

모듈라 설계기법에 의한 적응 비선형 제어

° 현근호, 양해원
한양대학교 전기공학과

Adaptive Nonlinear Control with Modular Design

° K.H.Hyun, H.W.Yang

Department of Electrical Engineering, Hanyang University

Abstract - In this paper we present a scheme of adaptive backstepping controller for nonlinear system. Backstepping approach has recently been adopted as a design tool for nonlinear control and especially backstepping with modular design used to separately design controller and identifier. In the modular design the nonlinear damping term is contained in controller for input-to-state stability (ISS). We compare the ISS controller, which used in general case, with the weak-ISS controller that attenuates the effect of nonlinear damping term and prove their advantages and disadvantages by simulation.

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1} + \theta^T \phi_i(x_1, \dots, x_i), & 1 \leq i \leq n-1 \\ \dot{x}_n &= \beta_0(x)u + \theta^T \phi_n(x) \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (1)$$

여기서, θ 는 p 차의 미지파라미터이고, $\phi_i(x)$ 성분은 비선형 함수이다. 제어목적은 다음과 같은 동특성을 갖는 기준모델의 출력을 추종하는 것이다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_m &= \begin{bmatrix} 0 & & \\ \vdots & & I_{n-1} \\ 0 & & \end{bmatrix} x_m + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ k_m \end{bmatrix} r \\ y_r &= x_{m,1} \end{aligned} \quad (2)$$

여기서, $M(s) = s^n + m_{n-1}s^{n-1} + \dots + m_1s + m_0$ 는 안정한 다항식이고, $k_m > 0$, 입력 $r(t)$ 는 유계이다.

1. 서론

Backstepping 기법을 이용한 비선형시스템 적응 제어기 설계는 최근 적용되고 있는 분야로써 그 타당성이 입증되어 왔다. 더욱이 제어기와 식별기를 분리 설계하는 모듈라 설계방법은 표준적인 파라미터 추정 알고리즘을 마음대로 사용할 수 있다는 장점을 갖고 있다. [1] 모듈라 설계기법은 식별기에서 표준 파라미터 추정 알고리즘을 사용하기 위해 제어기에 추정 오차 및 추정미분값의 유계를 위한 비선형감쇄항을 추가하여 입력-상태 안정성(ISS)을 보장해 주고 있다. 그러나, 이러한 비선형감쇄항으로 인하여 제어기는 상태값에 대한 상당한 차수를 포함하게 되고 결과적으로 큰 부담을 떠안게 되는 단점이 있어 이를 보상해 주기 위해 비선형감쇄항을 완화한 weak-ISS 제어기의 가능성이 제시되었고 본 논문에서는 이의 타당성을 입증하고자 한다.

2.1.2 ISS 제어기 설계

설계하고자 하는 제어기는 파라미터오차($\hat{\theta}$) 및 그에 대한 도함수($\dot{\hat{\theta}}$)를 외란으로 가정하여 그에 대한 입력-상태 안정성(ISS)이 보장되도록 다음과 같이 Backstepping 알고리즘을 이용하여 구성한다.

2. 본론

2.1 모듈라설계기법에 의한 Backstepping

2.1.1 제어대상 플랜트

다음과 같은 Parametric-Strict-Feedback 형태의 n 차 플랜트를 가정한다.

$$\begin{aligned} z_i &= x_i - x_{m,i} - \alpha_{i-1} \\ \alpha_i(\bar{x}_i, \hat{\theta}, \bar{x}_{m,i}) &= -z_{i-1} - c_i z_i - \hat{\theta}^T w_i \\ &\quad + \sum_{k=1}^{i-1} \left(\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} x_{k+1} + \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_{m,k}} x_{m,k+1} \right) \\ &\quad - s_i(\bar{x}_i, \hat{\theta}, \bar{x}_{m,i-1}) z_i \\ w_i(\bar{x}_i, \hat{\theta}, \bar{x}_{m,i-1}) &= \phi_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} \phi_k, \quad i = 1, \dots, n \\ u &= \frac{1}{\beta_0(x)} [\alpha_n(x, \hat{\theta}, x_m) - m_0 x_{m,1} - \dots \\ &\quad - m_{n-1} x_{m,n} + k_m r] \end{aligned} \quad (3)$$

