

## 최적제어를 이용한 경로점 유도 Waypoint Guidance using Optimal Control

황익호\*, 황태원\*\*

\*국방과학연구소 (Tel:+82-42-821-4413; Fax:+82-42-821-2224; E-mail: ickho@sunam.kreonet.re.kr)

\*\*국방과학연구소 (Tel:+82-42-821-4413; Fax:+82-42-821-2224; E-mail: twhwang@sunam.kreonet.re.kr)

**Abstract** Waypoint guidance is a technique used to steer an autonomous vehicle along a desired trajectory. In this paper, a waypoint guidance algorithm for horizontal plane is derived by combining a line following guidance law and a turning guidance law. The line following guidance is derived based on LQR while the turning guidance is designed using rendezvous problem. Through simulation, the proposed method shows a good performance.

**Keywords** Waypoint, Guidance, LQR, Rendezvous Problem, Optimal Control

### 1. 서론

경로점(Waypoint) 유도란 부인 비행체를 원하는 희망궤적(Desired Trajectory)에 따라 비행하도록 유도하는 방법들 중의 대표적인 것이다. 이 방법은 희망궤적위의 적당한 위치에 경로점들을 선정하고 비행체를 이 경로점 부근으로 순차적으로 이동시킴으로써 희망궤적과 유사한 비행궤적을 얻어내는 방법이다[2].

이와같은 경로점 유도를 구현하는 방법은 단지 경로점들만 고려하고 경로점 간의 이동궤적에 대한 제한을 두지 않는 경우와 경로점 간의 이동궤적도 원하는 형태가 되도록 제한을 두는 방법이 있을 수 있다. 이러한 방법들은 여러 가지 운용조건에 따라 결정될 수 있으나, 본 논문에서는 2차원 상의 운동에 대하여 경로점과 경로점들을 직선으로 이은 궤적을 따라 비행체를 비행시키는 방법을 고려하였다. 이 경우, 희망궤적은 연속된 직선들로 표현될 수 있으며 이것은 비행체의 예상 비행궤적을 예측하는데 매우 용이하므로 단시간에 여러 가지 희망 비행궤적을 시험하고 적합한 것을 선정하는 경우에 유용하게 이용될 수 있다.

한편, 연속된 직선들로 이루어진 희망궤적은 경로점 부근에서 급격한 방향전환을 요구하므로 희망궤적을 그대로 추종하여 비행체를 비행시키는 불가능하다. 따라서 본 논문에서는 직선을 따라 비행하기 위한 직선비행 유도법칙과 경로점 부근에서 방향전환을 위한 방향전환 유도법칙을 각각 유도하여 이들을 결합함으로써 경로점 유도 알고리즘을 구성하였다.

이와같은 두가지 유도법칙은 기준궤적과 비행체의 운동간의 기하학적 관계를 선형시스템으로 모델링하여 LQR(Linear Quadratic Regulator) 및 최적제어이론을 적용함으로써 유도되었다. 3장에서는 시뮬레이션을 통하여 이와같이 유도된 유도알고리즘의 성능을 검토하였다.

### 2. 최적제어를 이용한 경로점 유도 알고리즘

진술하였듯이 경로점 유도를 위해서는 경로점들을 잇는 직선을 따라 비행시키는 유도법칙과 경로점에서의 방향전환을 위한 유도법칙이 요구된다. 본 장에서는 수평면에 대한 경로점 유도를 수행하기 위하여 요구되는 직선비행과 방향전환의 두가지 유도

법칙을 유도하였다. 이들 유도법칙의 유도시 비행체의 속도는 일정하다고 가정하였다. 또한, 비행체의 받음각(Attack Angle)과 횡전각(Sideslip Angle)은 매우 작아 무시할 수 있으며 비행체의 기동가속도는 비행체 속도벡터에 수직방향으로 인가되는 것으로 가정하고 유도 법칙을 유도하였다.

#### 2.1 직선비행 유도 법칙

직선비행 유도 법칙은 두 개의 경로점을 잇는 직선을 따라 비행체가 비행하도록 하는 유도명령을 산출하는 것이다. 그림 1은 두 개의 경로점을 잇는 직선과 비행체의 운동간의 기하학적 관계를 수평면에서 도시한 것이다. 그림에서 W1과 W2는 연속된 두 개의 경로점이고, y는 두 경로점을 잇는 직선과 비행체와의 거리, Sm은 비행체의 속도벡터와 두 경로점을 잇는 직선이 이루는 각이다. 또한, Vg는 비행체의 수평속도의 크기(Ground Speed), a는 비행체의 가속도의 크기이며, 비행체의 가속도는 속도에 대하여 항상 수직으로 인가된다고 가정하였다.

