

구조적 불확실성을 갖는 비최소위상계의 강인한 제어기 설계

Design of a robust controller for Nonminimum Phase System with structured uncertainty

*김신구, *서광식, *정동근, *김영철

*충북대학교 전자공학과(Tel: +82-431-61-2475; Fax: +82-431-272-2475 Email: yckim@cbucc.chungbuk.ac.kr

Abstracts We consider the robust control problem for nonminimum phase(NMP) systems with parametric uncertainty which appear often in aircraft and missile control. First, a new method that makes such an uncertain NMP system to be factored as a interval minimum phase(MP) transfer function and a time delay term in the Pade approximation form has been presented. The controller to be proposed consists of a compensator $C_Q(s)$ with Smith predictor in the internal model control(IMC) structure, so that it can have good robustness and performance against the structured uncertainty and the time delay behaviour due to NMP plant. the $C_Q(s)$ is designed on the MP model by using QFT. The stability and performance of overall system has been evaluated by the generalized Kharitonov theorem.

Keywords QFT, Nonminimum Phase, Smith Predictor, IMC(Internal Model Control), Kharitonov theorem.

1. 서론

플랜트가 비최소위상계이면, 제어기 설계 사양이 주파수 응답의 크기에 대한 유계조건으로 주어질 때 매우 어려운 문제가 된다[1,2].

비최소위상 플랜트(NMP)를 위한 제어기 설계 방식으로는 극배치 방법[3], NMP 플랜트를 최소위상 플랜트(Minimum-Phase)로 변환시키기 위한 전향보상기(Feedforward Compensator)설계 방법[4], 고차의 비최소위상 플랜트를 균형모델 저차화 방법을 이용하여 저차의 최소위상 플랜트로 변화시키는 방법[5] 등이 제시되었다. 최근에 모델 불확실성과 NMP 특성을 갖는 플랜트를 위한 강인 제어기 설계 방법으로서 H_2 , H_∞ , LQG/LTR, QFT 등이 연구되고 있으며 각기 적용조건에 따라 장, 단점이 있다. 실제 비최소위상이며 구조적 불확실성을 갖는 예로는 항공기, 유도무기제어 시스템 등에서 흔히 나타난다. 비최소위상계에 대한 일반적인 접근 방법은 플랜트 모델을 최소위상계와 전역통과필터(All pass filter)로 분해하고, MP부분에 근거하여 제어기를 설계하는 것이다[6], 그런데 이 방법은 전역통과필터의 위상지연을 고려하여 Loopshaping 하기 때문에 비최소위상에 따르는 응답 지연 특성을 보상하기 어렵다.

본 논문에서는 구조적 불확실성을 가지고 있는 비최소위상 플랜트를 지연 시간 부분과 구간 최소위상 모델로 분해한 후, 최소위상 플랜트에 근거하여 피드백 보상기를 설계하고 지연 시간을 보상하는 Smith Predictor를 도입하였다[7,8]. 또한, 모델 불확실성에 기인한 Smith 예측기의 감도를 줄이고 강인성을 갖게 하기위해 전체 피드백 제어기는 IMC구조로 설계하는 방법을 제시한다[7,9].

2. 문제의 설정

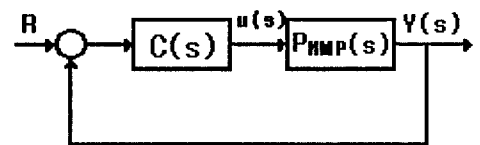


그림 2.1 : 비최소위상 플랜트의 피드백시스템

그림2.1에서 $P_{NMP}(s)$ 는 다음과 같이 유한 크기의 파라미터 불확실성을 갖는 구간플랜트(interval plant)이고, 불확실성 영역에 대해서 최소한 한 개 이상의 영점이 RHP에 존재하는 비최소위상계라 가정한다.

$$P_{NMP}(s) := \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N_m s^m + N_{m-1} s^{m-1} + \dots + N_0}{D_n s^n + D_{n-1} s^{n-1} + \dots + D_0} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \text{여기서, } N_i &\in [N_i^-, N_i^+], i=0, 1, \dots, n, \\ D_j &\in [D_j^-, D_j^+], j=0, 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (2.2)$$

상첨자 - 와 + 는 각각 파라미터의 상, 하한치를 표시한다. 불확실성 파라미터 벡터 q 와 그 영역 Q 를 정의한다.

$$q := [N_0 \ N_1 \ \dots \ N_n \ D_0 \ D_1 \ \dots \ D_m] \quad (2.3)$$

$$Q := \{q \mid a_i \in [a_i^-, a_i^+], i=1, 2, \dots, (n+m+2)\} \quad (2.4)$$

본 논문에서는 이러한 구간 비최소위상 플랜트에 대해 다음 특성을 만족시키는 제어기의 설계방법을 제시하고자 한다.

