

## 슬라이딩 모드 제어를 이용한 3축 안정화 위성의 자세 제어 및 강건성 해석

### Robust Attitude Control and Analysis for 3-Axis Stabilized Spacecraft using Sliding Mode Control

\*신 동 준\*, 김 진 호\*\*

\* 인하대학교 항공우주공학과 (E-mail : g9611064@inhavision.inha.ac.kr)

\*\* 인하대학교 항공우주공학과 (E-mail : jhkim@dragon.inha.ac.kr)

**Abstracts** Nonlinear robust attitude controller for 3-axis stabilized spacecraft is designed. Robust stability analysis for nonlinear spacecraft system with disturbance is conducted. External disturbances and parametric uncertainties decrease Spacecraft's attitude pointing accuracy. Sliding Mode Control(SMC) provides stability of system in the face of these disturbances and uncertainties. The concept of quadratic boundedness and quadratic stability are applied to the robust analysis for the nonlinear spacecraft system subject to bounded disturbance torques. Numerical simulation is conducted to compare the analysis result and actual nonlinear simulation. The simulation show that analysis result is valid.

**Keywords** Attitude Control, SMC, Robust Analysis, Quadratic Boundedness, Quadratic Stability

#### 1. 서론

인공위성의 운동 방정식은 3축이 연성된 비선형 방정식이다. 또한 외란이 지속적으로 작용하고 있고 방정식에 불확실성이 존재한다.

인공위성의 자세 운동에 가해지는 외란에는 외부 환경 요인에 의한 지구 중력 구배 토크, 지구 자기장 토크, 공기 저항에 의한 토크, 태양 복사에 의한 토크 등이 있다. 일반적으로 이러한 외란 토크의 크기는 대략적으로 알려져 있으며 제어 토크에 비하여 상대적으로 작은 값을 지닌다.

한편, 일반적으로 모델의 불확실성은 매개변수 불확실성과 모델링되지 않은 무시된 동특성에 의한 불확실성으로 구분된다. 인공위성의 매개변수 불확실성에는 관성 모멘트 행렬 오차와 구동기나 센서 오정렬 오차 등이 있고 무시된 동특성에 의한 불확실성에는 인공위성을 모델링할 때 강체 구조물에 의한 자세 운동만을 고려하고 유연 구조체에 의한 자세 운동의 영향을 고려하지 않았을 때 발생하는 오차가 있다.[3]

이러한 외란과 불확실성이 존재하는 시스템의 안정성 유지를 보장하기 위해 강건제어의 하나인 슬라이딩 모드 제어 (Sliding Mode Control : SMC) 기법을 이용한다. 슬라이딩 모드 제어 기법은 불확실성이 존재하는 비선형 시스템의 다차원 추종 문제를 일차원 안정성 문제로 전환함으로써 시스템의 성능과 안정성에 대한 체계적인 접근 방식을 제시한다.[1]

설계된 제어기의 성능을 검증하기 위해서는 시스템에 대한 안정성 해석이 요구된다. 불확실성이 존재하는 비선형 시스템에 대해 리아푸노프 함수를 이용한 안정성 해석이 많이 사용되고 있으며 본 논문에서는 이차형 리아푸노프 함수를 이용한 이차 유계 (Quadratic Boundedness) 및 이차 안정성(Quadratic Stability) 이론을 통하여 설계된 인공위성 자세 제어계의 강건성 해석을 수행하였다.[4]

#### 2. 이론적 배경

##### 2.1 이차 유계(Quadratic Boundedness)

다음과 같은 시스템을 가정한다. 한편, F는 연속적인 함수라고 가정한다.

$$\dot{x} = F(x, \delta), \quad \delta \in \Delta \quad (1)$$

$$\text{where } x(t) \in R^n \text{ and } t \in R \quad (2)$$

정의 1 : 다음 조건을 만족하는 Positive Definite Symmetric Matrix P가 존재하면 시스템 (1)은 이차 유계이다.

$$x^T P x > 1 \Rightarrow x^T P F(x, \delta) < 0 \quad \forall \delta \in \Delta \quad (3)$$

시스템 (1)이 이차 유계이면 아래 성질을 만족한다.