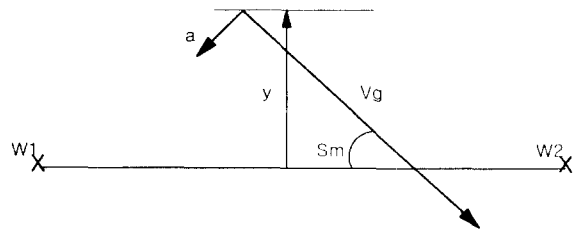


그림 1. 두 경로점을 잇는 직선과 비행체 운동과의 관계  
Fig. 1. Relation between missile motion and line connecting the two way points

이제 새로운 변수 S를  $S = V_g \cdot S_m$ 이라 정의하고 Vg가 상수라고 가정하면, 그림 1에서 다음과 같은 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$\dot{S} = V_g \cdot \dot{S}_m = V_g \cdot \frac{a}{V_g} \cdot a \quad (1)$$

$$\dot{y} = -V_g \cdot \sin S_m \quad (2)$$

한편,  $S_m$ 이 매우 작다고 가정하면 식 (2)는 다음과 같이 근사할 수 있다.

$$\dot{y} \approx -V_g \cdot S_m = -S \quad (3)$$

비행체의 횡운동 자동조종장치를 시정수  $\tau$ 를 가지는 1차 선형시스템으로 가정하면, 식 (1)과 (3)에 의하여 비행체의 운동은 다음과 같은 3차 선형미분방정식으로 표현할 수 있다.

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (4)$$

여기서  $x = \begin{bmatrix} S \\ y \\ a \end{bmatrix}$ ,  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\tau} \end{bmatrix}$  이다.

두 경로점을 잇는 직선을 따라 비행하는 것은  $s=0$ ,  $y=0$ 을 의미하므로, 경로점을 잇는 직선을 따라 비행체를 비행시키기 위한 직선비행 유도법칙은 식 (5)로 주어지는 비용함수  $J_1$ 를 최소화하는 LQR문제의 해로써 구해진다.

$$J_1 = \int_0^{\infty} (u^2 + x^T Q x) dt \quad (5)$$

여기서  $Q = \text{diag}(q_1, q_2, 0)$  이다.

이와같은 선형시스템에 대한 LQR문제의 해는 상태변수 변환 형태로 주어짐이 잘 알려져 있으며, 변환이득을 구하는 좋은 방법들이 많이 개발되어있다[3]. 또한, 식 (4)에서 고려한 상태변수들은 공간에서 비행체의 위치와 비행 속도 및 비행체의 기동 가속도에 의하여 결정되는 항이며, 이 물리량들은 일반적인 항법시스템에 의하여 측정이 가능하다는 사실을 감안하면, 유도법칙을 실제로 구현하는 데에도 큰 어려움이 없으리라 예상된다.

## 2.2 방향전환 유도 법칙

방향전환 유도 법칙은 경로점 부근에서 비행체의 방향전환을 위한 유도명령을 계산하여 인가함으로써 비행체가 다음번 경로점을 향하도록 비행방향을 변화시키기 위한 것이다. 이러한 방향전환은 비행체가 어떤 목표점에 원하는 입사각을 가지고 진입하기 위한 유도명령을 구함으로써 유도할 수 있다.

비행체가 일정한 속도  $V_g$ 를 유지하면서 주어진 관성좌표계에 대하여  $S'_m$ 의 각도로 비행하고 있다고 가정하자. 비행체가 목표점 A에 입사각  $S_f$ 로 진입하기를 원한다면 비행체의 운동과 A점과의 관계는 그림 2와 같이 도시할 수 있다. 비행체 운동방정식을 구하기 위하여  $S' = V_g(S'_m - S_f)$ 라 정의하고,  $z$ 는 기울기  $S_f$ 를 가지고 A점을 지나는 직선과 비행체의 현재 위치와의 거리라 하자. 이제 비행체의 가속도  $a$ 는 항상 속도에 대하여 직각으로 인가되며,  $S_m$ 과  $S_f$ 가 거의 비슷하다고 가정하면, 그림 2로부터 다음과 같은 비행체의 운동방정식을 구할 수 있다.

