Proceedings of the 12th
KACC, October 1997

부정 내적 공간에서의 H^∞ 필터의 일반화를 통한 분산 H^∞ 상태 추정기의 설계

Design of Decentralized H^∞ State Estimator using the Generalization of H^∞ Filter in Indefinite Inner Product Spaces

[0]김경근*,진승희*,윤태성**,최윤호***, 박진배*

* 연세대학교 전기공학과(Tel:+82-2-361-2773;Fax:+82-2-392-4230; E-mail;jbpark@bubble.yonsei.ac.kr)
** 창원대학교 전기공학과(Tel:+82-551-79-7513;Fax:+82-551-63-9956; E-mail:tsyoon@sarim.changwon.ac.kr)
*** 경기대학교 전자공학과(Tel:+82-331-40-7826;Fax:+82-331-255-8347; E-mail:yhchoi@kuic.kyunggi.ac.kr)

Abstracts We propose a decentralized state estimation method in the multisensor state estimation problem. The proposed method bounds the maximum energy gain from unknown external disturbances to the estimation errors in the suboptimal case. And we formulate alternative H^∞ filter gain equations with the idea that the suboptimal H^∞ filter is the special form of Kalman filter whose state equations are defined in indefinite inner product spaces. Using alternative filter gain equations we design the decentralized H^∞ state estimator which is composed of local filters and central fusion filter that are suboptimal in the H^∞ sense. In addition, the proposed update equations between global and local data can reduce unnecessary calculation burden efficiently.

Keywords Indefinite inner product spaces, decentralized estimation, H^∞ filter, multisensor data fusion.

1. 서 론

상태 추정 문제에 있어서 최적 추정자인 칼만 필터링 알고리듬은 전역적으로 최적의 해를 제공하지만 시스템의 상태 변수가 많아지는 다중 센서 상황에서의 상태 추정 문제에서는 높은 데이터 전송률 등의 문제가 발생하게 된다. 따라서 실시간 문제에 적합하지 않으며 또한 하나의 필터만을 쓰기 때문에 고장에 강인하지 못하다[7]. 이러한 다중 센서 상황에서의 상태 추정 문제를 해결하기 위하여 근래에는 분산 상태 추정 기법에 관한 연구가 많이 진행되고 있다[3][12][9]. 이러한 분산 상태 추정 기법은 그 자체의 병렬적인 구조에 의하여 고장에 강인하며 각각의 지역 센서에서의 데이터를 지역 필터에서의 필터링 과정을 거친 후 중앙의 필터로 전송하기 때문에 정보의 전송에 있어서 대역폭을 줄일 수 있어 실시간 상태 추정 문제에 적합하다. 하지만 기존의 분산 상태 추정 기법은 칼만 필터링 기법에 기반을 두고 있기 때문에 시스템에 대한 사전 정보가 불확실한 경우, 즉 시스템의 외부 잡음의 통계적 특성에 대한 정보가 불분명하거나 시스템 모델링에 있어 오차가 있는 경우 추정 오차가 크게 생길 수 있다[2][10]. 최근들어서는 자율 이동 로봇 등의 항법 장치에서의 분산 상태 추정 기법에 있어 이러한 문제에 대응하기 위하여 강인성에 대한 요구가 증가하고 있으며[6] 또한 [5]에서는 외부 잡음의 공분산 변화를 고려한 강인한 데이터 융합에 대한 방법론을 제시하고 있다.

본 논문에서는 외부 잡음에 대한 통계적 특성이 불분명한 가운데 실시간 문제 및 고장에 강인한 다중 센서 상황에서의 상태 추정 문제를 위하여 분산 H^∞ 상태 추정 기법을 제안한다. 기존의 분산 상태 추정 기법에서는 각각의 지역 필터 및 중앙의 융합 필터가 H^2 norm의 관점에서 최적인데 비하여 제안하는 분산 H^∞ 상태 추정 기법 기법에서는 각각의 지역 및 중앙 융합 필터가 H^∞ norm의 관점에서 준최적하다. 이러한 분산 H^∞ 상태 추정 기법을 개발하기 위하여 본 논문에서는 준최적 H^∞ 상태 추정 문제가 특정한 스칼라 이차 함수의 최소화를 통한 부정 내적 공간 (indefinite inner product spaces) 상에서의 일반적 칼만 필터 문제임[2]에 착안하여 변형된 칼만 이득 방정식의 계산에 사용되어진 기존의 Information form 행렬[1]을 응용하여 변형된 H^∞ 필터의 이득 방정식을 제안한다. 또한 이를 이용하여 전역 모델과 지역 모델이 다른 경우에 대하여 지역 및 중앙 융합 필터의 상태 추정치 및 Riccati 방정식의 해 사이에의 효율적인 시간 갱신 방정식으로 구성되는 분산 H^∞ 상태 추정 기법을 제안한다.

