

보간법을 이용한 H_∞ 상태 추정기 설계

Design of H_∞ State Estimator Using Interpolation Method

이 규 원

*관동대학교 전자정보통신공학부(Tel: 0396-670-3396; E-mail: kwlee@kdcce.kwandong.ac.kr)

ABSTRACT For system state estimation, existing LMS type estimators are widely used. For example Kalman filter is one of them. In this paper, a state estimator is derived for the H_∞ norm of the estimation error spectrum matrix to be minimized. For the solution of this problem, classical NP interpolation problem is used. Also, by deriving the duality between the filter problem and the well-known H_∞ control problem, another solution is obtained. The computer simulation results show that H-estimator has less estimation error and so this is better than the existing Kalman filter estimator.

Keywords NP interpolation, H_∞ filter, Kalman filter, state estimation

1. 서론

상태추정을 위해서는 l_2 개념을 사용하고 있는 Kalman filter 를 많이 사용하고 있다. 수렴성과 시간영역에서 반복법에 의한 간편한 계산이 가능하다는 장점을 가지고 있다. 한편 80년대부터 시작되고 있는 H_∞ 제어에 대한 연구가 Glover, Doyle, Francis 등의 연구자들에 의해 활발히 진행되어 왔다[1],[2]. 이에 따라 또 다른 상태 추정방법의 하나로 H_∞ 제어와의 등가성을 고려하여, 표준 H_∞ 제어의 알고리즘을 적용하여 해를 구하는 H_∞ 추정쪽으로도 연구가 동시에 진행되어 왔다[3]. 등가성 개념을 적용하는 방법과는 별도로, Nevanlinna-Pick 보간문제를 사용하여 식별에 사용하는 연구가 있어 왔는데, 초기에는 Kimura가 이를 사용하여 전달함수의 견실성(robustness) 분석에 이용하였고[4]. 더 나아가서, 이 보간법을 순환형으로 사용하게 확장하여 모든 가능한 해에 대한 파라미터화를 시도하였다[5]. N-P 보간법은 해를 unit함수 형태로 표시되기 때문에 H_∞ 문제에 유용하기 쓰이고 있다.

본 연구에서는 편의상 연속계 시스템을 예로 들어서, 시스템 입력과 오차출력간의 전달함수를 설정하고 이의 전력스펙트럼 밀도함수의 H_∞ norm을 최소화하도록 필터를 설계한다. 이를 실현하기 위해서 H_∞ norm의 최소값에 따른 조건을 만들고, 여기에 N-P보간법을 적용할 수 있도록 식을 변형한다. 구한 필터 식에서 근사값을 적용하여 간단한 형태를 구한다. 아울러 이를 등가성 개념에 의하여 얻은 H_∞ 필터결과와 비교한다. 이들

H_∞ 필터들은 Kalman 필터의 결과와 비교하여 추정오차가 감소됨을 시뮬레이션을 통해서 보인다. 또 시스템은 stationarity를 가정하여 간단하게 대수 리카티 방정식의 해만 사용하도록 한다.

2. 문제설정

사용되는 전체시스템 블록도는 그림 1과 같다. 여기서 시스템 방정식은 다음과 같다

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bw, \quad y = Cx, \quad z = y + n \\ \text{단, } x &\in R^n, y \in R^m, w \in R^q \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 x 는 상태, y 는 출력, z 는 측정출력, w 와 n 은 서로 uncorelated되어 있는 평균 0, 분산 1인 stationay한 백색잡음이며, 출력 z 는 잡음 n 이 시스템의 실제출력 y 에 부가되어서 나타난다. 또 (C,A)는 가관측이고 (A,B)는 가제어라고 가정한다. 이 블록도에서 C_1x 를 잘 추정하여 오차 e 의 값이 최소로 되도록 하고자 한다. 따라서 H를 실현하고자 하는 어떤 추정기가 된다. 결국에는 H를 구하는 것은 출력 e 가 최소로 되는 보다 성능이 좋은 필터를 구하는 것과 같은 문제가 된다.