(1) 제어기 $C(s)$ 가 식 (2.1)의 구간 플랜트를 $q \in Q$ 에 대해 주파수 영역에서의 안정도 여유(이득, 위상여유)사항을 만족시킨다.

(2) NMP에 기인한 응답지연 특성을 보상하여 MP에 준하는 제어 성능을 갖게한다.

위의 설계 목적을 위해 구간 비최소위상 플랜트를 구간MP모델과 Pade' 근사식으로 나타낸 지연 시간 부분으로 분해하는 새로운 방식을 제시한다. 지연 시간에 대해서는 Smith predictor를 구성하여 보상하게 되며, 구간MP 플랜트 대해 안정도 여유를 갖도록 QFT기법을 이용하여 보상기를 설계하게 된다. 그런데 Smith predictor는 플랜트 모델의 구조적 불확실성에 매우 민감하므로 이를 감소시킬 방법으로서 IMC기법을 도입하게 된다. 구체적인 내용은 다음절에서 정리한다.

3. 구간 비최소위상 시스템의 강인 제어기 설계

3.1 구간 비최소위상 플랜트의 분해

이 절에서는 구간 NMP 전달함수를 구간 MP 전달함수와 근사화 지연시간항으로 분해하는 방법을 나타내고자 한다. 지연시간 전달함수 $e^{-T_d s}$ 의 Pade' 1차, 2차 근사식은 다음과 같다.

$$e^{-T_d s} \approx \frac{1 - T_d s/2}{1 + T_d s/2} = \frac{f_1 s - 1}{e_1 s + 1} = T_1(s) \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} e^{-T_d s} &\approx \frac{1 - T_d s/2 + T_d^2 s^2/12}{1 + T_d s/2 + T_d^2 s^2/12} \\ &= \frac{f_1 s - 1}{e_1 s + 1} = T_2(s) \end{aligned} \quad (3.2)$$

NMP 플랜트 $P_{NMP}(s)$ 에 대한 스텝응답으로부터 출력이 언더슈트에서 양의 응답을 주는 시점까지의 최대 지연시간을 $T_d(s)$ 로 간주한다. 식(3.1)과 (3.2)를 이용하여 구간 NMP플랜트 $P_{NMP}(s)$ 는 구간MP 전달함수와 지연시간 항으로 분해될 수 있다.

$$\text{즉 } P_{NMP}(s) \approx P_{MP}(s) T_i(s), i=1 \text{ or } 2. \quad (3.3)$$

여기서,

$$P_{MP}(s) = \frac{b_s s^l + b_{l-1} s^{l-1} + \dots + b_0}{a_k s^k + a_{k-1} s^{k-1} + \dots + a_0} \quad (3.4)$$

$$b_i \in [b_i^-, b_i^+] \quad (3.5)$$

$$a_j \in [a_j^-, a_j^+] \quad (3.6)$$

$$x := [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_k \ b_0 \ b_1 \ \dots \ b_l] \quad (3.7)$$

$$X := \{x \mid x \in [x_i^-, x_i^+], i=1, 2, \dots, (k+l+2)\} \quad (3.8)$$

$P_{MP}(s) T_i(s)$ 의 분모, 분자 다항식 계수는 x 의 1차함수로 나타나며, (3.3)의 등식이 성립하는 x 는 유일하게 구할 수는 없으나 구간플랜트 $P_{NMP}(s)$ 가 (3.3) 우변식의 부분집합이 되게하는 x 의 해가 항상 존재 함은 쉽게 알 수 있다.

