에 미치는 영향을 고찰하기 위해 정확한 모달필터를 사용한 경우의 변위벡터와 부정확한 모달필터를 사용한 경우의 변위벡터와의 차이를 $e_c(t)$ 라고 정의하면 $e_c(t)$ 의 지배방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} I_c \ddot{e}_c(t) + K_v \dot{e}_c(t) + (A_c + K_p) e_c(t) \\ = K_r \Delta DC_c \dot{q}_c(t) + K_p \Delta DC_c q_c(t) \end{aligned} \quad (18)$$

이 식을 해석함으로써 모달필터의 오차를 무시하고 진동제어기를 설계하는 경우 페루프가 갖는 응답성능의 오차 $e_c(t)$ 를 예측할 수 있다. 위 식에서 보는 바와 같이 $e_c(t)$ 는 ΔD 에 의해 가진되고 있음을 알 수 있다. 만약 모달필터 오차가 없다면 $\Delta D = 0$ 이 되고 $e_c(t) = 0, t \geq 0$ 이 된다.

모달필터 오차에 대한 $e_c(t)$ 의 상한을 얻기 위해 초기조건을 $e(t) = \dot{e}(t) = 0$ 이라고 놓고 식(18)을 라플라스 변환시키면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\bar{e}_c(s) = \bar{H}(s) \bar{q}_c(s) \quad (19)$$

여기서

$$\bar{H}_{ij}(s) = \frac{k_{v_i} s + k_{p_i}}{s^2 + k_{v_i} s + \omega_i^2 + k_{p_i}} d_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

식(19)에서 $\bar{e}_c(s)$ 및 $\bar{q}_c(s)$ 는 각각 $e_c(t)$ 및 $q_c(t)$ 의 라플라스 변환된 벡터를 나타내고, d_{ij} 는 ΔDC_c 의 요소들을 뜻한다. 식(19)를 라플라스 역변환시키고 간단한 연산자 이론을 적용시키면 $e_c(t)$ 의 상한 $\|e_c\|$ 는 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\|e_c\| = \|\hat{H}(q_c)\| \leq \|\hat{H}\| \|q_c\| \quad (20)$$

여기서 $\|\hat{H}\|$ 는 선형연산자 $\hat{H}(q_c) = [H^* q_c](t)$ 의 L_∞ -유도놈(induced norm)이다. L_∞ -유도놈 $\|\hat{H}\|$ 는 Desoer 와 Vidyasaga[17]의 결과를 이용하였다.

$$\begin{aligned} \|e_c\| &\leq \|\hat{H}\| \|q_c\| \\ &= \left[\max_{1 \leq i \leq n} \frac{\sigma_i}{\hat{\omega}_i^2} \left(k_{p_i} + k_{v_i} X_{1i} \frac{\exp(X_{2i} + X_{3i})}{1 - \exp(X_{3i})} \right) \right] \|q_c\| \end{aligned} \quad (21)$$

여기서

$$X_{1i} = 2\sqrt{\alpha_i^2 - 2\alpha_i \zeta_i \hat{\omega}_i + \hat{\omega}_i^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$X_{2i} = \frac{\zeta_i}{\sqrt{1 - \zeta_i^2}} \tan^{-1} \frac{\hat{\omega}_i \sqrt{1 - \zeta_i^2}}{\alpha_i - \zeta_i \hat{\omega}_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$X_{3i} = -\frac{\zeta_i \pi}{\sqrt{1 - \zeta_i^2}}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\hat{\omega}_i = \sqrt{\omega_i^2 + k_{p_i}}$$

$$\zeta_i = \frac{k_{v_i}}{2\sqrt{\omega_i^2 + k_{p_i}}}, \quad (\zeta_i < 1)$$

$$\alpha_i = k_{p_i} / k_{v_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\sigma_i = \sum_{j=1}^n |d_{ij}|$$

위의 부등식은 $\|e_c\| \leq m \|q_c\|$ 의 형태로 표현할 수 있으며[14], 여기서 m 은 $\|\hat{H}\|$ 이다. $\|\hat{H}\|$ 는 σ_i 및 고 유진동수 ω_i 에 의존하고 있다. 따라서 모달필터