여기서, $\bar{x}_i = [x_1, \dots, x_i]^T$, $\bar{x}_{m,1} = [x_{m,1}, \dots, x_{m,i}]^T$ 이고, z 는 오차변수, α 는 안정화함수이다. n 차까지 식(3)에 의해 제어기를 구성하면 오차변수에 대한 동특성 방정식은 결국 다음

과 같은 형태를 갖게 된다.

$$\dot{z} = A_z(z, \hat{\theta}, t)z + W(z, \hat{\theta}, t)^T \hat{\theta} + D(z, \hat{\theta}, t)^T \dot{\hat{\theta}}, \quad z \in \mathbb{R}^n$$

$$A_z(z, \hat{\theta}, t) = \begin{bmatrix} -c_1 - s_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -c_2 - s_2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & -c_n - s_n \end{bmatrix}$$

$$W(z, \hat{\theta}, t)^T = \begin{bmatrix} w_1^T \\ w_2^T \\ \vdots \\ w_n^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times p},$$

$$D(z, \hat{\theta}, t)^T = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \\ \vdots \\ -\frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial \hat{\theta}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times p}.$$

(4)

식(3)에서 정의한 $s_i(\bar{x}_i, \hat{\theta}, \bar{x}_{m,i-1})$ 항은 식(4)의 오차변수 z 에 대한 동특성 방정식에서 \dot{z} 와 $\hat{\theta}$ 를 일종의 외란으로 보고 오차변수 z 에 대한 ISS 특성을 만족시키도록 추가시킨 비선형 감쇄항이며 다음과 같은 형태로 구성한다.

$$s_i = k_i |w_i|^2 + g_i \left| \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\theta}} \right|^2 \quad (5)$$

식(5)와 같은 비선형 감쇄항으로 인하여 오차변수 z 는 다음과 같은 ISS 특성을 갖게 된다.

$$\|z(t)\| \leq \frac{1}{2\sqrt{c_0}} \left(\frac{1}{k_0} \|\hat{\theta}\|_\infty^2 + \frac{1}{g_0} \|\frac{\partial \alpha}{\partial \hat{\theta}}\|_\infty \right)^{\frac{1}{2}} + \|z(0)\| e^{-c_0 t} \quad (6)$$

결국, 오차변수 z 는 임의의 시간에서 식(6)과 같이 자신의 초기값과 파라미터 오차 및 미분값에 의해 결정되는 유한한 값보다 작게 되는 성질을 갖게 되며 이를 입력-상태 안정성(ISS)라 한다.

2.1.3 표준식별기 설계

앞에서 제어기 설계시 원하는 안정성을 확보하였고 여기서는 표준적인 파라미터 추정 알고리즘을 사용할 수 있는 식별기를 설계한다. 식(4)의 형태로 주어진 z 에 대한 동특성 방정식에 대하여 표준 알고리즘을 사용하기 위해서는 이를 정적 방정식으로 교체할 필요가 있으며 Swapping 이론[2]을 이용하여 다음과 같은 필터를 사용한다.

$$\dot{X}_0 = A_z(z, \hat{\theta}, t)X_0 + W(z, \hat{\theta}, t)^T \hat{\theta} - D(z, \hat{\theta}, t)^T \dot{\hat{\theta}}, \quad X_0 \in \mathbb{R}^n$$

$$\dot{X}^T = A_z(z, \hat{\theta}, t)X^T + W(z, \hat{\theta}, t)^T, \quad X \in \mathbb{R}^{p \times n} \quad (7)$$

여기서, 추정오차 ε 을 다음과 같은 정적 방정식으로 얻을 수 있다.

$$\varepsilon = z + X_0 - X^T \hat{\theta} = X^T \dot{\hat{\theta}}, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}^n \quad (8)$$

식(8)에서 구한 추정오차 ε 은 이제 다음과 같이 표준 적응적

(Gradient 및 Least-Squares)에 적용할 수 있다.