$$\dot{z} = V_g \sin(S'_m - S_f) \approx V_g(S'_m - S_f) = S' \quad (6)$$

$$S' = V_g S'_m = a \quad (7)$$

한편, 비행체가 A점에 입사각  $S_f$ 를 가지고 진입한다는 것은 이

던 시간  $t_f$ 에  $z(t_f)=0$ ,  $S'(t_f)=0$ 인 것을 의미하므로, 결국 방향전환 유도 법칙은 식 (6)과 식 (7)에 대하여 다음과 같은 비용함수  $J_2$ 를 최소화하는 최적화 문제로 고려할 수 있다.

$$J_2 = \frac{q_z}{2} [z(t_f)]^2 + \frac{q_s}{2} [S'(t_f)]^2 + \int_0^{t_f} [a(t)]^2 dt \quad (8)$$

여기서  $q_z$ 와  $q_s$ 는 큰 값을 가지는 양수이다.

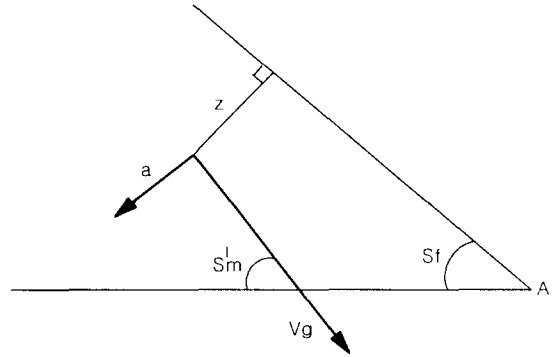


그림 2. 목표점 A에 입사각  $S_f$ 로 진입할 때의 비행체의 운동  
Fig. 2. Motion of a missile closing to the point A with incidence angle  $S_f$

이와 같은 최적화 문제는 잘 알려진 Rendezvous Problem으로서 그 해는 다음과 같음이 알려져 있다.[1]

$$a(t) = -\frac{1}{\Delta(t_{go})} \left[ \left( \frac{t_{go}}{q_s} + \frac{t_{go}^2}{2} \right) z(t) + \left( \frac{1}{q_z} + \frac{t_{go}^2}{q_s} + \frac{t_{go}^3}{3} \right) S'(t) \right] \quad (9)$$

여기서  $\Delta(t_{go}) = \left( \frac{1}{q_z} + \frac{t_{go}^2}{3} \right) \left( \frac{1}{q_s} + t_{go} \right) - \frac{t_{go}^4}{4}$  이다.

한편, 식 (9)는 목표점까지의 도달시간(time-to-go)  $t_{go}$ 의 함수로 주어지므로, 위의 해를 이용하기 위해서는  $t_{go}$ 의 추정이 요구된다. 이러한 도달시간의 추정은 비행체의 회전운동 등을 고려하여 선정하는 등 여러 가지 방법이 있을 수 있으나[4], 본 논문에서는 간단히 목표점과 비행체까지의 거리를 비행체의 속력으로 나눈 값을 이용하였다.