오차가 매우 작다면, 즉 $\sigma_i \ll 1$, $i = 1, 2, \dots, n$, 이라면, $\|\hat{H}\|$ 는 매우 작게 된다. 또한 식(21)에서 알 수 있듯이, $\|e_c\|$ 와 모달필터 오차의 크기 사이에는 선형관계를 이루고 있으며, 비례계수는 제어기법의 구조에 의존하고 있다. 결과적으로 모달필터 오차가 존재하는 경우, 진동제어 응답성능에 오차가 존재하게 되고 그 크기는 항상 $\|\hat{H}\| \|q_c\|$ 보다 적다. 따라서 $e_c(t)$ 는 항상 $\pm \|\hat{H}\| \|q_c\|$ 의 밴드(band) 안에 있게 된다.

4. 센서의 최적위치

본 절에서는 진동제어계의 안정성 및 성능을 향상시키기 위해 센서의 최적위치를 구하는 기법을 제안하였다. 특히 모달필터 오차에 의한 영향을 최소화하여 더욱 정확한 모달상태를 추정할 수 있도록 하고, 관측시 발생하는 잔류모드의 관측스필오버 현상을 최소화하고자 하며, 보다 좋은 관측성능을 위해 관측그레미안의 특이값을 크게 하도록 한다. 이를 위하여 최적설계기법을 활용한다.

설계변수인 센서의 위치를 최적화하기 위한 성능지수 J 는 각 경우에 대해 다음과 같이 정의하였다. 모든 경우에 센서의 위치를 변화시켜 가며 $J = J(x_1, x_2, \dots, x_k)$ 를 최소화하는 위치를 결정하게 된다.

Case 1 : 모달필터 오차를 최소화하기 위해 ΔDC_c 를 최소화한다.

$$J = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |d_{ij}| \quad (22)$$

$d_{ij} = \Delta DC_c$ 의 요소

모달필터를 포함하는 페루프 방정식의 안정조건식 (17)에서 알 수 있듯이 모달필터 오차는 행렬 ΔDC_c 를 통하여 직접적으로 안정성에 영향을 미치고 있으므로 J_1 를 최소화할수록 안정성이 좋아짐을 예상할 수 있다.

Case 2 : 여러 경우의 조합

$$J = \gamma_1 J_1 + \gamma_2 J_2 + \gamma_3 J_3 \quad (23)$$

여기서

$$J_1 = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |d_{ij}|, \quad d_{ij} = \Delta DC_c \text{의 요소}$$

$$J_2 = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^r |d_{r,ij}|, \quad d_{r,ij} = \Delta DC_r \text{의 요소}$$

$$J_3 = \frac{1}{\min_{1 \leq i \leq n} \sigma_i [W_o]}, \quad W_o \equiv \int_0^\infty e^{A^T \tau} C^T C e^{A \tau} d\tau$$

$$A = \begin{bmatrix} -K_V & | & -A_c - K_P \\ \hline & & 0 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \cdots 0 \mid C_c]$$

식(23)에서 J_1 은 Case 1과 마찬가지로 모달필터 오차를 최소화하기 위해 ΔDC_c 를 최소화하는 성능지수를 나타낸다. J_2 는 잔류모드에 의한 관측스필오버를 최소화하기 위해 ΔDC_r 을 최소화하는 성능지수로서 식(9)와 (10)에서 볼 수 있듯이 관측스필오버는 잔류모드의 모달상태와 행렬 ΔDC_r 와의 곱의 형태로 표현되므로 행렬 ΔDC_r 를 최소화함으로써 관측스필오버 또한 작아질거라 예상할 수 있다. J_3 는 보다 좋은 관측성능을 위해 관측그레미안 W_o 를 최대화하는 성능지수로서 $\sigma_i[\bullet]$ 는 i 번째 특이값(singular value)을 나타낸다. n 개의 관측그레미안 값 중에서 가장 크기가 작은 값을 최대화시키면 모든 특이값이 최소한 이 값보다는 커지게 되므로 좋은 관측성능을 기대할 수 있다. 또한 식 (23)에서 γ_i , $i = 1, 2, 3$, 은 i 번째 경우에 해당하는 가중상수(weighting constant)를 뜻한다. 가중상수는 J_1 , J_2 , J_3 의 기여도를 결정하는 상수로서 설계자의 목적에 맞게 적절히 선정하며 가중상수를 키워줄수록 그 항에 해당하는 성능지수가 더 크게 영향을 미치게 된다.