2.1 Kalman 필터

추정오차의 RMS평균전력을 최소화하도록, causal이며 선형인 필터, 즉 Kalman 필터를 설계한다[6]. 입출력 잡음입력에서 오차간의 전달함수를 R이라 할 때, $\|R\|_{2, [0, T]}$ 를 최소화 하도록 필터

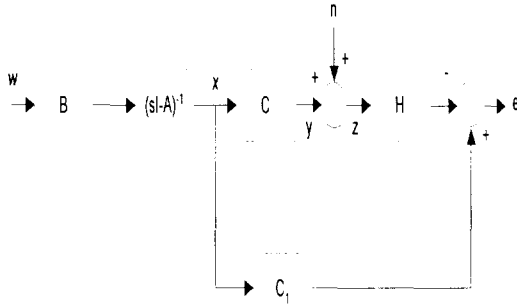


그림 1 추정시스템 블록도.

Fig. 1 Estimation system block diagram.

를 구한다.

2.2 H_∞ 추정기

H_∞ 추정기는 추정오차 전력스펙트럼행렬의 H_∞ norm을 최소화하기 위한 것이 목적이다[6]. 실현 방법으로는 Doyle등이 제시한 ARE(Algebraic Riccati Equation)의 해에서 얻은 상행렬(constant matrix)을 이용하여 상태가 완전하게 측정됨을 보였는데[1], 스칼라 및 다변수에 대한 연구가 동시에 진행되어 결과를 내고 있고, H_∞ 최소화 문제는 [3]-[7]등에서 다루고 있다.

한편 그림1에서

$$G = C(sI - A)^{-1}B, G_1 = C_1(sI - A)^{-1}B, T = [G_1 - HG \quad -H]$$

$$\text{단, } e = T \begin{bmatrix} w \\ n \end{bmatrix} \quad (2)$$

와 같이 정의할 수 있으며, 따라서 필터설계문제는 $T(s)T'(-s) = TT^H$ 를 최소화하는 문제와 같다. 또 등가성 유도를 위해서, H_∞ 제어문제에서 고려하는 시스템 방정식은

$$\dot{x} = Ax + B_1w + B_2u, z = C_1x + Du$$

$$\text{단, } x \in R^n, u \in R^m, z \in R^q \quad (3)$$

로 두고, (A, B_2) 가 제어, (C_1, A) 가 관측을 가정한다. $u = -Kx$ 형태의 제어를 구하고자 한다고 할 때 관심이 있는 잡음입력에서 측정출력간의 전달함수는

$$T_{zw} = [C_1 - DK(s)][sI - A + B_2K(s)]^{-1}B_1 \quad (4)$$

이다.

2.3 등가성 유도

한편, 제어문제와 필터문제의 등가성을 유도하기 위해서, (2)에서 정의된 T를 사용하여, TT^H 를 구하면 다음이다.

$$TT^H = [G_1 - HG \quad -H] \begin{bmatrix} G_1^H - G^H H^H \\ -H^H \end{bmatrix}$$

$$= G_1 G_1^H - H G G_1^H - G_1 G^H H^H + H \Delta \Delta^H H^H \quad (5)$$

$$= [H \Delta - G_1 G^H (\Delta^H)^{-1}] [\Delta^H H^H - \Delta^{-1} G G_1^H] + \Phi_1$$

$$\text{단, } \Delta \Delta^H = I + G G^H, \Phi_1 \equiv G_1 (I_o + G^H G)^{-1} G_1^H$$

또 참고문헌[7]에 따르면 위식의 H_∞ norm의 최소값은 $\|TT^H\|_\infty = \lambda_m^2 I$ 형태임을 다항식을 사용하여 증명하였는데, 이를 고려하면 위식에서

$$H \Delta - G_1 G^H (\Delta^H)^{-1} = G_1 \Delta_1 U$$

$$\text{단, } U U^H = I, \Delta_1 = \lambda_m^2 G_1^{-1} (G_1^H)^{-1} - (I + G^H G)^{-1} \quad (14)$$

이면 된다. 이 식을 (5)에 대입하고 정리한 후 (4)를 이용한 결과와 비교하면 (A, B, C, C_1) 과 (A', C_1', B_2', B_1') 의 차이임을 알 수 있는데 이 결과로부터, H_∞ 제어문제의 해법을 H_∞ 필터문제에 적용할 수 있음을 알 수 있다. 여기서 U는 unit함수이다. 또 (6)으로부터 H_∞ 필터의 전달함수는 다음과 같다.