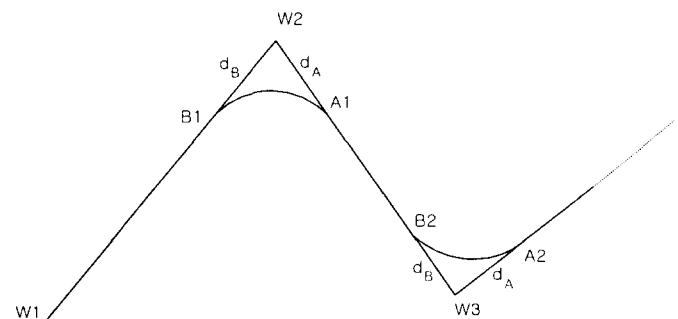


그림 3. 경로점 유도 방법  
Fig. 3. Waypoint Guidance

그림 3은 2.1절과 2.2절에서 유도된 두가지 알고리즘을 이용하여 경로점 유도를 구현하는 방법을 설명하기 위한 것이다. 그림에서 W1, W2, W3은 경로점을 의미하며, 이 점들을 잇는 직선이 기준궤적이 된다. W1을 출발한 비행체는 W2에서  $d_B$ 만큼 떨어진 점 B1까지 2.1절의 직선비행 유도 알고리즘을 이용하여 비행한다. 비행체가 B1점에 도착하면 A1점을 목표점으로 하고 W3을 지향하는 방향을 입사각  $Sf$ 로 하는 방향전환 유도 알고리즘을 이용하여 비행한다. 비행체가 A1점 근방에 도달하면 W2와 W3을 잇는 직선을 따라서 비행체가 비행하도록 다시 직선비행 유도 알고리즘을 적용하여 비행체를 유도한다. 이와같은 과정을 모든 경로점에 대하여 순차적으로 적용하면 경로점 유도 알고리즘을 얻을 수 있다.

### 3. 시뮬레이션 결과

본 장에서는 시뮬레이션을 통하여 2장에서 유도한 경로점 유도 알고리즘의 성능을 검토하였다. 시뮬레이션시 비행체의 속도는 Mach 0.9로 가정하였으며, 자동조종장치(Autopilot)는 시정수  $\tau = 0.15$ 를 가지는 1차 시스템으로 가정하였다.

직선비행 유도 알고리즘은 2.1절의 설명대로 LQR문제의 근을 이용한 상태변수 궤환형태로 구현하였으며, 이 경우 궤환이득은  $q_1 = 0.1$ ,  $q_2 = 0.001$ 의 가중치를 가지는 LQR문제를 MatLab을 이용하여 풀 해를 이용하여 선정하였다. 방향전환 유도 알고리즘은 비행체의 비행방향을 중요시하여 설계하였으며, 이를 위하여  $q_z = 10$ ,  $q_s = 1000$ 의 가중치를 선정하였다. 또한, 방향전환 유도 알고리즘을 위한 목표점(2.2절의 A점)은 그림 3에서  $d_A = 3000$  [m]일 때의 점으로 선정하였다. 직선비행 유도에서 방향전환 유도로의 전환은 목표 경로점에서 3[Km] 떨어진 곳까지 비행체가 접근한 경우(즉,  $d_B = 3000$  [m]인 경우)에 이루어지며, 방향전환 유도에서 직선비행 유도로의 전환은 회전이 충분히 진행되어 비행체의 속도벡터의 방향이 다음번 경로점을 바라보는 방향과 5도 이내가 되었을 때 이루어진다.

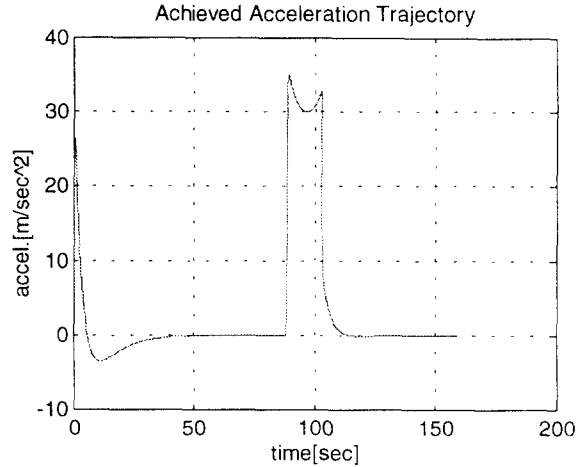
제안된 유도 알고리즘의 성능을 검토하기 위하여 두가지 시나리오에 대하여 시뮬레이션을 수행하였다. 첫 번째 시나리오는 (10Km, 0Km), (10Km, 30Km), (30Km, 30Km)의 세 개의 경로점에 의하여 구성되는 희망궤적에 대하여 수행되었다. 이 경우 비행체의 초기위치는 (9Km, 0Km)로서 첫 번째 경로점과 1Km의 오차를 가지며 초기속도벡터의 방향은 Y축 방향이다. 두 번째 시나리오는 첫 번째와 대부분의 조건이 같으나 경로점에서 속도벡터가 회전하여야 할 각도가 첫 번째 시나리오의 90도 보다 큰 135도가 되도록 마지막 경로점(10Km, 30Km)로 정한 것만이 다르다.