2. 부정 내적 공간에서의 H^∞ 상태 추정 기법

[2]에서는 준최적 H^∞ 상태 추정 문제가 특정 조건을 만족하는 가운데 일반적 벡터 공간 상에서의 특정한 스칼라 이차 함수(scalar quadratic function)의 최소화 문제이며 또한 projection을 통하여 이와 동일한 해를 가지는 부정 내적 공간 상에서 정의되는 error Gramian 행렬의 정지점(stationary point)을 순환적으로 찾아주는 부정 내적 공간 상에서 정의되는 칼만 필터의 한 가지 특수한 형태임을 보이고 있다. 본 절에서는 이에 대하여 간략하게 설명한다. 자세한 내용은 [2]를 참조하기 바란다.

2.1 부정 내적 공간의 정의

우선 $\mathcal{K}$ 를 복소 공간 C 상에서의 선형 공간이라고 하자.

정의 1 (Inner Product) 내적 $\langle\ ,\ \rangle$는 다음과 같은 조건을 만족하면서 $\mathcal{K}\times\mathcal{K}$에서 정의되는 *mapping* 이다.

a. $\langle ax+y,z\rangle = a\langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$

b. $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle^*$ 여기에서 $*$는 *conjugate transpose*를 나타낸다.

정의 2 $\mathcal{K}$ 에서의 요소 x는 다음과 같이 정의된다.

a. $\langle x,x\rangle > 0$이면 *positive*

b. $\langle x,x\rangle < 0$이면 *negative*

c. $\langle x,x\rangle = 0$ 이면 *neutral*

즉, 집합 $\{x, \langle x,x\rangle = 0\}$ 은 내적으로 $\langle\ ,\ \rangle$를 가지는 공간 $\mathcal{K}$에서 *neutral* 집합으로 정의되고, $\{x, \langle x,x\rangle > 0\}$ 은 $\mathcal{K}$의 *positive* 집합으로, 또한 $\{x, \langle x,x\rangle < 0\}$ 은 $\mathcal{K}$의 *negative* 집합으로 정의된다.

정의 3 (Indefinite Inner Product Space) 내적으로서 $\langle\ ,\ \rangle$가 정의된 $\mathcal{C}$상에서의 선형 공간 $\mathcal{K}$가 *positive*와 *negative* 요소를 가지고 있으면 그 선형 공간은 부정 내적 공간*(indefinite inner produc space)*[11][4] 으로 정의된다.

이와 같이 부정 내적 공간은 Hilbert 공간과는 달리 $x \neq 0$ 이라도 $\langle x,x\rangle = 0$ 이 될 수 있으며 따라서 Hilbert 공간의 중요한 특성인 직교성(orthogonality)등이 다르게 정의된다.

2.2 준최적 H^∞ 상태 추정 문제

우선 다음과 같은 일반적 시변 상태 방정식을 고려한다.

$$\begin{cases} x_{i+1} = F_i x_i + G_i u_i, & x_0 \\ y_i = H_i x_i + v_i & 0 \le i \le N \end{cases} \tag{1}$$

여기에서 F_i, G_i, H_i는 알려진 행렬이며 $x_0, \{u_i\}$와 $\{v_i\}$는 통계적 특성을 모르는 l_2 신호로 가정한다. 또한 y_i는 관측치 벡터이며 v_i 및 u_i 는 관측 및 공정 잡음이다. 원하는 상태 추정 벡터 $z_i = L_i x_i$ 일때 필터링 에러는 다음과 같이 정의된다.

$$e_{f,i} = \check{z}_{i|i} - L_i x_i \tag{2}$$

$\check{z}_{i|i} = \mathcal{F}(y_0, \cdots, y_i)$로서 시간 인덱스 0으로부터 i까지의 관측치 $\{y_i\}$ 로부터의 추정치이며 $\mathcal{F}$ 는 추정 기법(estimation strategy)이다.

문제 1 (준최적 H^∞ 상태 추정 문제) 스칼라 $\gamma > 0$ 및 최종 시간 N이 주어진 경우 비용 함수 (3)을 만족하는 추정 기법 $\check{z}_{i|i} = \mathcal{F}(y_0, y_1, \cdots, y_i)$ 를 찾는다.

$$\sup_{x_0,u,v} \frac{\sum_{i=0}^N e_{f,i}^* e_{f,i}}{(x_0 - \check{x}_0)^* \Pi_0^{-1} (x_0 - \check{x}_0) + \sum_{i=0}^N u_i^* u_i + \sum_{i=0}^N v_i^* v_i} < \gamma^2 \tag{3}$$

문제 1은 다음과 같은 스칼라 이차 함수 (5)를 고려할 때

$$J_{f,N} \quad (x_0, \quad u_0, \cdots, u_N, y_0, \cdots, y_N) \tag{4}$$

$$\begin{aligned} =\quad & x_0^* \Pi_0^{-1} x_0 + \sum_{i=0}^N u_i^* u_i + \sum_{i=0}^N \left(\begin{bmatrix} y_i \\ \check{z}_{i|i} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_i \\ L_i \end{bmatrix} x_i \right)^* \\ & \times \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^{-2} I \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} y_i \\ \check{z}_{i|i} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_i \\ L_i \end{bmatrix} x_i \right) \end{aligned} \tag{5}$$

아래의 조건 a,b

a. 식 (5)가 $\{x_0, u_0, \cdots, u_N\}$에 대해 최소값을 가지며

b. 또한 이러한 최소값에 있어서 식 (5) > 0 일 수 있는 추정치 $\{\check{z}_{i|i}\}_{i=0}^N$가 존재하면, 즉

$$\min_{\{x_0, u_0, \cdots, u_N\}} J_{f,N}(x_0, u_0, \cdots, u_N, y_0, \cdots, y_N) > 0$$

이 만족되면 비용 함수 (3)을 만족하는 추정 기법 $\check{z}_{i|i} = \mathcal{F}(y_0, y_1, \cdots, y_i)$을 구할 수 있다.