1. Bounded Ellipsoid  $\varepsilon \equiv \{x \in R^n : x^T P x \leq 1\}$ 는 시스템 (1)에 대하여 항상 invariant하다. 즉,

$$x(t_0) \in \varepsilon \Rightarrow x(t) \in \varepsilon \quad \forall t \geq t_0 \quad (4)$$

2. set  $\varepsilon$  은 attractive하다. 즉,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(x(t), \varepsilon) = 0 \quad (5)$$

$$\text{where } d(x(t), \varepsilon) \equiv \inf_{y \in \varepsilon} \|x(t) - y\| \quad (6)$$

$\varepsilon$ 을 포함하는  $B(r) \equiv \{x \in R^n : \|x\| \leq r\}$ 도 attractive set이며, B(r)의 반지름 r은  $\|x\|$ 의 ultimate size에 대한 upper bound이다. 이러한 특성을 지니는 가장 작은 구의 반지름은 다음과 같다.

$$r = \underline{\lambda}(P)^{-\frac{1}{2}} \quad (7)$$

3. 시스템 (1)의 모든 해는 bounded이다.  $\|x\|$ 의 upper bound는 다음과 같다.

$$\|x\|^2 \leq \frac{1}{\lambda(P)} \max\{x_0^T P x_0, 1\} \quad \forall t \geq t_0 \quad (8)$$

$$\text{where } x_0 = x(t_0) \quad (9)$$

한편, 다음과 같은 비선형 시스템을 가정한다.

$$\dot{x} = f(x) + G\delta, \quad \delta \in \Delta \quad (10)$$

$$\text{where } \Delta = \{\delta \in R^m : \|\delta\| \leq 1\} \quad (11)$$

비선형 시스템 (10)이 이차 유계이기 위한 충분 조건은 다음의 정리 1과 같다.[4]

정리 1 :  $x^T P x > 1$  일 때, 다음 조건을 만족하는 양한정 대칭 행렬 P와 양의 스칼라  $\alpha$ 가 존재한다고 가정한다.

$$2x^T P f(x) + \alpha x^T P x + \alpha^{-1} x^T P G G^T P x \leq 0 \quad (12)$$

그러면, 비선형 시스템 (10)은 이차 유계이다.

### 2.2 이차 안정성(Quadratic Stability)

시스템 (10)에서 외란의 영향이 없다고 가정하면 다음과 같은 Nominal 시스템을 생각할 수 있다.

$$\dot{x} = f(x) \quad (13)$$

정의 2 : 다음을 만족하는 양한정 대칭 행렬 P, Q, G가 존재하면 시스템 (10)은 이차 안정(Quadratically Stable)하다.

$$2x^T P_x f(x) \leq -x^T Q_x x \quad \forall x \in R^n \quad (14)$$

한편, 비선형 시스템 (10)의 이차 유계와 Nominal 시스템 (13)의 이차 안정성과의 관계는 다음 정리 2와 같다.[4]

정리 2 : 비선형 시스템 (10)에 대하여  $G \neq 0$ 이고 nominal 시스템 (13)이 이차 안정하다고 가정한다. 그러면 다음의 Lyapunov 행렬에 대하여 비선형 시스템 (10)은 이차 유계이다.

$$P = \eta P_x \quad \text{where } 0 < \eta \leq \eta_x \quad (15)$$

$$\eta_x = \max_{\lambda > 0} \lambda (\lambda P_x^{-1} Q_x - \lambda^2 G_x G_x^T P_x) \quad (16)$$

## 3. 슬라이딩 모드 제어기 설계

외란이 존재하는 인공위성의 동력학 방정식은 다음과 같다.

$$J\dot{x} = x \times Jx + U + w(t) \quad (17)$$

여기서 J는 인공위성의 관성 모멘트 행렬이고,  $x$ 는 인공위성의 동체 좌표계에 대한 자세 각속도이다. 또,  $w(t)$ 는 인공위성에 작용하는 외란 토크이고, 제어 입력  $U = u_{r,q} + \Delta u$ 는 반작용 휠에서 발생하는 제어 토크이다. 이 제어 입력 U는 슬라이딩 모드 제어기에서 결정되며,  $u_{r,q}$ 은  $\dot{s} = 0$  즉, 시스템의 궤적이 슬라이딩 면 위에 존재할 때 발생하는 제어 입력이고  $\Delta u$ 는 시스템의 궤적이 슬라이딩 면 위에 있지 않을 때, 항상 슬라이딩 면으로 향하게 하는 제어 입력이다.