그림 4와 그림 5는 위와같은 두 가지 시나리오에 대한 시뮬레이션 결과이다. 비행궤적에 대한 그림에서 점선은 희망궤적을 표시하고, 실선은 실제 비행궤적을 표시한다. 그림을 살펴보면 제안된 알고리즘이 희망궤적을 잘 추종하도록 비행체를 유도할 뿐만 아니라, 초기오차도 잘 제거함을 알 수 있다.

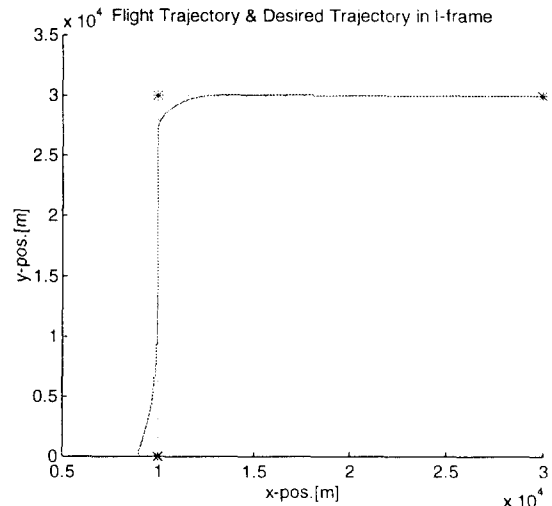
한편, 위에서 유도한 두가지 유도 법칙을 이용하여 경로점 유도 알고리즘을 구성하는 경우, 직선비행 유도는 비행체 자동조종장치의 시간지연을 고려한 반면, 방향전환 유도는 시간지연을 고려하지 않고 유도하였다. 위에서 수행한 시뮬레이션은 자동조종장치 시정수가 0.15초인 경우이므로 이러한 시간지연 고려에 대한 영향이 잘 드러나지 않는다. 따라서 제안된 알고리즘의 자동

조종장치의 시정수에 대한 영향을 검토하기 위하여 자동조종장치 시정수가 1초인 경우에 대하여 그림 4의 경로점을 이용하여 시뮬레이션을 수행하였다. 그림 6은 이 경우에 대한 시뮬레이션 결과이다.

그림을 살펴보면 회전시 가속도가 지연되어 인가되므로 가속도의 형태가 변화하였음을 볼 수 있지만, 전체적으로 양호한 성능을 유지함을 알 수 있다. 그 이유는 회전을 마치고 다음번 직선(두번째와 세 번째 경로점을 잇는 직선)에서의 직선비행 유도 법칙이 회전시 발생한 오차를 잘 제거하여 주었기 때문으로 생각된다.