이와 같이 준최적 H^∞ 상태 추정 문제가 스칼라 이차 함수의 최소화 문제로 변형될 경우 다음의 원인들에 의해 부정 내적 공간이 고려되게 된다.

우선 다음과 같은 일반적 벡터 공간에서의 시변 상태 방정식을 고려하면

$$\begin{cases} x_{i+1} = F_i x_i + G_i u_i, & x_0 \\ y_i = H_i x_i + v_i & 0 \le i \le N \end{cases} \tag{6}$$

(x_0, u_i, v_i 는 특성을 모르는 벡터이며 관측치인 y_i 은 모든 시간 인덱스 i에 대하여 알려진 벡터라고 가정한다) 일반적인 상태 추정 문제에 있어서는 다음과 같은 스칼라 이차 함수의 최소화 문제를 생각하게 된다.

문제 2 (스칼라 이차 함수의 최소화) $\{y_i\}_{i=0}^N$가 주어진 경우 x_0와 $\{u_i\}_{i=0}^N$ 에 대하여 다음과 같은 스칼라 이차 함수를 최소화한다.

$$J(x_0, u, y) = x_0^* \Pi_0^{-1} x_0 + \sum_{i=0}^N \begin{bmatrix} u_i^* & (y_i - H_i x_i)^* \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Q_i & S_i \\ S_i^* & R_i \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u_i \\ y_i - H_i x_i \end{bmatrix} \tag{7}$$

여기에서 Q_i, S_i, R_i, Π_0 는 일반적 벡터 공간에서의 *Gramian*을 $\langle\ ,\ \rangle$ 으로 정의할 경우 *(Hilbert 공간에서는 공분산 행렬)*

$$\left\langle \begin{bmatrix} x_0 \\ u_i \\ v_i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_0 \\ u_i \\ v_i \end{bmatrix} \right\rangle = \begin{bmatrix} \Pi_0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_i & S_i \\ 0 & S_i^* & R_i \end{bmatrix} \tag{8}$$

과 같이 주어진 *Hermitian* 행렬이다.

이제 상태 방정식 (6) 및 문제 2에서의 스칼라 이차 함수 (7)과 준최적 H^∞ 상태 추정 문제에서의 (5)를 비교하여 보면 각각의 행렬들이 각각 $Q_i = I$, $S_i = 0$, $\Pi_0 > 0$, 또한

$$R_i = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \tag{9}$$

와 같이 연관되게 되는데 이러한 관계를 가지는 준최적 H^∞ 상태 추정 문제를 식 (10)과 같은 상태 방정식으로 표현할 경우 부정 내적 공간을 고려하는 원인은 바로 이러한 대응 관계에서 H^∞ 문제에서의 R_i가 부정 행렬(indefinite matrix)이기 때문이다. 일반적으로 Hilbert 공간에서 스칼라 이차 함수 (7)을 정의하여 상태 추정 문제를 푸는 경우에는 공간 상에서의 orthogonal projection을 통하여 (7)의 최소화와 동일한 해를 가지는 error Gramian, 즉 이차 비용 함수를 정의하고 innovation 기법을 이용하여 순환적인 해를 구하게 되는데 이러한 경우의 상태 추정 기법이 칼만 필터이다. 하지만 준최적 H^∞ 상태 추정 문제의 경우 효율적인 상태 추정 기법을 얻기 위해서는 식 (5)와 (7)의 대응 관계, 즉 준최적 H^∞ 상태 추정 문제가 부정 내적 공간에서의 상태 모델로 나타날 수 있다는 사실 때문에 Hilbert 공간이 아닌 부정 내적 공간에서의 error Gramian의 정의 및 projection을 통하여 해를 구하게 된다. 하지만 항상 유일하게 존재하는 Hilbert 공간에서의 projection과는 달리 부정 내적 공간에서의 projection은 특정한 조건이 만족되지 않으면 존재하지 않을 수 있으며 또한 유일하지 않을 수도 있다. 이러한 특성 때문에 부정 내적 공간에서 상태 추정 문제를 풀기 위해서는 특정한 error Gramian을 정의하고 이의 정지점(stationary point) 및 최소 조