$$H = G_1 [\Delta_1 U + G^H (\Delta^H)^{-1}] \Delta^{-1} \quad (7)$$

3. H_∞ 추정기 설계

3.1 NP 문제에 의한 설계

한편 (6)에서 Δ^H 를 뒤에서 곱하면

$$[H \Delta - G_1 G^H (\Delta^H)^{-1}] \Delta^H = G_1 \Delta_1 U \Delta^H \quad (8)$$

이고, 여기서 $\Delta \Delta^H$ 의 RHP근 α_i 를 사용하여 보간하면

$$-G^H(\alpha_i) = \Delta_1 U \Delta^H(\alpha_i) \quad (9)$$

이다. 실제로는 (9)에서 U를 못 구하는데, 그 이유는 우반면 근이 Δ^H 에서 나오기 때문이다. 따라서 $\Delta \Delta^H \equiv \tilde{\Delta} \tilde{\Delta}^H$ 를 정의하는데, $\tilde{\Delta}$ 는 RHP에 영점을 갖도록 설정하고, U를

$$U \equiv U_1 \tilde{\Delta}^H (\Delta^H)^{-1} \quad (10)$$

와 같이 정의하면, U_1 을 구할 수 있고, 순차적으로 U, H 즉 H_∞ 를 구할 수 있다.

3.2 등가성에 의한 설계

다음 Hamiltonian행렬이 허축상에 고유치를 갖지 않고, 다음 Riccati 방정식이 양의 해를 갖게 하는 최소 λ 값에서의 해를 사용하여, H_∞ 제어문제의 해를 구한다[1],[6].

$$H_\infty = \begin{bmatrix} A & \lambda^{-2} B_1 B_1' - B_2 B_2' \\ -C_1' C_1 & -A' \end{bmatrix}$$

$$A' X_\infty + X_\infty A + X_\infty (\lambda^{-2} B_1 B_1' - B_2 B_2') X_\infty + C_1' C_1 = 0 \quad (11)$$

이 때, 제어 u 는

$$u = -K_{\infty}x = -(B'X_{\infty})x \quad (12)$$

이다. 한편 앞서 등가성개념을 사용한 경우의 Hamiltonian과 해당되는 Riccati방정식은

$$\begin{aligned} H_F &= \begin{bmatrix} A' & \lambda^{-2}C_1'C_1 - C'C \\ -BB' & -A \end{bmatrix} \\ AP_{\infty} + P_{\infty}A' + P_{\infty}(\lambda^{-2}C_1'C_1 - C'C)P_{\infty} + BB' &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

와 같고, 상수이득 행렬 K_{∞} 는 앞서 등가성을 또 고려하면

$$K_{\infty} = P_{\infty}C \quad (19)$$

이고, 필터의 전달함수는 역시 등가성개념에 의해 구성하면

$$H = C_1(sI - A + K_{\infty}C)^{-1}K_{\infty} \quad (20)$$

이 되고, 이를 블록도로 구성하면 다음 그림 2과 같다.

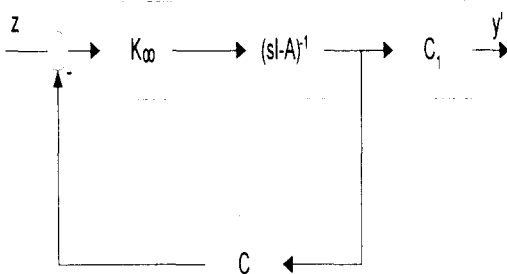


그림 2 H_{∞} 추정기의 블록도.

Fig. 2 H_{∞} estimator block diagram.

4. 시뮬레이션

본문에서 주어진 식(1)에 사용할 시스템 행렬은

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, B = 25 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, C = [-1 \ 2 \ 1] \\ C_1 &= [1 \ 1 \ -1] \end{aligned} \quad (16)$$

으로 한다. 그림 3에서 (a)는 시스템 출력을, (b)는 평균 0, 분산 1인 백색잡음이다. (11)을 만족하는 최소 λ 를 상한, 하한을 설정한 후, 이분법에 의해 시행착오로 구하면 $\lambda_m = 19.7013$ 이다.