3.2 IMC 구조를 갖는 강인제어기 설계

구간 비최소위상계를 위한 강인 제어기 설계의 기본 개념은 3.1절에서 유도한 바와 같이 지연시간을 갖는 구간 비최소위상 플랜트에 대해 지연시간을 Smith 예측기에 의해 보상되도록 하고 구간 플랜트 $P_{MP}(s)$ 에 대해서는 요구되는 안정도 여유를 만족시키도록 QFT 기법을 이용한 피드백 보상기를 설계한다. 그런데 Smith 예측기는 플랜트의 공칭 모델에 근거하여 설계되기 때문에 모델 불확실성에 민감하다. 본 논문에서는 이를 보상하기 위한 한 방법으로서 제어기가 IMC 구조를 갖도록 설계하는 방법을 제시하려는 것이다. 본 절에서는 이 과정을 단계별로 정리한다.

(3.3)을 다시쓰면 (3.9)와 같다.

$$P_{NMP}(s) = P_{MP}(s) \cdot e^{-sT_d} \quad (3.9)$$

그림 3-1에서 $C_Q(s)$ 는 비최소위상 플랜트에 대한 QFT설계 방법에 의한 제어기이고, $\overline{P_{MP}(s)}$ 는 공칭 비최소위상 플랜트이다. $(1 - e^{-sT_d})$ 를 피드백 시킴으로서 시간 지연을 보상하게 된다.

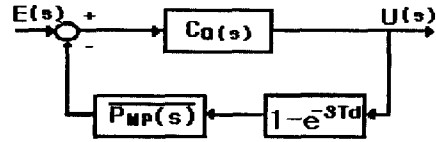


그림 3-1 : Smith Predictor의 불력도

그림 3-1의 지연시간 보상 제어기는 다음과 같다.

$$C_S(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{C_Q(s)}{1 + C_Q(s) P_{MP}(s)(1 - e^{-sT_d})} \quad (3.10)$$

식(3.10)의 Smith Predictor $C_S(s)$ 는 $P_{NMP}(s)$ 를 단순히 $P_{MP}(s)$ 에 대해 e^{-sT_d} 만큼 정확한 시간 지연이라고 본다면 별 문제가 없겠지만, $P_{NMP}(s)$ 의 구조적 불확실성으로 인해 적절한 보상이 될 수 없다.

두 번째 단계에서는 이를 보완하기 위해 그림 3-2와 같이 Internal Model을 제어기에 포함시키는 IMC(Internal Model Control)기법을 도입한다.

그림 3-2에서 $\overline{P_{NMP}(s)}$ 는 Internal Model이고 그림 3-3의 최종 제어기 $C(s)$ 는 (3.11)이 된다.

$$C(s) = \frac{C_i(s)}{1 - C_i(s) \overline{P_{NMP}(s)}} \quad (3.11)$$

그림 3-2의 Internal Model을 선정할 때 일반적인 IMC 기법에서는 주어진 플랜트의 공칭 모델을 선정하지만, 본 논문에서의 플랜트는 비최소위상의 특성을 가지고 있어, Internal Model은 실제 공칭 모델과 Internal Model의 차가 최소 위상 특성을 갖도록 하기 위한 다항식을 모델로 선정한다.

그렇게 되면 $P_{NMP}(s) - \overline{P_{NMP}(s)}$ 만큼의 오차가 피드백되어 제어기의 부담을 덜어줄 수 있게 된다.

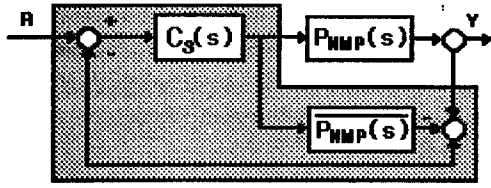


그림 3-2 : IMC 구조

4. 제어기 설계의 예.