건을 고려하여 projection을 구하게 된다. 또한 부정 내적 공간에서 innovation을 정의하는 경우 Hilbert 공간에서의 칼만 필터 방정식과 같은 부정 내적 공간에서의 칼만 필터를 구할 수 있는데 이러한 부정 내적 공간에서의 칼만 필터는 Hilbert 공간에서의 칼만 필터와 동일한 방정식을 가지게 된다[2]. 따라서 준최적 H^∞ 상태 추정 문제에서의 스칼라 이차 함수 (5)는 그 자체적으로 부정 행렬을 가지게 되기 때문에 그에 해당하는 상태 추정 기법은 부정 내적 공간에서의 칼만 필터의 한 특수한 형태가 된다. 이러한 관점에서 준최적 H^∞ 상태 추정 문제를 부정 내적 공간에서 정의되는 상태 방정식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{cases} x_{i+1} = F_i x_i + G_i u_i \\ \begin{bmatrix} y_i \\ \check{z}_{i|i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_i \\ L_i \end{bmatrix} x_i + v_i \end{cases} \tag{10}$$

또한 $\langle\ ,\ \rangle$을 부정 내적 공간에서의 Gramian 으로 정의하게 되면

$$\left\langle \begin{bmatrix} x_0 \\ u_i \\ v_i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_0 \\ u_i \\ v_i \end{bmatrix} \right\rangle = \begin{bmatrix} \Pi_0 & 0 & 0 \\ 0 & I\delta_{ik} & 0 \\ 0 & 0 & \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \delta_{ik} \end{bmatrix} \tag{11}$$

이 된다. 따라서 준최적 H^∞ 상태 추정기는 우선 조건 a, b를 만족하는 $\{\check{z}_{i|i}\}_{i=0}^N$ 를 설정하고 이를 부정 내적 공간에서의 칼만 필터 방정식과 triangular factorization 등의 간단한 행렬식들을 응용함으로써 구할 수 있다[2]. 이 중 첫번째 조건인 스칼라 이차 함수 (5)의 최소 조건 a 는 아래의 정리 1 에서의 준최적 H^∞ 상태 추정기의 존재 조건인 (15)이며 최소 조건 a가 만족될 때 두 번째 조건 b를 만족하는 추정 기법 $\{\check{z}_{i|i}\}_{i=0}^N$는 central 필터인 경우

$$\check{z}_{i|i} = \hat{z}_{i|i} = L_i \hat{x}_{i|i} \tag{12}$$

이다.

정리 1 (유한 시구간 준최적 H^∞ 필터) 비용 함수 (3)을 만족하는 준최적 유한 시구간 H^∞ 상태 추정기가 존재하기 위한 필요 충분 조건은 다음과 같다.
우선 다음과 같은 행렬을 정의한다.

$$R_i = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix},\ R_{e,i} = R_i + \begin{bmatrix} H_i \\ L_i \end{bmatrix} P_i \begin{bmatrix} H_i^* & L_i^* \end{bmatrix} \tag{13}$$

여기에서 $P_0 = \Pi_0$ 이고 P_i 는 다음 *Riccati* 순환식을 만족한다.

$$P_{i+1} = F_i P_i F_i^* + G_i G_i^* - F_i P_i \begin{bmatrix} H_i^* & L_i^* \end{bmatrix} R_{e,i}^{-1} \begin{bmatrix} H_i \\ L_i \end{bmatrix} P_i F_i^* \tag{14}$$

이러한 경우 모든 $i = 0, \cdots, N$ 에 대하여

$$\begin{aligned} P_{i|i}^{-1} &= P_i^{-1} + \begin{bmatrix} H_i^* & L_i^* \end{bmatrix} R_i^{-1} \begin{bmatrix} H_i \\ L_i \end{bmatrix} \\ &= P_i^{-1} + H_i^* H_i - \gamma^{-2} L_i^* L_i > 0 \end{aligned} \tag{15}$$

이면 비용 함수 (3)을 만족하는 준최적 H^∞ 상태 추정기의 예측치 $\hat{x}_{i+1}$는 다음과 같다.

$$\hat{x}_{i+1} = F_i \hat{x}_i + K_{p,i}(y_i - H_i \hat{x}_i), \quad \hat{x}_0 = 0 \tag{16}$$

여기에서 예측치 필터의 이득 $K_{p,i}$는

$$K_{p,i} = F_i P_i H_i^* (I + H_i P_i H_i^*)^{-1} \tag{17}$$

이다. 또한 필터링된 형태의 H^∞ 상태 추정치 $\hat{x}_{i+1|i+1}$는

$$\hat{x}_{i+1|i+1} = F_i \hat{x}_{i|i} + K_{f,i+1}(y_{i+1} - H_{i+1} F_i \hat{x}_{i|i}) \tag{18}$$

이며 상태 벡터의 초기치 $\hat{x}_{-1|-1} = 0$ 이다.
이때 이득 방정식은 다음과 같다.