위 식들의 최적화 과정에서 반드시 고려해야 하는 구속조건은 다음과 같다. 이 조건을 만족하지 않는 페루프 시스템은 불안정해 지므로 센서위치 최적화의 의미가 상실된다.

$$\text{Real}(\lambda_i) < 0, \quad i = 1, 2, \dots, 2n$$

5. 예 제

본 절에서는 앞 절에서 제시한 방법을 통한 센서 위치의 최적화 과정을 보여주기 위해 외팔보(cantilever beam)를 예제로 사용하였다. 외팔보를 베르누이-오일러 보 모델로 간주할 때, 지배방정식은 다음과 같다.

$$EI[\partial^4 w(x,t)/\partial x^4] + M[\partial^2 w(x,t)/\partial t^2] = f(x,t)$$

여기서 단위길이 당 질량은 $M=1$ 로, 물성치는 $EI=10$ 으로, 길이 $l=10$ 으로 가정한다. 이 예제의 고유치 문제를 풀이하면, 고유치는 다음과 같은 초월함수를 이용하여 얻을 수 있다.

$$\cos(\beta, l) \cosh(\beta, l) = -1$$

위 방정식의 해는 다음과 같다.

$$\beta, l = [1.8751, 4.6941, 7.8548, 10.9955, 14.1372, 17.2788, \dots]$$

따라서 고유치와 고유함수는 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\lambda_r = \omega_r^2 = \beta_r^4 EI / M, \quad r = 1, 2, \dots$$

$$\phi_r = a_r \{ [\sin(\beta_r, l) - \sinh(\beta_r, l)][\sin(\beta_r, x) - \sinh(\beta_r, x)] + [\cos(\beta_r, l) + \cosh(\beta_r, l)][\cos(\beta_r, x) - \cosh(\beta_r, x)] \}$$

여기서 a_r 은 정규화(normalization) 시키기 위한 상수이다. 제어모드의 개수와 작동기의 개수는 각각 6개로 선정하였으며, 보간함수는 다음과 같이 선정하였다.

$$L_1(\xi) = \xi, \quad L_2(\xi) = 1 - \xi$$

독립모달공간 제어기법에서 최적제어 피드백 게인 행렬을 구하면 다음과 같다.

$$K_p = \text{diag}[0.1454, 0.6130, 0.8948, 0.9680, 0.9878, 0.9945]$$

$$K_v = \text{diag}[1.5135, 1.7961, 1.9467, 1.9839, 1.9939, 1.9972]$$

센서의 최적위치를 얻기 위해 사용된 센서의 초기

위치는 보의 전체 길이를 센서의 수로 나눈 등간격으로 배치하였다. 이를 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$x_{0j} = \frac{l}{K} j, \quad j = 1, 2, \dots, K$$

여기서 K 는 센서의 수를 나타낸다. 위의 위치선정에서 $x=0$ 에서의 변위센서 출력은 항상 영이므로 센서의 위치에서 제외시켰다. 또한 모든 경우에 j 번째 센서의 위치는 다음과 같이 구속되어 있다고 가정하였다.

$$\frac{l}{K-1}(j-1) \leq x_j \leq \frac{l}{K-1} j, \quad j = 1, 2, \dots, K-1$$

Table 1에서는 Case 1의 경우 센서의 개수가 3, 6, 10개일 때 센서의 위치와 페루프 시스템의 고유치 및 성능지수, 응답성능 오차의 상한을 최적화하기 전후에 대해 비교하였다. 고유치는 안정성에 관련된 실수부만을 제시하였다. 센서의 개수가 3개인 경우 최적화된 성능지수가 오히려 최적화 전보다 증가한 이유는 불안정한 시스템을 안정화시켰기 때문이다. 모달필터의 오차만을 고려했으므로 안정성 면에서 꽤 좋아졌음을 볼 수 있다. 또한 모달필터 오차에 의한 응답성능 오차의 상한값도 훨씬 좋아졌음을 알 수 있다. Case 2의 결과는 Table 2에서 보여준다. 이때 가중상수의 값은 $\gamma_1 = 0.4$, $\gamma_2 = 0.3$, $\gamma_3 = 0.01$ 로 선정하였다. Case 1의 결과보다는 안정성 및 성능면에서 약간 떨어지지만 각 경우를 고려한 결과이므로 보다 좋은 성능을 보일 것으로 예상할 수 있다. 또한 센서의 개수를 2~10개로 변화시켜가면서 최적화를 수행한 결과 본 예제에서는 센서가 적어도 6개 이상일 때 좋은 결과를 보이고 있음을 알 수 있었다.