한편, 인공위성의 운동학 미분 방정식을 깃스 벡터로 표현하면 식 (18)과 같다.[5]

$$\dot{\xi} = \frac{1}{2} [I_3 \quad 3 + \xi \xi^T + [\xi \times]] x = T(\xi) \omega \quad (18)$$

여기서

$$T(\xi) = \frac{1}{2} [I_3 \quad 3 + \xi \xi^T + [\xi \times]] \quad (19)$$

$$[\xi \times] = \begin{bmatrix} 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_3 & 0 & -\xi_1 \\ -\xi_2 & \xi_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

슬라이딩 면을 식 (21)과 같이 정의하면 식 (22)와 같이 정리된다.[2]

$$s(x, \xi) \equiv x - T^{-1}(\xi) f(\xi) \quad (21)$$

$$= T^{-1}(\xi) [\Delta \dot{\xi} + \Lambda \Delta \xi] \quad (22)$$

여기서

$$f(\xi) \equiv T(\xi^*) \omega^* - \Lambda \Delta \xi \quad (23)$$

$$\Delta \xi = \xi - \xi^* \quad (24)$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\Delta \dot{\xi} = T(\xi) [x - T^{-1}(\xi) T(\xi^*) \omega^*] \quad (26)$$

또한,  $\lambda_i$ 는 슬라이딩 면의 기울기이며 양수이다.  $\omega^*, \xi^*$ 는 각각 인공위성의 명령 각속도와 명령 깃스 벡터이다.

이에 따라  $u_{r,q}$ 은 식 (27)과 같이 결정된다.

$$u_{r,q} = x \times Jx + J T^{-1}(\xi) v \quad (27)$$

$$v = [\ddot{\xi}^* - \Lambda \Delta \dot{\xi} - \dot{T}(\xi)(x - T^{-1}(\xi)s)] \quad (28)$$

한편, 시스템의 궤적이 슬라이딩 면 밖에 존재할 때, 궤적을 항상 슬라이딩 면으로 향하게 한다는 것은 슬라이딩 면을 안정하게 만든다는 것이다. 그러므로 슬라이딩 면에 대한 Lyapunov 함수가 존재한다면 이 조건이 만족된다. 임시 Lyapunov 함수를 다음과 같이 결정하면 이 함수는 양한정(positive definite)이다.

$$V = \frac{1}{2} s^T J s > 0 \quad (29)$$

$$\dot{V} = -s^T J \dot{s} = -s^T \Delta u < 0 \quad (30)$$

즉, 식 (30)의 조건이 만족되도록  $\Delta u$ 를 결정하면 슬라이딩 면은 안정해진다. 즉, 모든 상태 궤적은 일정 시간 이내에 원하는 상태로 수렴하게 된다. 본 연구에서는 다음과 같이  $\Delta u$ 를 결정한다.

$$\Delta u = -k s \quad \text{where } k > 0 \text{ and scalar} \quad (31)$$

## 4. 강건성 해석

자세 제어기로 슬라이딩 모드 제어를 이용하면 제어 입력이 슬라이딩 함수 즉,  $s(x, \xi)$ 에 의해 결정된다. 한편 슬라이딩 함수가 인공위성의 상태 즉, 자세 각속도와 깃스 벡터로 표현되므로 이 슬라이딩 함수를 시스템의 안정성 해석에 이용할 수 있다.