$$K_{f,i+1} = P_{i+1} H_{i+1}^* (I + H_{i+1} P_{i+1} H_{i+1}^*)^{-1} \tag{19}$$

3. 변형된 H^∞ 필터 이득 방정식

분산 H^∞ 상태 추정기를 구성함에 있어서 고려해야 할 부분은 필터의 이득 방정식이다. 즉 이득 방정식이 식 (19)와 같이 주어지는 경우 필터의 추정치를 각각의 관측치의 선형 합으로 나타내어 줄 수가 없기 때문에 효율적인 분산 필터 구성에 문제가 된다. 일반적인 칼만 필터의 경우 이득 방정식의 변형된 형태는 잘 알려진 information form 행렬을 이용하여 구할 수 있었다. 이러한 변형된 형태의 이득 방정식은 필터의 추정치를 관측치의 선형 합으로 나타내어 줄 수가 있기 때문에 분산 상태 추정기를 구성하는 데 있어서 효율적으로 사용되었다. 하지만 기존의 H^∞ 상태 추정 기법과 관련하여 game theory[8]나 spectral factorization등을 이용한 결과들[10]은 실제적인 적용 문제에서 칼만 필터와의 상관성을 논하기가 어려웠다. 하지만 준최적 H^∞ 상태 추정 기법이 부정 내적 공간에서 정의되는 칼만 필터의 한 가지 특수한 형태라는 결과[2]를 이용하게 되면 기존의 칼만 필터에서 전개되는 방정식을 H^∞ 상태 추정 문제에 적절한 변형을 통하여 응용할 수 있다. 본 절에서는 기존의 칼만 필터에 적용되었던 information form 행렬 및 변형된 필터 이득 방정식을 부정 내적 공간에서 정의되는 준최적 H^∞ 상태 추정 문제에 적용함으로써 분산 상태 추정기의 구성에 적합한 변형된 H^∞필터 이득 방정식을 구한다.

3.1 변형된 칼만 이득 방정식

칼만 필터에 있어서의 변형된 이득 방정식은 다음과 같이 구하여진다. 우선 식 (6)과 같은 일반적인 상태 방정식을 가정하게 되면 (칼만 필터 문제의 경우 식 (6)에서 공정 잡음 및 관측 잡음은 각각 Q_i와 R_i를 공분산으로 가지는 일반적인 백색 잡음이며 $S_i = 0$으로 가정된다.) 칼만 이득 방정식은

$$K_{f,i} = P_i H_i^* (R_i + H_i P_i H_i^*)^{-1} \tag{20}$$

이다. 이때 P_i는 예측된 추정치 벡터와 실제 상태 벡터 사이의 오차 공분산 행렬, 즉 $P_i = E[(x_i - \hat{x}_i)(x_i - \hat{x}_i)^*]$ 이며 칼만 필터 순환식으로부터 구할 수 있다. 변형된 필터 이득 방정식에 있어 고려되는 information form 행렬은 필터링된 상태 추정치 $\hat{x}_{i|i}$와 실제 상태 벡터사이의 오차 공분산 행렬 $P_{i|i} = E[(x_i - \hat{x}_{i|i})(x_i - \hat{x}_{i|i})^*]$을 정의하는 경우

$$P_{i|i}^{-1} = P_i^{-1} + H_i^* R_i^{-1} H_i \tag{21}$$

가 되며 변형된 칼만 이득 방정식은 다음과 같다.

$$K_{A,i} = P_{i|i} H_i^* R_i^{-1} \tag{22}$$

3.2 변형된 H^∞ 필터 이득 방정식

준최적 H^∞ 상태 추정 문제에서 기존의 필터 이득 방정식을 대체할 변형된 이득 방정식은 부정 내적 공간에서 정의되는 준최적 H^∞ 상태 추정 문제서의 상태 방정식 (10)에 칼만 필터 경우의 information form (21) 및 변형된 이득 방정식 (22)를 응용함으로써 얻어질 수 있다. 우선 부정 내적 공간에서의 상태 방

정식 (10)에서 정의된 행렬들을 이용하여 information form 행렬을 구성하면 H^∞ 문제에서의 Riccati 순환식의 해 $P_{i|i}$의 역행렬은

$$P_{i|i}^{-1} = P_i^{-1} + \begin{bmatrix} H_i^* & L_i^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} H_i \\ L_i \end{bmatrix} = P_i^{-1} + H_i^* H_i - \gamma^{-2} L_i^* L_i \quad (23)$$

이 되며 역시 칼만 필터의 변형 이득 방정식 (22)을 이용하여 부정 내적 공간에서의 상태 방정식을 고려하게 되면 필터링된 상태 추정치는 다음 식과 같이 나타난다.

$$\hat{x}_{i+1|i+1} = F_i \hat{x}_{i|i} + P_{i+1|i+1}^{-1} \begin{bmatrix} H_{i+1}^* & L_{i+1}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} y_{i+1} - \hat{y}_{i+1|i} \\ \check{z}_{i+1|i+1} - \hat{z}_{i+1|i} \end{bmatrix} \quad (24)$$