Table 1 Comparison of Optimized Sensor Placements, Real Part of Closed-loop Eigenvalues, Performance Indexes and Upper Bounds for Case 1

K	Before Optimization				After Optimization			
	Sensor Placements	Real Part of Eigenvalues	J	$\ \hat{H}\ $	Sensor Placements	Real Part of Eigenvalues	J	$\ \hat{H}\ $
3		-0.0721	2.8281	2.6887		-0.0627	2.8309	2.6915
	3.33	-0.2727			3.82	-0.2995		
	6.67	-0.3675			6.64	-0.3219		
	10.0	-0.0263			10.0	-0.0000		
		-0.0161				-0.0205		
	0.0088		-0.0000					
6	1.67	-0.0728	0.4546	0.4322	1.62	-0.0733	0.4307	0.4095
	3.33	-0.2974			3.33	-0.2934		
	5.00	-0.4038			4.99	-0.3986		
	6.67	-0.3905			6.67	-0.3757		
	8.33	-0.3509			8.35	-0.3386		
	10.0	-0.3698			10.0	-0.3605		
10	1.00		0.2223	0.2037	1.04		0.1753	0.1606
	2.00				1.97			
	3.00	-0.0727			3.00	-0.0729		
	4.00	-0.3032			3.99	-0.3031		
	5.00	-0.4308			5.00	-0.4286		
	6.00	-0.4461			5.99	-0.4410		
	7.00	-0.4291			7.00	-0.4216		
	8.00	-0.4009			8.00	-0.4101		
	9.00				9.00			
	10.0				10.0			

Table 2 Comparison of Optimized Sensor Placements, Real Part of Closed-loop Eigenvalues, Performance Indexes and Upper Bounds for Case 2

K	Before Optimization				After Optimization			
	Sensor Placements	Real Part of Eigenvalues	J	$\ \hat{H}\ $	Sensor Placements	Real Part of Eigenvalues	J	$\ \hat{H}\ $
3		-0.0721	1.8201	2.6887		-0.0653	1.7411	2.6992
	3.33	-0.2727			3.64	-0.2909		
	6.67	-0.3675			6.65	-0.3496		
	10.0	-0.0263			10.0	-0.0178		
		-0.0161				-0.0307		
	0.0088		-0.0000					
6	1.67	-0.0728	1.6591	0.4322	1.64	-0.0720	1.6372	0.4426
	3.33	-0.2974			3.38	-0.3012		
	5.00	-0.4038			5.02	-0.4093		
	6.67	-0.3905			6.68	-0.3832		
	8.33	-0.3509			8.33	-0.3552		
	10.0	-0.3698			10.0	-0.3643		
10	1.00		1.3038	0.2037	0.97		1.2833	0.2000
	2.00				2.00			
	3.00	-0.0727			3.00	-0.0725		
	4.00	-0.3032			4.00	-0.3014		
	5.00	-0.4308			5.01	-0.4320		
	6.00	-0.4461			6.01	-0.4509		
	7.00	-0.4291			7.01	-0.4332		
	8.00	-0.4009			8.02	-0.3927		
	9.00				9.00			
	10.0				10.0			

6. 결론

본 연구에서는 모달필터를 갖는 페루프시스템의 센서위치를 최적설계를 통하여 선정하였다. 모달필터 오차가 진동제어계의 안정성 및 성능에 미치는 영향을 해석하였고, 최적의 위치 선정을 통해 모달필터의 성능을 극대화 하였다. 본 연구에서 얻어진 주된 결과를 요약하면 다음과 같다.

(1) 모달필터 오차가 존재할 때 실제 페루프계가 Lyapunov 점근 안정성을 갖기 위한 필요충분조건식을 얻었다.

(2) 모달필터 오차가 진동제어 응답성능에 미치는 오차의 상한을 연산자이론을 사용하여 유도하였다.