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma \frac{X \varepsilon}{1 + \nu \|X\|_F^2}, \quad \Gamma = \Gamma^T > 0, \nu \geq 0$$

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma \frac{X \varepsilon}{1 + \nu \|X\|_F^2}$$

$$\dot{\Gamma} = -\Gamma \frac{X X^T}{1 + \nu \|X\|_F^2} \Gamma, \quad \Gamma(0) = \Gamma^T(0) > 0, \nu \geq 0 \quad (9)$$

그림 1에서는 식(7), (8) 및 (9)에 의해 구성된 z-Swapping 식별기를 나타내고 있다.

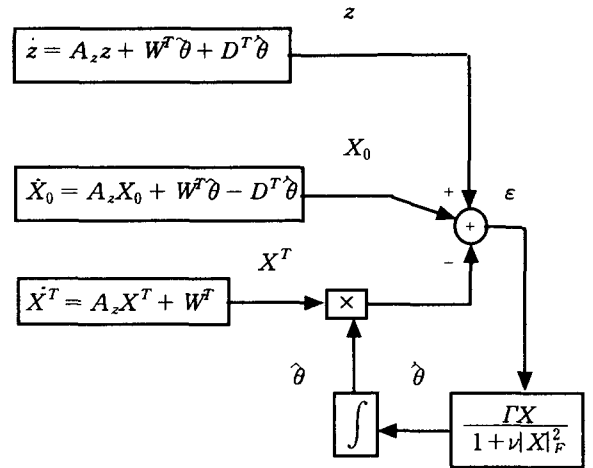


그림 1. z-Swapping 식별기의 구조

2.2 weak-ISS 제어기 설계

2.2.1 ISS 제어기의 단점

다음과 같은 2차의 비선형 플랜트를 가정하고 제어 목적은 상태 x 를 영으로 수렴시키는 것으로 하자.

$$\dot{x}_1 = x_2 + \theta \phi(x_1), \quad \phi(0) = 0$$

$$\dot{x}_2 = u \quad (10)$$

$$z_1 = x_1$$

$$z_2 = x_2 - \alpha_1(x_1, \hat{\theta})$$

여기서, $\phi(x_1) = x_1^2$ 이라고 가정하면, ISS 제어기는 다음과 같이 구성된다.

$$\alpha_1 = -c_1 z_1 - x_1 \phi(x_1)^2 z_1 - \hat{\theta} \phi(x_1)$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} = -c_1 - x_1 \phi(x_1)^2 - 2x_1 \phi(x_1) \phi'(x_1) x_1 - \hat{\theta} \phi'(x_1) \quad (11)$$

$$u = -z_1 - c_2 z_2 - x_2 \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \right)^2 \phi(x_1)^2 z_2 - g_2 \phi(x_1)^2 z_2 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} (x_2 + \hat{\theta} \phi(x_1))$$

여기서, 안정화함수 α 및 제어입력 u 의 x_1 에 대한 최고차항은 각각 5차 및 17차까지 되므로 결과적으로 제어기에 큰 부담을 주게 된다.

2.2.2 비선형감쇄항의 변경

제어기의 부담을 덜어주기 위해 식(5)의 경우와 달리 비선형감쇄항을 다음과 같이 적용하면 α 및 u 에는 x_1 에 대한 최고차항이 각각 3차 및 7차로 감소하게 된다.

$$s_i = k_i |w_i| + g_i \left| \frac{\partial \alpha_{i-1}^T}{\partial \theta} \right| \quad (12)$$

그러나, 식(12)와 같은 형태로 비선형감쇄항을 포함시키게 되면 w 혹은 $\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \theta}$ 가 영이 될 경우 x_i 및 g_i 항 자체가 영이 되어 Backstepping 알고리즘상 문제가 되므로 다음과 같은 형태로 비선형감쇄항을 변경한다.

$$s_i = x_i \sqrt{|w_i|^2 + 1} + g_i \sqrt{\left| \frac{\partial \alpha_{i-1}^T}{\partial \theta} \right|^2 + 1} \quad (13)$$

$, i = 1, \dots, n$

2.3 모의실험 및 결과검토

ISS 제어기와 weak-ISS 제어기의 장단점을 확인하기 위해 식(10)과 동일한 플랜트 및 제어 목적을 가정하여 같은 상황에서 각각 모의실험을 수행하였으며 주요 설계파라미터는 다음과 같다.

$$c_0 = c_1 = c_2 = x_0 = x_1 = x_2 = g_0 = g_2 = 1$$

$$\gamma = 10, \quad \nu = 1, \quad \theta = 2, \quad \hat{\theta}(0) = 0$$

$$x(0) = -X_0(0) = [0 \quad 10]^T, \quad \chi(0) = 0$$

모의실험 결과를 그림 2 및 그림 3에 나타내었다.