여기에서 $\hat{y}_{i|i-1}$ 와 $\hat{z}_{i|i-1}$ 는 $\{y_l\}$ 과 $\{\check{z}_{l|l}\}$ 의 선형 확장 공간 $\mathcal{L}\{\{y_l\}_{l=0}^{i-1}, \{\check{z}_{l|l}\}_{l=0}^{i-1}\}$에 대한 y_i와 $\check{z}_{i|i}$의 부정 내적 공간에서의 projection[2] 이다.
식 (24)는 다음과 같이 전개된다.

$$\hat{x}_{i+1|i+1} = \hat{x}_{i+1} + P_{i+1|i+1}^{-1} H_{i+1}^* (y_{i+1} - \hat{y}_{i+1|i}) - \frac{1}{\gamma^2} P_{i+1|i+1}^{-1} L_{i+1}^* (\check{z}_{i+1|i+1} - \hat{z}_{i+1|i}) \quad (25)$$

여기에서 $\hat{y}_{i+1|i} = H_{i+1} F_i \hat{x}_{i|i}$이며 고려하는 준최적 H^∞ 필터가 비용 함수 (3)을 만족하는 모든 필터 중 central 필터인 경우

$$\check{z}_{i+1|i+1} = \hat{z}_{i+1|i+1} = L_i \hat{x}_{i+1|i+1} \quad (26)$$

으로 두면 식 (25)는 다음과 같이 전개된다.

$$(I + \frac{1}{\gamma^2} P_{i+1|i+1} L_{i+1}^* L_{i+1})(\hat{x}_{i+1|i+1} - \hat{x}_{i+1}) = P_{i+1|i+1} H_{i+1}^* (y_{i+1} - H_{i+1} F_i \hat{x}_{i|i}) \quad (27)$$

위 식으로부터 필터링된 추정치 $\hat{x}_{i+1|i+1}$ 에 대한 방정식이 다음과 같이 주어지면

$$\hat{x}_{i+1|i+1} = \hat{x}_{i+1} + (I + \frac{1}{\gamma^2} P_{i+1|i+1} L_{i+1}^* L_{i+1})^{-1} \times P_{i+1|i+1} H_{i+1}^* (y_{i+1} - H_{i+1} F_i \hat{x}_{i|i}) \quad (28)$$

준최적 H^∞ 상태 추정기의 변형된 이득 방정식 $K_{A,i+1}$는 다음과 같이 정의한다.

$$K_{A,i+1} = (I + \frac{1}{\gamma^2} P_{i+1|i+1} L_{i+1}^* L_{i+1})^{-1} P_{i+1|i+1} H_{i+1}^* \quad (29)$$

또한 이러한 변형된 이득 방정식은 matrix inversion lemma 등을 이용하여 다음과 같이 직접적으로 얻어질 수 있다.

$$\begin{aligned} K_{f,i} &= P_i H_i^* (I + H_i P_i H_i^*)^{-1} \quad (30) \\ &= P_i H_i^* (I - H_i P_i (I + H_i^* H_i P_i)^{-1} H_i^*) \\ &= P_i (H_i^* - H_i^* H_i P_i (I + H_i^* H_i P_i)^{-1} H_i^*) \\ &= P_i (H_i^* - H_i^* H_i P_i (I + H_i^* H_i P_i)^{-1} H_i^* \\ &\quad - (I + H_i^* H_i P_i)^{-1} H_i^* + (I + H_i^* H_i P_i)^{-1} H_i^*) \\ &= P_i (H_i^* - (I + H_i^* H_i P_i)(I + H_i^* H_i P_i)^{-1} H_i^* \\ &\quad + (I + H_i^* H_i P_i)^{-1} H_i^* \\ &= P_i (I + H_i^* H_i P_i)^{-1} H_i^* \\ &= P_i P_i^{-1} (P_i^{-1} + H_i^* H_i)^{-1} H_i \\ &= (P_{i|i}^{-1} + \frac{1}{\gamma^2} L_i^* L_i)^{-1} H_i^* \\ &= (I + \frac{1}{\gamma^2} P_{i|i} L_i^* L_i)^{-1} P_{i|i} H_i^* \\ &= K_{A,i} \end{aligned}$$

4. 분산 H^∞ 상태 추정기의 설계

4.1 분산 H^∞ 상태 추정 문제의 설정

분산 상태 추정 문제는 일반적으로 지역 센서에서의 상태 방정식, 즉 지역 모델이 전역 모델과 다른 일반적인 경우와 두 모델이 같은 특수한 경우로 나눌 수 있다[12]. 우선 전역 모델과 지역 모델이 같은 경우의 문제 설정은 다음과 같다.

$$\begin{cases} x_{i+1} = F_i x_i + G_i u_i \\ y_i^k = C_i^k x_i + v_i^k \\ z_i = L_i x_i \end{cases} \quad (31)$$

여기에서 $k = 1, 2, \cdots, N$로서 각각의 지역 모델에 해당하며 y_i^k와 v_i^k는 각각 k 번째 지역 필터의 측정치와 측정 잡음을 의미한다. 공정 잡음인 u_i와 v_i^k는 유한한 에너지를 가진 통계적 특성을 모르는 신호로 가정한다. 또한 전역 모델과 지역 센서의 상태 모델이 다른 경우는 다음과 같다.