(3) 모달필터의 성능을 극대화하는 성능지수를 이용하여 센서의 최적위치를 구하는 방법을 제시하였다.

(4) 모달필터의 성능을 고려한 센서의 최적위치는 비교적 균일한 분포를 하고 있으며, 센서의 수는 제어하고자 하는 모드의 수만큼 있으면 성능과 하드웨어 절감면에서 가장 적절한 것으로 많은 수치해석을 통해 일관되게 확인하였다.

참고 문헌

- [1] Meirovitch, L., and Baruh, H., 1981, "Effect of Damping on Observation Spillover Instability," *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 35, No. 1, pp. 31~44.
- [2] Meirovitch, L., and Baruh, H., 1982, "On the Problem of Observation Spillover in Distributed-Parameter Systems," *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 39, No. 2, pp. 319~341.
- [3] Meirovitch, L., and Baruh, H., 1985, "On the Implementation of Modal Filters for Control of Structures," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 8, No. 6, pp. 707~716.
- [4] Choe, K., and Baruh, H., 1993, "Sensor Failure Detection in Flexible Structures Using Modal Observers," *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 115, Sep., pp. 411~418.
- [5] Meirovitch, L., and Baruh, H., 1982, "Control of Self-

- Adjoint Distributed-Parameter Systems," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 5, No. 1, pp. 60~66.
- [6] Meirovitch, L., 1990, *Dynamics and Control of Structures*, John Wiley & Sons, New York.
- [7] Meirovitch, L., Baruh, H. and Oz, H., 1983, "A Comparison of Control Techniques for Large Flexible Systems," *J. Guidance and Control*, Vol. 6, pp. 302~310.
- [8] Hallauer, W.L. Jr., and Barthelemy, J.F.M., 1981, "Sensitivity of Modal Space Control to Nonideal Conditions," *Journal of Guidance and Control*, Vol. 4, 1981, pp. 564~566.
- [9] Meirovitch, L., and Baruh, H., 1983, "Robustness of the Independent Modal-Space Control Method," *Journal of Guidance and Control*, Vol. 6, pp. 20~25.
- [10] Hale, A.L., and Rahn, G.A., 1984, "Robust Control of Self-Adjoint Distributed-Parameter Structures," *Journal of Guidance and Control*, Vol. 7, pp. 265~273.
- [11] Baruh, H., and Silverberg, L., 1985, "Robust Natural Control of Distributed Systems," *Journal of Guidance and Control*, Vol. 6, pp. 717~724.
- [12] 황 재혁, 1993, "독립된 모달공간에서 분포계의 진동제어기법의 강인성," 한국항공우주학회지, 제21권 2호, pp. 37~49.
- [13] 황 재혁, 백 승호, 1994, " 독립된 모달공간에서 양 위치피드백 제어기법의 강인성," 한국소음진동학회지, 제 4권, 제 2호, pp. 177~185.
- [14] Hwang, J. H., Kim, D. M., Lim, K. H., 1996, "Robustness of Natural Controls of Distributed-Parameter Systems," *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 118, No. 1, pp. 56~63.
- [15] Meirovitch, L., 1980, *Computational Methods in Structural Dynamics*, Sijthoff & Noordhoff International Publishers B.V., Alphen aan den Rijn, The Netherlands.
- [16] Inman, D. J., 1989, *Vibration with Control, Measurement, and Stability*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- [17] Desoer, C. A. and Vidyasaga, M., 1975, *Feedback systems : Input-Output Properties*, Academic Press, New York.
- [18] Stakgold, I., 1979, *Green's Functions and Boundary Value Problems*, Wiley Interscience, New York.
- [19] Hallauer Jr., W. L. and Barthelemy, J. F. M., 1981, "Sensitivity of Modal-Space Control to Nonideal Conditions," *AIAA Journal of Guidance and Control*, Vol. 4, No. 5, pp. 564~566.
- [20] Baruh, H. and Choe, K., 1990, "Sensor Placement in Structural Control," *AIAA Journal of Guidance*, Vol. 13, No. 3, pp. 524~533.
- [21] Maghami, P. G. and Joshi, S. M., "Sensor-Actuator Placement for Flexible Structures with Actuator Dynamics," *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 16, No. 2, pp. 301~307