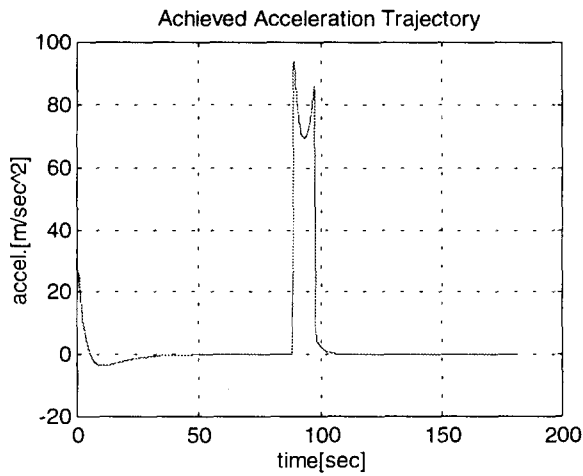


(a) 첫 번째 시나리오에 대한 성취 가속도  
(a) Achieved acceleration

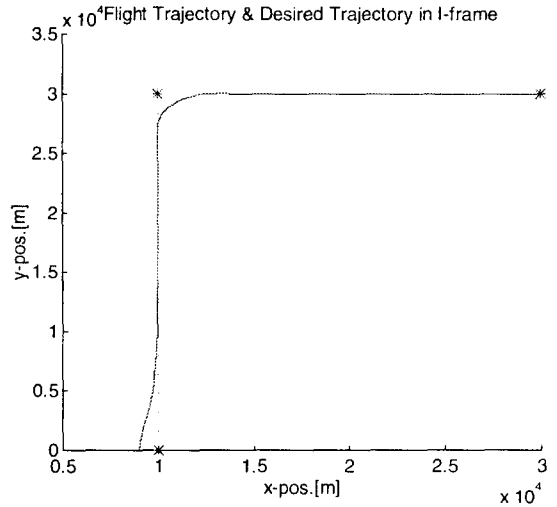


(b) 첫 번째 시나리오에 대한 희망궤적 및 비행궤적  
(b) Desired trajectory & Flight Trajectory

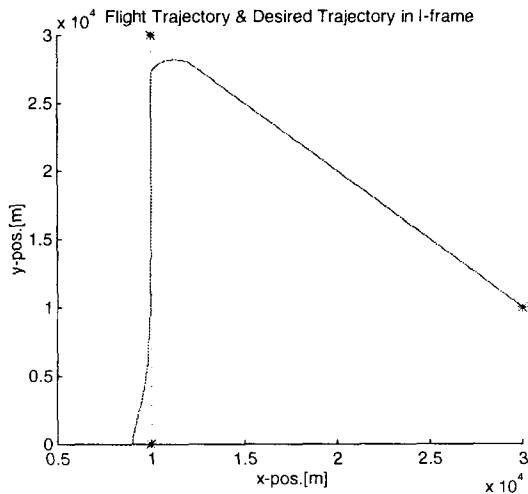
그림 4. 첫 번째 시나리오에 대한 시뮬레이션 결과  
Fig. 4. Simulation result for the 1st scenario



(a) 두 번째 시나리오에 대한 성취 가속도  
(a) Achieved acceleration

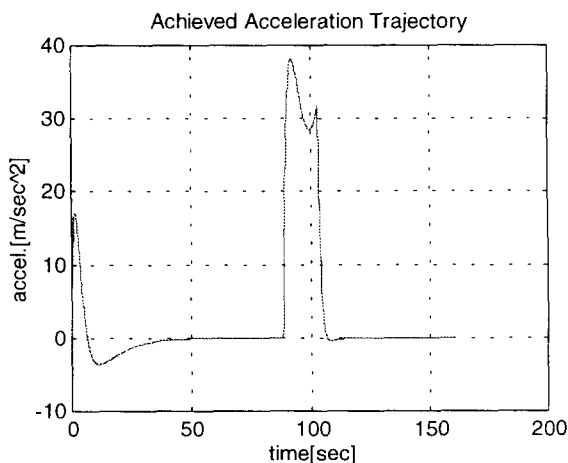


(b) 시간지연이 있는 경우에 대한 희망궤적 및 비행궤적  
(b) Desired trajectory & Flight Trajectory



(b) 두 번째 시나리오에 대한 희망궤적 및 비행궤적  
(b) Desired trajectory & Flight Trajectory

그림 5. 두 번째 시나리오에 대한 시뮬레이션 결과  
Fig. 5. Simulation result for the 2nd scenario



(a) 시간지연이 있는 경우에 대한 성취 가속도  
(a) Achieved acceleration

그림 6. 시간지연이 있는 경우에 대한 시뮬레이션 결과  
Fig. 6. Simulation result for the A/P delay case

#### 4. 결론

본 논문에서는 경로점을 잇는 직선을 따라 비행체가 비행하도록 하기 위한 직선비행 유도법칙과 경로점 부근에서의 방향전환을 위한 방향전환 유도법칙을 결합함으로써 경로점 유도 알고리즘을 구성하였다. 직선비행 유도법칙은 경로점을 잇는 직선과 비행체의 운동간의 관계를 선형시스템으로 모델링하여 LQR이론을 적용함으로써 구하였으며, 방향전환 유도법칙은 주어진 문제를 비행체의 운동을 최적제어문제의 대표적인 형태중 하나인 Rendezvous Problem 형태로 수식화 함으로써 유도하였다. 시뮬레이션 결과 제안된 알고리즘은 여러 가지 상황에 대하여 우수한 성능으로 희망궤적을 추종할 수 있음을 보여주었다.

#### 참고문헌

- [1] A. E. Bryson, Jr. & Yu-Chi Ho, *Applied Optimal Control*, John Wiley & Sons, 1975.
- [2] F. J. Perdereauville, *Geometric Considerations for a Waypoint Guidance Method*, Technical Report, Sandia National Laboratories, Sep. 1989.
- [3] B. Shahian & M. Hassul, *Control System Design Using MatLab*, Prentice Hall, 1993.
- [4] 김응근, "유도탄의 Time-to-go 예측 항상 방안," 한국항공우주학회 추계학술발표회 논문집, 1993. 11.