$$\begin{cases} x_{i+1}^k = F_i^k x_i^k + G_i^k u_i^k \\ y_i^k = H_i^k x_i^k + v_i^k \\ z_i^k = L_i^k x_i^k \end{cases} \quad (32)$$

여기에서 x_i^k는 k번째 지역 필터에서의 상태 벡터이며, F_i^k, G_i^k, H_i^k는 k 번째 지역 필터에 관계된 행렬들이다. 각각의 모델이 (32)와 같은 경우, 즉 전역 필터의 모델과 지역 필터의 모델이 다른 경우 분산 상태 추정 기법을 적용하기 위한 가정은 다음과 같다. 우선 각각의 모델이 다른 경우에 있어서의 k번째 지역 필터의 측정 행렬 H_i^k와 각각의 모델이 같은 경우의 측정 행렬 C_i^k 사이에는 $C_i^k = H_i^k M_i^k$인 행렬 M_i^k 가 존재하여야 하며[12] 이러한 경우 원하는 추정치 z_i에 있어서 γ 레벨을 만족하는 준최적 분산 H^∞ 상태 추정기를 설계하기 위해서는 다음 식이 만족되어야 한다.

$$L_i^k = L_i M_i^{k\dagger} \quad (33)$$

여기서 $\dagger$는 의사 역행렬을 의미한다.

4.2 분산 H^∞ 상태 추정 기법

우선 각각의 지역 센서에서의 관측 벡터가 전체 시스템의 관측 방정식에 포함되는 일반적인 형태인 전역적인 상태 추정 기법에 대하여 전개한다[3]. 여기에서 각각의 관측치 벡터들의 행

렬들을 다음과 같이 정의하면 전역 상태 추정 기법에서의 관측 모델은 식 (35)와 같다.

$$\begin{aligned} y_i &= \left[y_i^{1*}\ y_i^{2*}\ \cdots\ y_i^{N*}\right]^* \\ C_i &= \left[C_i^{1*}\ C_i^{2*}\ \cdots\ C_i^{N*}\right]^* \\ v_i &= \left[v_i^{1*}\ v_i^{2*}\ \cdots\ v_i^{N*}\right]^* \end{aligned} \quad (34)$$

$$y_i = C_i x_i + v_i \quad (35)$$

이러한 경우 변형된 이득 방정식 (29)를 이용하여 전역 상태 추정기 및 전역 상태 추정치를 각각의 지역 센서의 관측치의 선형 합으로 나타내면

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i|i} &= \hat{x}_i + A_i^{-1} P_{i|i} C_i^* (y_i - C_i \hat{x}_i) \quad (36) \\ &= \hat{x}_i + A_i^{-1} P_{i|i} \sum_{k=1}^{N} C_i^{k*} (y_i - C_i^k \hat{x}_i) \end{aligned}$$

이다. 여기에서 $A_i = I + \frac{1}{\gamma^2} P_{i|i} L_i{}^* L_i$ 로 정의된다. 이제 위의 식을 고려하여 전역 모델과 지역 모델이 다른 일반적인 경우에 대한 분산형 H^∞ 상태 추정 기법을 다음과 같이 구한다.
우선 $A_i^k = I + \frac{1}{\gamma^2} P_{i|i}^k L_i^{k*} L_i^k$ 로 정의하면 k 번째 지역 상태 추정기는 다음과 같다.

$$\hat{x}_{i|i}^k = \hat{x}_i^k + A_i^{k^{-1}} P_{i|i}^k H_i^{k*} (y_i^k - H_i^k \hat{x}_i^k) \quad (37)$$

여기에서 $P_{i|i}^k$는 지역 필터의 Riccati 순환식의 해이다. 이러한 경우 전역 상태 추정치 $\hat{x}_{i|i}$ 를 각각의 지역 상태 추정치 $\hat{x}_i^k, \hat{x}_{i|i}^k$ 및 $P_{i|i}^k$ 의 선형합으로 나타낼 수 있는 분산 상태 추정 방정식, 즉 중앙 융합 필터의 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i|i} &= [I - A_i^{-1} P_{i|i} H_i^* H_i] \hat{x}_{i|i-1} + A_i^{-1} \{ \sum_{k=1}^{n} \{ P_{i|i}^{k^{-1}} \quad (38) \\ &\times A_i^k \hat{x}_{i|i}^k - P_{i|i}^{k^{-1}} A_i^k [I - A_i^{k^{-1}} P_{i|i}^k H_i^{k*} H_i^k] \hat{x}_{i|i-1}^k \} \} \end{aligned}$$

또한 전역 추정치와 지역 추정치의 시간에 따른 갱신식은 $\hat{x}_{i+1} = F_i \hat{x}_{i|i}$ 및 $\hat{x}_{i+1}^k = F_i^k \hat{x}_{i|i}^k$가 된다. 하지만 (38)의 계산에 있어서 중앙 융합 필터의 Riccati 순환식의 해 $P_{i|i}$ 를 직접 계산하게 되면 상태 변수가 많은 경우 계산량이 증가하므로 효율적이지 못하다. 따라서 계산량을 감소시키기 위하여 다음 식을 통해 $P_{i|i}$ 를 지역 상태 추정기로부터의 $P_{i|i}^k$ 로부터 직접 계산한다.