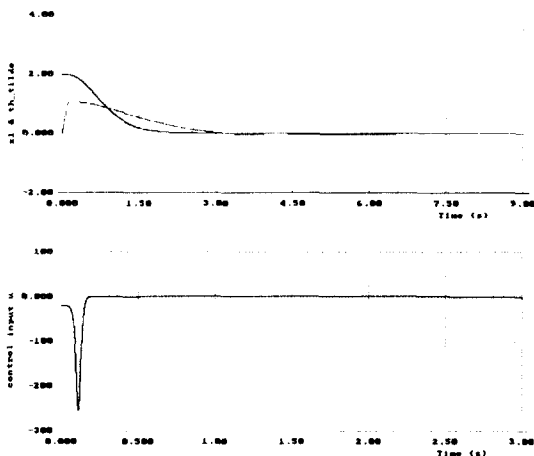


그림 2. ISS 제어기에서의 결과

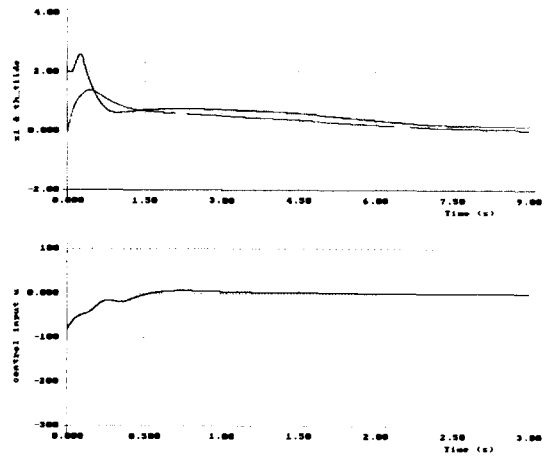


그림 3. weak-ISS 제어기에서의 결과

다. 반면에 제어입력 u 는 ISS 제어기의 경우 과도한 임펄스 형태로 발생하는데 비해 weak-ISS 제어기는 보다 약한 형태의 제어입력이 발생하였다.

3. 결 론

모듈라 설계기법을 이용한 Backstepping 적용제어방식은 비선형 시스템의 제어에 유효하게 사용될 수 있음을 확인하였다. 또한, ISS 제어기와 weak-ISS 제어기는 각각 장단점을 갖고 있으며 ISS 제어기는 제어입력의 부담에 관계없이 오차를 빠른 시간내에 수렴시키고, weak-ISS 제어기는 오차의 수렴속도에 큰 관계없이 제어기의 부담을 줄일 수 있음을 확인하였다.

이상에서 언급된 제어 알고리즘은 플랜트의 상태값을 모두 알고 있다는 전제하에 구성된 상태궤환으로서 차후 출력궤환의 경우에도 적용가능하며, weak-ISS 제어기에 대해 보다 상세한 응답특성을 확인하는 과제를 남겨 놓고 있다.

[참 고 문 헌]

- [1] Miroslav Krstic, Ioannis Kanellakopoulos, Petar Kokotovic, "Nonlinear and Adaptive Control Design", John Wiley & Sons, pp185~282, 1995
- [2] A.S.Morse, "Global stability of parameter-adaptive control systems", IEEE Transactions on Automatic Control, vol.25, pp.433-439, 1980

그림을 각각 비교하면 ISS 제어기의 경우에는 오차변수 x_1 과 파라미터 오차 $\hat{\theta}$ 가 빠른 시간내에 영으로 수렴하는데 비하여 weak-ISS 제어기는 어느 정도 시간이 지난 후 수렴하였