본 연구에서는 슬라이딩 함수를 새로운 상태 변수로 설정하고 앞에서 설명한 이차 유계와 이차 안정성에 대한 이론을 이용하여 다음의 슬라이딩 함수에 대한 nominal 시스템 (33)이 이차 안정함을 증명하고 perturbed 시스템 (32)의 해가 이차 유계임이 보장되는  $\eta_x, P_x, Q_x$ 를 계산한다. 따라서 정의 1을 이용하면 설계한 슬라이딩 모드 제어기에 대한 슬라이딩 함수의 upper bound와 ultimate bound를 계산할 수 있다.

먼저 외란이 존재하는 슬라이딩 함수에 대한 시스템은 다음과 같다.

$$\dot{s} = -J^{-1} x \times Jx + J^{-1} U + J^{-1} w(t) - T^{-1}(\xi) v \quad (32)$$

한편, 외란을 고려하지 않은 nominal 시스템은 다음과 같다.

$$\dot{s} = -J^{-1}\omega \times J\omega + J^{-1}(U - T^{-1}(\xi) v) \quad (33)$$

여기서 제어 입력  $v$ 는

$$v = u_{i,q} + \Delta u = \omega \times J\omega + JT^{-1}(\xi) v - k s \quad (34)$$

이므로 식 (33)에 대입하면

$$\dot{s} = -kJ^{-1}s \quad (35)$$

따라서 정의 2에 의해

$$2s^T P_* \dot{s} = 2s^T J \dot{s} = 2s^T J [-kJ^{-1}s] \quad (36)$$

$$= -2ks^T s = -s^T [2kl] s \quad (37)$$

$$= -s^T Q_* s \quad (38)$$

nominal 시스템 (33)은  $P_* = J, Q_* = 2kl$ 가 존재하므로 이차 안정하다.

한편 정리 2의 식 (15), (16)에 의해서 외란이 존재하는 시스템 (32)가 이차 유계임을 보장하는 행렬  $P$ 를 계산할 수 있다.

따라서 정의 1을 이용하면 슬라이딩 함수  $s(\omega, \xi)$ 의 upper bound와 ultimate bound를 계산할 수 있다. 만약 계산된 ultimate bound가 0 근처의 매우 작은 값이라면 설계된 슬라이딩 모드 제어기를 사용했을 때, 시간이 지나면서 슬라이딩 함수의 크기가 bound 보다 작아진다는 것을 의미하고 이는 곧 시스템의 궤적이 원점에 가깝다는 것이다. 즉 전체 시스템이 안정하다는 것이다.

## 5. 시뮬레이션

인공위성의 관성 모멘트 행렬  $J$ 와 슬라이딩 모드 제어기의 이득값  $k$ 는 식 (39)와 같다.

$$J = \begin{bmatrix} 3668.0 & 80.0 & 92.2 \\ 80.0 & 970.0 & -204.0 \\ 92.2 & -204.0 & 3156.0 \end{bmatrix}, \quad k = 20 \quad (39)$$

슬라이딩 함수의 기울기는 식(40)과 같다.

$$\lambda_i = 0.5 \quad i = 1, 2, 3 \quad (40)$$

한편, 인공위성의 초기 자세각과 자세 각속도 및 명령 자세각과 자세 각속도는 각각 표 1.과 표 2.와 같다.

표 1. 초기 자세각과 자세 각속도

Table 1. Initial Attitude Angle and Rate

Axis	Initial Angle	Initial Rate
Roll	30°	1 deg/sec
Pitch	-45°	-1 deg/sec
Yaw	30°	1 deg/sec

표 2. 명령 자세각과 자세 각속도

Table 2. Command Attitude Angle and Rate

Axis	Command Angle	Command Rate
Roll	0°	0 deg/sec
Pitch	0°	0 deg/sec
Yaw	0°	0 deg/sec

이차 유계 및 이차 안정화 이론을 이용하여 upper bound, ultimate bound를 계산하면 식 (41), (43)과 같다.

$$\|s\|_{upper} \leq \sqrt{\frac{1}{\lambda(P)} \max\{s_0^T P s_0, 1\}} \quad (41)$$

$$= 0.0577 \quad (42)$$

$$\|s\|_{ultimate} = \lambda(P)^{-\frac{1}{2}} \quad (43)$$

$$= 0.0355 \quad (44)$$

한편, 여기서  $\eta_*$ 는 lower bound를 계산하여 사용한다.[4]

$$\eta_* \geq \frac{\lambda(P_*^{-1}Q_*)^2}{4\lambda(GG^T P_*)} = 0.0279 \quad (45)$$

따라서 설계된 제어기는 외란이 존재하더라도 슬라이딩 함수를 제한값 이내로 유지시킬 수 있으므로 시스템은 안정하다.