4.1 Kalman filter의 결과

연속계 Kalman filter의 알고리즘을 사용하여 구한 필터의 전달함수는

$$H_k = -16.9012 \frac{s^2 + 5.1195s + 5.7573}{s^3 + 8.6391s^2 + 30.3167s + 50.3587} \quad (17)$$

이고, 이를 사용하여 그림 1에서의 출력은 그림 4(b)이다. 또 비교를 위해서 구한 평균절대치 추정오차값은 16.4786이며, 최적필터로 알려져 있는 것처럼 출력을 비교적 잘 추정하고 있다.

4.2 H_{∞} 추정기의 결과

4.2.1 등가성에 의한 결과

우선 (13)식을 풀어서 얻은 해인 P_{∞} 는

$$P_{\infty} = 10^9 \begin{bmatrix} -2.5415 & -1.7428 & 1.2237 \\ -1.7428 & -1.1951 & 0.8391 \\ 1.2237 & 0.8391 & -0.5092 \end{bmatrix} \quad (18)$$

이고, (14)식의 상수 필터이득은 위의 값을 사용하여 구하면

$$K_{\infty} = 10^8 [2.7958 \quad 1.9172 \quad -1.3461]^T \quad (19)$$

이다. 이를 사용하여 그림 2의 전달함수 즉 H_{∞} 추정기의 전달함수 식은

$$H = -19.7013 \frac{s^2 + 4.2393s + 4.1621}{s^2 + 8.7137s + 25.8950} \quad (20)$$

이고, 이 전달함수를 사용하여 구한 출력은 그림 1을 참고로 하면 그림 4(c)이며, 이 때 비교를 위해서 계산한 평균절대치 추정오차는 14.3767로서, 앞서 구한 Kalman filter의 경우보다는 약 13%정도 작아져 개선되었음을 알 수 있다. 전체적으로 Kalman filter의 결과와 비교할 때 그림 5의 오차를 보면 H_{∞} 의 경우가 대부분의 시행시간에서 0에 더 가까움을 알 수 있다.

4.2.2 NP 보간법에 의한 결과

한편 (10)의 U 는

$$U = -\frac{s^5 - 0.1s^4 - 19.1s^3 + 9.9s^2 + 346.2s + 1304.0}{s^5 + 0.1s^4 - 19.1s^3 - 9.9s^2 + 346.2s - 1304.0} \quad (21)$$

이고, 이를 사용한 추정기는

$$H_{\infty} = -19.7013 \frac{s^2 + 4.2393s + 4.1621}{s^2 + 8.7137s + 25.8950} \quad (22)$$

이며, 등가성에 의한 결과와 동일하다.

5. 결론

l_2 개념을 사용하고 있는 Kalman 필터의 경우와 H_{∞} 개념을 사용한 추정기의 추정성능을 비교한 결과로 얻은 결론은 다음과 같다.

- 안정성이 보장되어 있는 NP보간법을 사용하여 설계한 결과, 추정오차가 감소
- 등가성을 유도함으로써 기존의 잘 정의된 H_{∞} 제어문제 해를 사용하여 얻은 결과와 보간법에 의한 결과는 동일.
- 100샘플 실행결과 H_{∞} 추정기는 앞서 2경우가 동일하게 평균절대치오차값이 14.38로, 추정성능이 좋은 것으로 많이 사용되

는 기존의 Kalman 추정기를 사용한 경우의 16.49에 비하여 13% 정도 오차가 감소되어 추정 성능이 개선됨.