4.1 플랜트의 최소위상 플랜트로의 근사화

제어 대상은 구조적 불확실성을 갖는 비최소위상 플랜트로 한다. 플랜트는 다음과 같다.

$$P_{NMP}(s) = \frac{As^2 + Bs + C}{1.114s^4 + Ds^3 + Es^2 + Fs + G} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} A &= [0.0631 \quad 0.0854] \\ B &= [-0.513 \quad -0.379] \\ C &= [0.7582 \quad 1.0258] \\ D &= [7.2323 \quad 7.3364] \\ E &= [16.6915 \quad 17.3531] \\ F &= [6.8461 \quad 8.3179] \\ G &= [0.669 \quad 1.115] \end{aligned}$$

식 (4.1)의 전달함수는 분자의 1차항 계수가 음의 부호이기 때문에 비최소위상의 특성을 갖게 되고, 그림 4-1에서 보는 바와 같이 시간 지연과 언더슈트의 특성이 구간적으로 나타남을 알 수 있다. 그림 4-1의 스텝응답으로부터 최대 지연 시간을 1sec로 하면, 지연 시간 1초에 해당하는 2차의 Pade 근사식은 (3.2)로부터 다음이 얻어진다.

$$e^{-s} = \frac{0.0743s^2 - 0.446s + 0.892}{0.0743s^2 + 0.446s + 0.892} \quad (4.2)$$

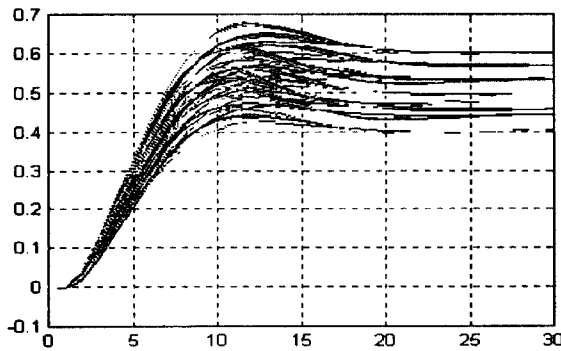


그림 4-1 : 플랜트의 개루프 단위계단 응답

식 (4.2)를 이용해 (3.3)식과 같이 비최소위상 플랜트로부터 최소 위상 플랜트를 구하기 위한 한 방법으로서 다음의 절차를 따른다.

주어진 플랜트를 Kharitonov's Theorem에 의해 분자, 분모에 대해 각각 4개의 Kharitonov's polynomials를 구한다.

분자항의 Kharitonov's polynomials은

$$\begin{aligned} N_1(s) &= 0.0854s^2 - 0.513s + 0.7582 \\ N_2(s) &= 0.0631s^2 - 0.379s + 1.0258 \\ N_3(s) &= 0.0631s^2 - 0.513s + 1.0258 \\ N_4(s) &= 0.0854s^2 - 0.379s + 0.7582 \end{aligned} \quad (4.3)$$

분모항의 Kharitonov's polynomials은

$$\begin{aligned} D_1(s) &= 1.114s^4 + 7.3364s^3 + 17.3531s^2 + 6.8461s + 0.669 \\ D_2(s) &= 1.114s^4 + 7.2323s^3 + 16.6915s^2 + 8.3179s + 1.115 \\ D_3(s) &= 1.114s^4 + 7.3364s^3 + 16.6915s^2 + 6.8461s + 1.115 \\ D_4(s) &= 1.114s^4 + 7.2323s^3 + 17.3531s^2 + 8.3179s + 0.669 \end{aligned} \quad (4.4)$$

식 (4.3)과 (4.4)에 대해 3.1절의 과정을 따라 구간 $P_{MP}(s)$ 를 구하면

$$P_{MP}(s) = \frac{[0.8 \quad 1.2]}{15s^2 + [7 \quad 9]s + [0.7 \quad 1.3]} \quad (4.5)$$

즉, (3.3)식에 의해 제어 대상 플랜트는 (4.6)식으로 근사화 된다.

$$P_{NMP}(s) \approx P_A(s) = \frac{[0.8 \quad 1.2]}{15s^2 + [7 \quad 9]s + [0.7 \quad 1.3]} \frac{0.0743s^2 - 0.446s + 0.892}{0.0743s^2 + 0.446s + 0.892} \quad (4.6)$$

식 (4.6)은 구조적 불확실성을 갖는 비최소위상 플랜트 $P_{NMP}(s)$ 를 구조적 불확실성을 갖는 최소위상 플랜트와 시간 지연 곱으로 표현되었음을 보여준다. 식 (4.6) 우변을 정리하면,

$$P_A(s) = \frac{as^2 + bs + c}{1.114s^4 + ds^3 + es^2 + fs + g} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} a &= [0.0594 \quad 0.0891] \\ b &= [-0.5352 \quad -0.3568] \\ c &= [0.7136 \quad 1.0704] \\ d &= [7.2101 \quad 7.3587] \\ e &= [16.5540 \quad 17.4906] \\ f &= [6.5562 \quad 8.6078] \\ g &= [0.6244 \quad 1.1596] \end{aligned}$$