한편, 비선형 시뮬레이션 결과를 그림 1~5에 나타내었다. 비선형 시뮬레이션은 0 ~ 300 초까지 수행하였다.

그림 1 ~ 2에서 슬라이딩 함수  $s(\omega, \xi)$ 는 위의 해석에서 알 수 있듯이 제한값이내로 충분히 수렴함을 알 수 있다. 따라서 그림 3 ~ 4의 자세각과 자세 각속도 역시 0으로 수렴한다. 표 3.에 100초 이후의 각 축에 대한 슬라이딩 함수, 자세 각속도, 자세각에 대한 표준 편차를 나타내었다.

표 3. 슬라이딩 함수, 자세 각속도, 자세각에 대한 표준 편차

Table 3. Standard Deviation about Sliding Function.

Attitude Rate and Angle

Axis	Roll	Pitch	Yaw	Unit
$s(\omega, \xi)$	0.0077	0.0318	0.0067	deg/sec
Rate	0.0078	0.0321	0.0067	deg/sec
Angle	0.0692	0.2706	0.0621	deg

그림 5와 표 5.에 인공위성에 작용하고 있는 외란 토크를 나타내었다.

표 4. 계단 함수 외란

Table 4. Step Disturbance

구분	50	70	100	150	175	300	sec
$T_{dx}$	1.0	-1.0	1.0	-1.0	-0.5	0.0	$Nm$
$T_{dy}$	-1.0	1.0	-1.0	1.0	-0.5	0.0	$Nm$
$T_{dz}$	1.0	-1.0	1.0	-1.0	-0.5	0.0	$Nm$

## 6. 결론

본 연구에서는 슬라이딩 모드 제어기를 이용하여 외란이 존재하는 비선형 시스템인 인공위성의 자세 제어를 수행하였다. 슬라이딩 모드 제어기의 설계는 시스템의 궤적이 슬라이딩 면 근처에 존재할 때 사용되는 동등 제어 설계와 시스템의 궤적이 항상 슬라이딩 면으로 향하도록 하는 수정 제어 설계로 나누어서 설계하였다. 이 때 슬라이딩 면에서 항상 리아푸노프 함수가 존재하도록 제어 입력을 설계함으로써 설계된 슬라이딩 모드 제어기는 외란 토크가 존재하더라도 인공위성의 자세각과 자세 각속도를 주어진 명령 자세로 수렴시킨다.

한편, 이러한 제어기의 성능을 해석적으로 검증하기 위해 이차 리아푸노프 함수를 이용하여 강건성 해석을 수행하였다. 제어기의 성능을 수치적으로 제시하기 위해 슬라이딩 함수의 upper bound와 ultimate bound를 계산하였다. 이러한 bound는 불확실성이 존재하는 시스템의 안정성에 대한 수치적 비교 자료를 제공한다.

계산된 bound의 유효성을 확인하기 위해 비선형 자세 제어 시뮬레이션을 수행하였고, 시뮬레이션 결과 슬라이딩 함수의 값이 이론적으로 계산한 슬라이딩 함수의 bound 내에 있음을 확인하였다.