$$P_{i|i}^{-1} = P_i^{-1} + \sum_{k=1}^{N} \{ M_i^{k*} (P_{i|i}^{k^{-1}} - P_i^{k^{-1}}) M_i^k \} + \frac{N-1}{\gamma^2} L_i^* L_i \quad (39)$$

위 식은 전역 및 지역 H^∞ 필터의 information form 행렬 형태 및 다음 식 (40) 을 통하여 얻어진다.

$$\begin{bmatrix} C_i^* & L_i^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_i \\ L_i \end{bmatrix} = \{ \sum_{k=1}^{N} C_i^{k*} C_i^k \} - \frac{1}{\gamma^2} L_i^* L_i \quad (40)$$

전역 모델과 지역 모델이 같은 경우의 분산 상태 추정 방정식은 (38) 과 (39)에서 $M_i^k = I$로 대치하면 된다. 일반적으로 잡음 감쇄 수준인 γ 가 ∞ 인 경우 H^∞ 상태 추정 기법은 칼만 필터와 동일하게 나타나는데 본 논문에서 제안한 분산 H^∞ 상태 추정 기법 역시 이러한 경우 간단한 전개 과정을 통하면 칼만 필터를 사용한 기존의 분산 상태 추정 기법[3]과 같아짐을 알 수 있다.

5. 결 론

본 논문에서는 다중 센서 상황의 상태 추정 문제에 불분명한 모델링 및 외부 잡음에 의한 추정 오차를 일정한 레벨 이하로 감소시켜 강인성을 보장할 수 있는 분산 H^∞ 상태 추정 기법을 제안하였다. 이를 위해 준최적 H^∞ 상태 추정 문제가 부정 내적 공간에서 정의될 수 있는 상태 방정식이며 따라서 준최적 H^∞ 상태 추정기 역시 부정 내적 공간에서의 칼만 필터의 한 가지 특수한 형태임을 이용하여 칼만 필터에 있어 기존의 변형된 필터 이득 방정식을 얻기 위한 information form 행렬 및 변형 이득 방정식을 부정 내적 공간의 준최적 H^∞ 상태 방정식에 적용하여 분산 상태 추정기의 설계에 적합한 변형된 H^∞ 필터 이득 방정식을 도출하였다. 또한 이를 이용하여 지역 필터와 중앙의 융합 필터 사이에 불필요한 계산량을 감소시킬 수 있는 효율적인 시간 갱신식을 가지는 분산 H^∞ 상태 추정기를 설계하였다. 이러한 분산 H^∞ 상태 추정 기법은 차후에 적절한 결정 (Decision) 방법과 함께 다중 센서 데이터 융합(Multisensor Data Fusion) 문제에 있어서의 강인성[6]을 다루기 위한 새로운 제안으로 볼 수 있다.

참고문헌

[1] Brown et. al., *Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering*, John Wiley & Sons, Inc., 1983.

[2] Hassibi et. al., "Linear Estimation in Krein Spaces," *IEEE. Trans. Auto. Contr.*, vol. 41, No. 1, pp. 18-49, 1996.

[3] Hassimipour et. al., "Decentralized Structures for Parallel Kalman Filtering," *IEEE. Trans. Auto. Contr.*, vol. 33, No. 1, pp. 88-94, 1988.

[4] J. Bognar, *Indefinite Inner Product Spaces*, Springer Verlag, 1974.

[5] McKendall et. al., "Robust Fusion of Location Information," *Proc. Int. Conf. Robot. Auto*, pp. 1239-1242, 1988.

[6] Moshe Kam et. al., "Sensor Fusion for Mobile Robot Navigation," *Proc. of IEEE*, vol. 85, No. 1, pp. 108-119, 1997.

[7] Siouris, *Optimal Control and Estimation Theory*, John Wiley & Sons, Inc., 1996.

[8] T. Basar and P. Bernhard. *H^∞ Optimal Control and Related Minimax Design Problems: A Dynamic Game Approach*, Birkhauser. Boston, 1995.

[9] Thomas Kerr, "Decentralized Filtering and Redundancy Management for Multisensor Navigation," *IEEE. Trans. Aero. Elec. Sys.*, vol. 23, No. 1, pp. 83-119, 1987.

[10] U. Shaked and Y. Theodor, "H^∞-Optimal Estimation : A Tutorial," *Proc. IEEE CDC*, pp. 2278-2286, 1992.

[11] V. I. Istratescu, *Inner Product Structures, Theory and Applications, Mathmatics and Its Applications*, Dordrecht, Holland:Reidel , 1987.

[12] Willsky et. al., "Combining and Updating of Local Estimates and Regional Maps Along Sets of One-Dimensional Tracks," *IEEE. Trans. Auto. Contr.*,vol. AC-27, No. 4, pp. 799-813, 1982