따라서, $P_{NMP}(s) \subset P_A(s)$ 임을 알 수 있고, $P_A(s)$ 에 대해 설계 사양을 만족시키는 $C(s)$ 를 설계하면 이는 $P_{NMP}(s)$ 에 대해서도 만족 시킴을 주장할 수 있다.

4.2 최소위상 플랜트에 대한 QFT제어기 설계

구조적 불확실성을 갖는 최소위상 플랜트에 대해 일반적인 QFT설계 방법[6]을 따라 제어기를 설계한다. 설계 조건으로 BW=22, 위상여유 60 [deg], 이득여유 5-7 [dB]을 고려하였다. 구조적 불확실성에 대해 이러한 사양을 만족하는 Loopshaping 결과를 그림 4-2에 보였다. 이 때의 피드백 보상기 $C_Q(s)$ 는 다음과 같이 구해진다.

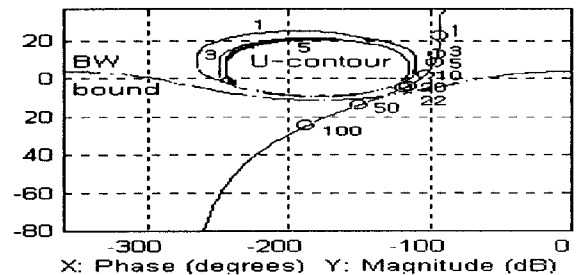


그림 4-2 : 니콜 차트에서의 Loopshaping

$$C_Q(s) = 834 \frac{(s+0.8747)}{(s+21.16)} \quad (4.8)$$

4.3 강인 제어기 설계

4.2절에서 최소위상 플랜트에 대한 제어기 $C_Q(s)$ 를 이용하면 Smith Predictor는 (3.10)식에 의해 다음과 같이 구해진다.

$$C_s(s) = \frac{929.5s^5 + 6888s^4 + 19510s^3 + 18740s^2 + 6275s + 650.7}{1.114s^5 + 30.87s^4 + 171.2s^3 + 581.9s^2 + 348.6s + 18.87} \quad (4.9)$$

식(3.10)에서의 최소 위상 공칭 플랜트 $\overline{P_{MP}}(s)$ 는 다음값으로 선택 되었다.

$$\overline{P_{MP}}(s) = \frac{1}{15s^2 + 8s + 1} \quad (4.10)$$

마지막으로 그림 3-2 의 $\overline{P_{NMP}}(s)$ 는 3절에 따라 $P_{NMP}(s)$ 공칭플랜트에 $-0.446s$ 를 없애기 위해 $-0.646s$ 항을 Internal Model 로 정한다. 즉, Internal Model $\overline{P_{NMP}}(s)$ 는 (4.11)식이 된다.

$$\overline{P_{NMP}}(s) = -0.646s \quad (4.11)$$

식 (3.11)에 의해 최종 강인 제어기는 식 (4.12)이 된다.

$$C(s) = \frac{1035.4s^9 + 14444.4s^8 + 87731.9s^7 + 287287.2s^6 + 528635.8s^5 + 1519484.29s^4 + 271043.29s^3 + 75373s^2 + 10532.2s + 580.5}{s^9 + 42.5s^8 + 434.49s^7 + 3619.5s^6 + 16600.7s^5 + 38786.6s^4 + 34646.8s^3 + 11523.6s^2 + 1287.9s + 17} \quad (4.12)$$

그림 4.3은 설계한 강인 제어기에 대한 그림 2.1의 보드선도이다. 설계사양의 이득여유와 위상여유를 만족시킴을 알 수 있고, 그림 4-4에서 보인 페루프 단위계단응답은 상승시간은 3초 더 빨라졌으며, 지연시간이 거의 없고, 불확실성에 의한 구간폭이 많이 줄어들었음을 알 수 있다.