## 참고문헌

- [1] J.-J.E.Slotine, Weiping Li. "Applied Nonlinear Control". Prentice Hall, 1991.
- [2] J.Kim. "Disturbance Accommodating Sliding Mode Control". *Proc. of American Control Conference*, 1992. p.888 - p.890
- [3] J.R.Wertz et al.. "Spacecraft Attitude Determination and Control". D.Reidel Pub., 1986.
- [4] M.L. Brockman, Martin Corless. "Quadratic Boundedness of Nonlinear Dynamical System". *Proc. of IEEE Control System Society*, 1995. p.504 - p.509
- [5] 김종래. "Disturbance Accommodating Control 기법을 이용한 3축 안정화 인공위성의 비선형 강건 자세 제어 설계". 석사 학위 논문. 인하대학교, 1996

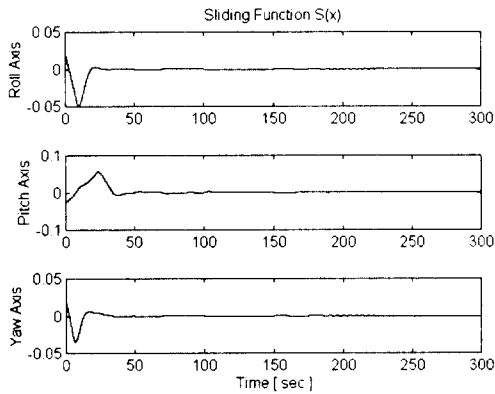


그림 1 슬라이딩 함수  $s(x)$   
Fig. 1 Sliding Function  $s(x)$

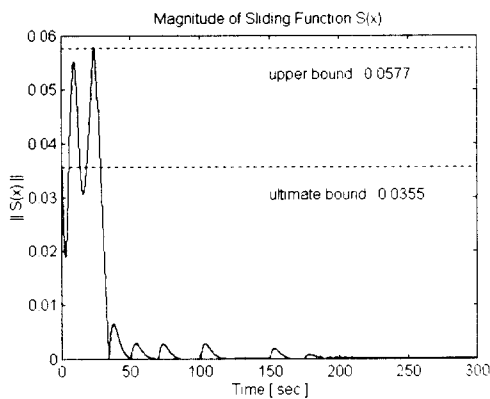


그림 2 슬라이딩 함수의 크기  
Fig. 2 Magnitude of  $s(x)$

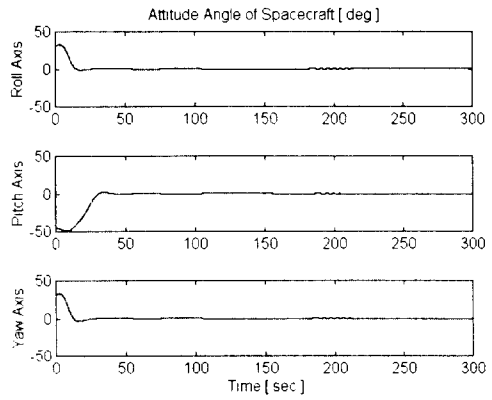


그림 3 자세각  
Fig. 3 Attitude Angle

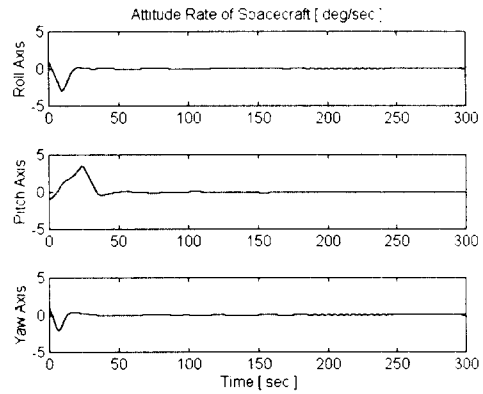


그림 4 자세 각속도  
Fig. 4 Attitude Angular Velocity

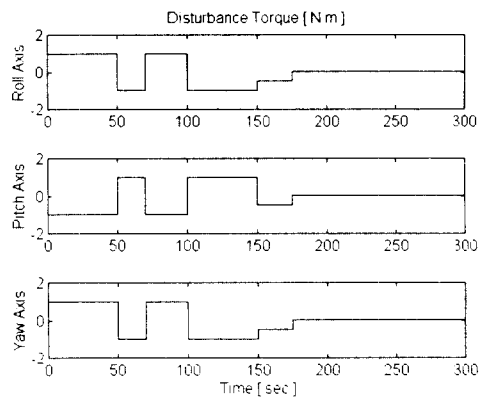


그림 5 외란 토크  
Fig. 5 Disturbance Torque