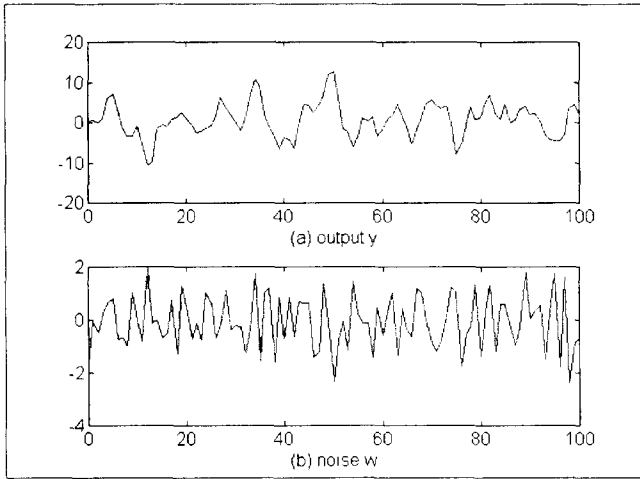


그림 3 출력 및 잡음.
Fig. 3 Output and noise signals.

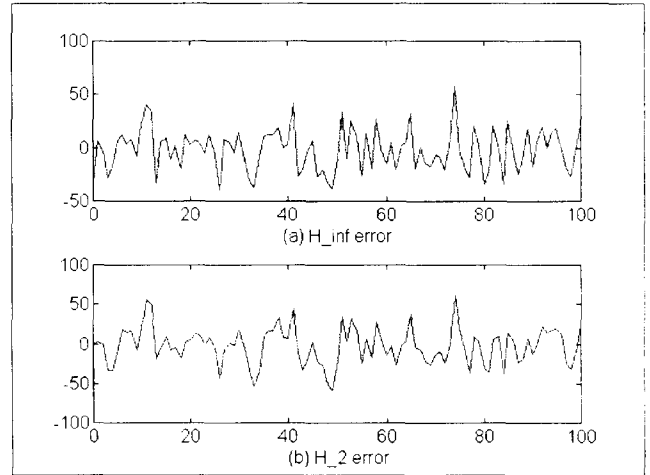


그림 5 추정오차.
Fig. 5 Estimated errors.

* 본 연구는 1997학년도 관동대학교 학술연구비 지원에 의한 결과임.

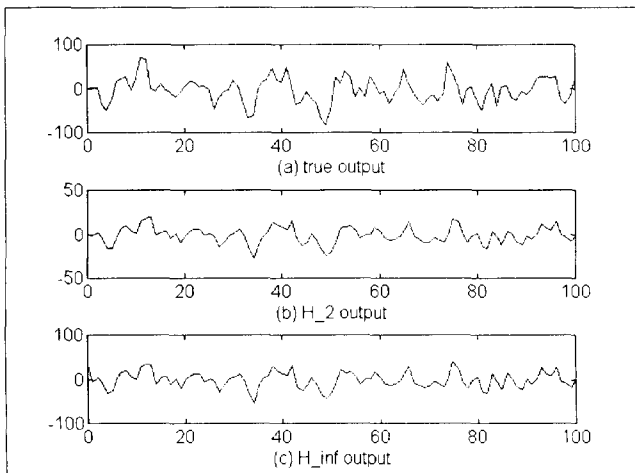


그림 4 추정된 출력.
Fig. 4 Estimated output.

참고문헌

- [1] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar, B. A. Francis "State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems", *IEEE trans. on Automat. Contr.*, vol. 34, pp.831-847, 1989.
- [2] John C. Doyle, Bruce A. Francis and Allen R. Tannenbaum, *Feedback Control Theory*, Macmillan Pub. Co., 1992.
- [3] U. Shaked, " H_∞ -Minimum Error State Estimation of Linear Stationary Processes," *IEEE trans. on Automat. Contr.*, Vol. 35, No. 5, 1990.
- [4] Hidenori Kimura, "Robust Stability for a Class of Transfer Functions," *IEEE trans. on Automat. Contr.*, Vol. 29, No. 9, Sep. 1984.
- [5] Hidenori Kimura, "Directional Interpolation Approach to H_∞ -Optimization and Robust Stabilization," *IEEE trans. on Automat. Contr.*, Vol. 32, No. 12, Dec. 1987.
- [6] Michael Green and David J. N. Limebeer, *Linear Robust Control*, Prentice Hall International, Inc., 1995.
- [7] Huibert Kwakernaak, " Minimax Frequency Domain Performance and Robustness Optimization of Linear Systems," *IEEE trans. on Automat. Contr.*, Vol.30, pp. 994-1004, 1985.