5. 결론

기존의 구조적 불확실성을 갖는 비최소위상플랜트에 대한 QFT 설계 방법은 공칭 비최소위상 플랜트를 전역 통과 필터와 공칭 최소위상 플랜트로 나누어 전역 통과 필터의 위상 지연을 고려해 공칭 최소위상 플랜트에 대해 Loopshaping하여 제어기를 설계해왔다. 이 방법은 시간 지연의 특성을 개선할 수 없었다.

본 논문에서는 플랜트를 최소위상 플랜트와 시간 지연으로 바꾸어 최소위상 플랜트에 대해서 Loopshaping하고, 이미 알려져 있는 Smith Predictor와 IMC(Internal Model Control)기법을 적용해 파라미터 불확실성을 갖는 시간 지연 개선 방법을 제시했다. 시뮬레이션을 통해 기존의 방식보다 시간 지연에 있어 훨씬 개선된 성능을 보임으로써 제시한 방법의 유용성을 보였다. 그러나 구조적 불확실성을 갖는 비최소위상 플랜트를 구조적 불확실성을 갖는 최소위상 플랜트와 시간지연으로 바꾸는 과정은 아직 일반적인 범칙을 유도하지 못했다. 앞으로 이 부분은 연구할 필요가 있다.

6.참고문헌

- [1] J.S. Freudenberg and D.P. Looze, "Frequency Domain Properties of Scalar and Multivariable Feedback Systems", Springer-Verlag, 1988
- [2] I.M. Horowitz, "Synthesis of Feedback Systems". Academic Press, 1963
- [3] H. Elliot, "Direct adaptive pole placement with application to nonminimum phase system," *IEEE Trans. Automatic control*, vol. AC-27, pp.720-722, June 1982.
- [4] 구세완, 권혁성, 오원근, 서병설, "비최소 위상 플랜트의 최소 위상 플랜트로의 균형 모델 저차화," *KACC*, pp.1205-1208, Oct, 1996.
- [5] K. Ohkubo, H. Ohmori and A. Sano, "Adaptive control for partial model matching in frequency domain for non-minimum phase systems," *IFAC Adaptive Systems in Control and Signal Processing*, pp.205-210, 1989.
- [6] Isaac M. Horowitz. "Quantitative Feedback design Theory." vol. 1. QFT Publication, 1992.
- [7] Manfred Morari, Evangelos Zafriou. "Robust Process Control." Prentice Hall, 1989.
- [8] J.E. Marshall. "Control of time-delay systems". Institution of Electrical Engineers, 1979.
- [9] Williams. Levine. "THE CONTROL HANDBOOK". CRC Press, pp. 215-231 1996.

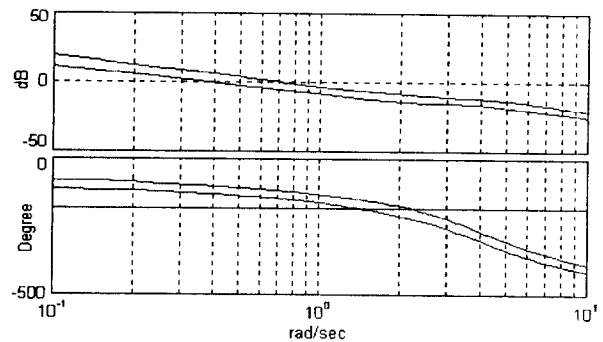


그림 4-3 : 개루프 bode envelope

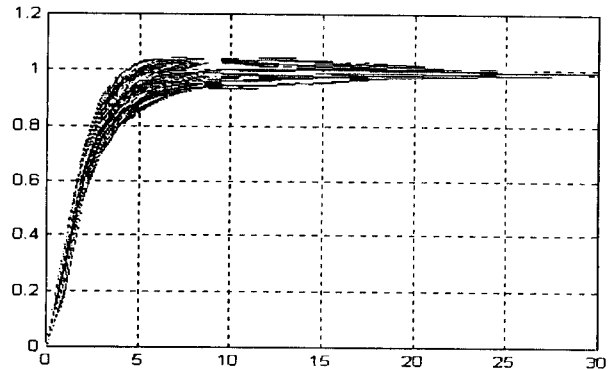


그림 4-4 : 강인 제어기에 의한 페루프 단위계단응답